МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Санкт-Петербургский
государственный университет аэрокосмического приборостроения

И. Л. Ерош

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2001

УДК 512.54
Е 78
ББК 22.1

Ерош И.Л.

Е78 Дискретная математика. Теория чисел: Учеб. пособие/СПбГУАП. СПб., 2001. 34 с.

В учебном пособии кратко изложены основные положения раздела дискретной математики “Теория чисел”. Приведены задачи для самостоятельного решения. Перед каждым набором задач приводится разбор примеров. В заключение приведены примеры использования данного раздела при построении различных технических систем.

Пособие ориентировано на студентов технических университетов, аспирантов и преподавателей дисциплины “Дискретная математика”.

Рецензенты:
кафедра радиосистем Санкт-Петербургского электротехнического университета;
кандидат технических наук доцент *В.Н. Сасковец*

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Моей дочери Анастасии Ерош посвящаю

ВВЕДЕНИЕ

Одним из разделов дискретной математики является теория чисел, которая первоначально изучала свойства целых чисел. Целое число является одним из древнейших математических понятий, связанных с подсчетом окружающих предметов. Теория чисел возникла из задач арифметики и первоначально оперировала четырьмя арифметическими действиями над натуральными (целыми, положительными) числами. Основными понятиями этой теории являлись *простые числа, составные числа*, *квадратные числа* (числа, равные квадрату некоторого другого числа), *совершенные числа* (числа равные сумме своих делителей). В VI веке до н.э. в Древней Греции было известно решение уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в целых числах.

В III веке до н.э. Евклид в "Началах" обосновал алгоритм нахождения наибольшего общего делителя двух произвольных целых чисел и доказал, что количество простых чисел является бесконечным. Эратосфен предложил метод нахождения простых чисел ("Решето Эратосфена"). Систематизация проблем теории чисел и методов их решений была выполнена в III веке н.э. Диофантом в "Арифметике". В XVII веке н.э. Ферма исследовал решения многих уравнений в целых числах и высказал гипотезу, что уравнение $x^n + y^n = z^n$, $n>2$, x, y, z – целые, не имеет решений (великая теорема Ферма). Ему также принадлежит утверждение, что если a и p (p – простое число) взаимно простые числа (наибольший общий делитель этих чисел равен 1), то $a^p - a$ делится на p нацело (малая теорема Ферма). Эйлер доказал великую теорему Ферма при $n = 3$ и обобщил малую теорему Ферма, введя понятие функции $\varphi(m)$ – количества чисел ряда 1, 2, 3, …, m взаимно простых с m, ныне называемую функцией Эйлера от целого m, и показал, что любое число a взаимно простое с m, возведенное в степень $\varphi(m)$, при делении на m дает в остатке 1. Проблема нахождения целых положительных остатков при делении одного целого на другое возникла из задач календарных расчетов в Китае (Сунь-цзы, Цинь Цзюшао) и в современном виде формулируется как китайская теорема об остатках.

Важным понятием теории чисел являются сравнения, основные свойства которых были доказаны Гауссом. Сравнение является свойством эквивалентности чисел, имеющих одинаковые положительные остатки при делении на некоторое целое число – модуль.

Теория чисел тесно связана с другими разделами дискретной математики: теорией графов, комбинаторикой, теорией конечных автоматов, дискретным спектральным анализом и, конечно, с теорией дискретных групп. Так, множество чисел 0, 1, 2, …, p–1 удовлетворяет аксиомам группы с операцией сложения по модулю p. Если считать p простым числом и исключить из множества 0, то оставшееся множество с операцией умножения по модулю p также образует группу. В этом случае множество чисел 0, 1, 2, …, p–1 с двумя заданными на нем операциями сложения и умножения по модулю p образует числовое поле, которое называется полем Галуа и обозначается $GF(p)$ – сокращение от *Galois Field*. Галуа показал, что для любого простого p и целого h существует конечное поле с числом элементов равным p^h. Такое поле обозначается $GF\ (p^h)$. Оно является для заданных p и h единственным (с точностью до изоморфизма). В любом поле $GF\ (p^h)$ в качестве подполя содержится поле $GF(p)$. Обычно поля Галуа вида $GF\ (p^h)$ не рассматриваются в теории чисел, однако, логическая связь этих полей с числовыми полями $GF\ (p)$, похожие свойства полей и тесное переплетение в технических приложениях позволили автору рассмотреть их основные свойства в данном пособии.

Автор выбирал материал для пособия, ориентируясь на технические приложения, хорошо ему известные, и на логическую завершенность материала. Безусловно, настоящее пособие не сможет заменить учебники по теории чисел ни по полноте представленного материала, ни по корректности его изложения. Однако техническому специалисту по мнению автора оно будет интересно тем, что в одном пособии изложен как теоретический материал, так и краткое описание технических задач, использующих этот материал в различных областях: теории корректирующих кодов, криптографии, методах сжатия информации и управления роботами, распознавании образов.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Делимость целых чисел

Что общего между числами множества 9, 16, 23, 30, 37, 44 кроме того, что они все целые? Казалось бы, ничего. Однако если ввести операцию деления с остатком и интересоваться только целым положительным остатком от деления чисел этого множества на 7, то окажется, что все они будут иметь одинаковый остаток, равный 2. Эти числа эквивалентны по этому свойству. Тогда приведенную последовательность можно продолжить дальше: 51, 58, 65, 72, 79 … Это множество чисел является бесконечным и счетным, все числа множества объединяет одно общее свойство: при делении на 7 они дают целый положительный остаток 2. Говорят, что эти числа a сравнимы по модулю 7. Такое свойство множества обозначают

$$a \equiv 2 \bmod 7.$$

Можно рассмотреть другое множество чисел, например, 3, 12, 21, 30, 39, 48, ... и убедиться в том, что при делении на число 9, все они дают остаток 3; т.е. общее свойство чисел a этого множества можно записать так:

$$a \equiv 3 \bmod 9.$$

Произвольное целое число a единственным образом может быть представлено в виде

$$a = mt + r,$$

где $m > 0$ – целое положительное число (делитель); t – частное; r – остаток

$$(0 \le r < m).$$

Так, например, если $a = 17$, $m = 5$, то $17 = 5*3 + 2$.

В дальнейшем мы будем использовать операцию деления и интересоваться только остатком, не обращая внимание на частное. Так, например, число 16 при делении на 11 дает остаток 5.

Наименьший положительный остаток от деления некоторого числа a на число m обычно называют наименьшим неотрицательным вычетом

a по модулю m. Если m делит a нацело, то остаток $r = 0$. Например, наименьший неотрицательный вычет при делении числа 18 на 6 равен 0.

Пусть имеется два числа a и b. Будем говорить, что они сравнимы по модулю m, если при делении на m они дают одинаковый целый положительный остаток. Например, числа 8 и 15 при делении на 7 имеют одинаковый остаток 1, т. е. они сравнимы по модулю 7. Сравнение чисел будем обозначать так

$$a \equiv b \bmod m.$$

Сравнению $a \equiv 0 \bmod m$ удовлетворяют все числа a, которые делятся на m нацело или, как говорят, кратные m.

1.2. Свойства сравнений

От сравнения $a \equiv b \bmod m$ можно перейти к равенству. Сравнение $a \equiv b \bmod m$ справедливо, если выполняется следующее равенство

$$a = b + m * t,$$

где * – умножение; t – некоторое целое (положительное, отрицательное или 0).

Такая связь между сравнениями и равенствами позволяет распространить понятие сравнения не только на положительные, но и на отрицательные числа. Например, можем записать

$$12 \equiv 7 \equiv 2 \equiv -3 \equiv -8 \equiv -13 \ldots \bmod 5.$$

Из связи между сравнениями и равенствами следуют правила эквивалентных преобразований сравнений:

а) Если $a \equiv b \bmod m$ и $b \equiv c \bmod m$, то $a \equiv c \bmod m$.

б) Если $a \equiv b \bmod m$ и $c \equiv d \bmod m$, то $a+b \equiv c+d \bmod m$. Это правило можно сформулировать и так: сравнения по одинаковому модулю можно почленно складывать.

в) Если $a \equiv b \bmod m$, то $a \equiv b+m*t \bmod m$, так как справедливо сравнение

$$m*t \equiv 0 \bmod m,$$

т. е. к любой части сравнения можно прибавить модуль, умноженный на любое целое.

г) Если $a \equiv b \bmod m$ и c – любое целое, взаимно простое с m, то

$$a/c \equiv b/c \bmod m,$$

т. е. обе части сравнения можно разделить на любое целое, если оно взаимно просто с модулем m.

Последнее свойство позволяет распространить понятия сравнения и на дробные числа.

Так, например, если имеем сравнение $1/3 \equiv 16/15 \bmod 11$, то так как (15, 11)=1, т. е. числа 15 и 11 взаимно просты, то обе части сравнения можно умножить на 15 и получим эквивалентное сравнение:

$$5 \equiv 16 \bmod 11.$$

1.3. Решение сравнений

Из приведенных правил эквивалентных преобразований сравнений следуют общие приемы решения сравнений. Пусть требуется решить сравнение

$$27 - 13 * 5 \equiv 10 * X \bmod 7$$

относительно неизвестного X. Можно показать, что если в сравнении имеется арифметическое выражение, то любой член его можно заменить остатком от деления на модуль (в общем случае – на любое сравнимое с ним число). Поскольку $27 \equiv 6 \bmod 7$, $13 \equiv -1 \bmod 7$ и $10 \equiv 3 \bmod 7$, то исходное сравнение можно представить в виде

$$6 - (-1) * 5 \equiv 3 * X \bmod 7.$$

Далее вычисляем $11 \equiv 3 * X \bmod 7$, $18 \equiv 3 * X \bmod 7$, $6 \equiv X \bmod 7$. Откуда одно из решений сравнения X=6. Общее решение $X = 6 + t * 7$.

У п р а ж н е н и я

Найти общие решения следующих сравнений:

а) $8 \equiv 3X \bmod 11$;

б) $25 \equiv 15\, X \bmod 17$;

в) $3(24-18)/5 \equiv 7X \bmod 19$;

г) $8^{125} - 6^{29} \equiv 5X \bmod 7$;

д) $(18^{24} + 20^{83}) / (21^{6}) \equiv 23^{3} X \bmod 19$;

е) $10^{112} + 12^{58} \equiv 2X \bmod 11$.

1.4. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель

Пусть имеется n целых чисел: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Общим кратным этих чисел называется целое число, которое делится нацело на каждое из этих чисел. Наименьшее из этих общих кратных называется наименьшим общим кратным чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ и обозначается НОК $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ или $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$.

Пусть имеется n целых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Общим делителем этих чисел называется число, которое нацело делит каждое их этих чисел. Среди делителей имеется наибольшее число, которое называется наибольшим общим делителем НОД $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ или $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

1.5. Простые числа. Разложение на простые сомножители. Каноническая форма числа

Число, которое не имеет никаких делителей, кроме 1 и самого себя, называется простым числом. Примеры простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, …

Любое число N может быть представлено в виде произведения степеней простых чисел (каноническое представление числа). Такое представление единственно (с точностью до перестановки сомножителей). Так, число $600 = 2^3 3^1 5^2$.

Для представления числа N в канонической форме можно использовать следующий алгоритм. Число N делим на наименьшее простое число 2 до тех пор, пока оно делится нацело, затем на 3, на 5 и т. д.

Например, $N = 10500$.

10500 : 2 = 5250; 5250 : 2 = 2625. Это число больше не делится на 2 нацело. Делим его на 3. 2625 : 3 = 875. Это число на 3 нацело не делится. Делим его на 5. 875 : 5 = 175. Еще раз делим на 5. 175 : 5 = 35. Еще раз делим на 5. 35 : 5 = 7. Число 7 – простое число, поэтому окончательно имеем в канонической форме: $10500 = 2^2 3^1 5^3 7^1$.

1.6. Определение НОК И НОД чисел

Для произвольного целого числа a и произвольного целого положительного числа b существуют такие числа t и r, что

$$a = bt + r, \text{ где } 0 \le r < b.$$

Причем такое представление единственное.

Можно показать, что

– если $b \mid a$ (b делит a нацело), то $(a, b) = b$ и

– если $a = bt + r$, то $(a, b) = (b, r)$.

Для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел a и b известен алгоритм Эвклида.

Пусть $a \ge b$. Рассмотрим следующую последовательность равенств:

$$\begin{aligned}
&a = bt_1 + r_2 && 0 < r_2 < b.\\
&b = r_2 t_2 + r_3 && 0 < r_3 < r_2.\\
&r_2 = r_3 t_3 + r_4 && 0 < r_4 < r_3.\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&r_{n-1} = r_n t_n + r_{n+1} && 0 = r_{n+1}.
\end{aligned}$$

Поскольку $a \geq b > r_2 > r_3 > \ldots \geq 0$, то алгоритм имеет конечное число шагов. Согласно указанным свойствам $(a, b) = (b, r_2) = (r_2, r_3) = \ldots = r_n$.

Таким образом, наибольший общий делитель чисел a и b равен последнему ненулевому остатку в последовательности равенств, т. е. r_n.

А наименьшее общее кратное a и b равно:

$$[a, b] = ab/(a, b).$$

Упражнения

Используя алгоритм Эвклида, найти НОК и НОД чисел:

а) 575 и 155;

б) 840 и 188650;

в) 4851 и 29106;

г) 975 и 616.

Если два числа N_1 и N_2 представлены в канонической форме соответственно

$$N_1 = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots \ p_s^{n_s},$$
$$N_2 = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s},$$

то НОК $(N_1, N_2) = p_1^{\max(n_1, m_1)} p_2^{\max(n_2, m_2)} p_s^{\max(n_s, m_s)}$,
а НОД $(N_1, N_2) = p_1^{\min(n_1, m_1)} p_2^{\min(n_2, m_2)} p_s^{\min(n_s, m_s)}$

Если в каноническом представлении одного из чисел отсутствует какой-либо простой сомножитель, его можно ввести в нулевой степени.

Например, для чисел $N_1 = 2^3 5^2 7^1$ и $N_2 = 3^1 5^1 11^2$, прежде чем находить НОК и НОД требуется их привести к одинаковой форме, т. е. сделать так, чтобы в каноническом представлении обоих чисел присутствовали бы одинаковые простые числа в соответствующих степенях, а именно

$$N_1 = 2^3 3^0 5^2 7^1 11^0;$$
$$N_2 = 2^0 3^1 5^1 7^0 11^2.$$

Тогда

$$\text{НОК}\,(N_1, N_2) = 2^3 3^1 5^2 7^1 11^2 = 508200;$$
$$\text{НОД}\,(N_1, N_2) = 2^0 3^0 5^1 7^0 11^0 = 5.$$

Упражнения

Найти НОК и НОД для пар чисел:

а) $N_1 = 440$, $N_2 = 6050$;

б) $N_1 = 234$, $N_2 = 4125$;

в) $N_1 = 66550$, $N_2 = 40131$;

г) $N_1 = 388$, $N_2 = 1647$.

Приведенный алгоритм легко обобщается на произвольное количество чисел, для которых требуется определить НОК и НОД.

Упражнения

Найти НОК и НОД для следующих наборов чисел:

а) $N_1 = 60$, $N_2 = 350$, $N_3 = 495$;
б) $N_1 = 265$, $N_2 = 104$, $N_3 = 93$;
в) $N_1 = 2100$, $N_2 = 630$, $N_3 = 5880$, $N_4 = 9450$;
г) $N_1 = 700$, $N_2 = 495$, $N_3 = 104$;
д) $N_1 = 103$, $N_2 = 260$, $N_3 = 121$.

1.7. Функция Эйлера φ (*m*)

Функция Эйлера $\varphi(m)$ определяется для всех целых чисел m как количество чисел ряда 1, 2, 3, …, m взаимно простых с m. Так, $\varphi(1) = 1$ (по определению), $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$ и т. д. Легко показать, что для $m = p$ – простых чисел $\varphi(p) = p - 1$. Для $m = p^n$ функция Эйлера $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$. Для произвольного числа m, представленного в канонической форме, $m = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s}$ функция Эйлера определяется следующим образом:

$$\varphi(m) = m(1-1/p_1)(1-1/p_2)\ldots(1-1/p_s).$$

Например, $\varphi(11) = 10$; $\varphi(9) = 6$; $\varphi(18) = 6$.

Упражнения

Вычислить функцию Эйлера $\varphi(m)$ для чисел m = 7, 12, 15, 17, 23, 24, 25, 28, 37, 54, 64.

1.8. Сравнимость чисел и классы вычетов

Выпишем все числа от 1 до 8 и вычеркнем все числа не взаимно простые с 8. Количество оставшихся чисел равно $\varphi(m=8) = 4$, а сами эти числа: (1, 3, 5, 7). Множество этих чисел обладает свойством замкнутости относительно операции умножения по модулю $m = 8$. Действительно, перемножая любые пары чисел из множества (1, 3, 5, 7) и находя наименьший положительный остаток по модулю $m = 8$, будем получать всегда одно из этих же чисел. Каждое их этих чисел порождает бесконечный счетный класс чисел:

$$1+8*t;\ 3+8*t;\ 5+8*t;\ 7+8*t,$$

где t – любое целое.

Более того, множество классов, порождающими элементами которых являются эти числа, обладает свойством замкнутости, а именно: при любых целых t произведение представителей классов (1+8*t; 3+8*t; 5+8*t; 7+8*t) дает в результате представителя одного из этих же классов.

Можно показать, что классы вычетов, получаемые в соответствии с функцией Эйлера, всегда образуют абелеву группу по умножению. А это, в частности, означает, что для любого представителя из этих классов можно найти обратный элемент из представителей этих же классов.

Упражнения

Постройте абелевы группы классов, порождаемые числами 10, 12, 15, 18, 21, 24, 25, 27, 28.

1.9. Теоремы Ферма и Эйлера

а) Теорема Ферма.

Если p – простое число и $(a, p)=1$, то $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Пусть $p = 23$, $a = 18$. Очевидно, что $(23, 18) = 1$, следовательно, $18^{22} \equiv 1 \bmod 23$. Проверить этот результат несложно. Для этого заметим, что $18 \equiv -5 \bmod 23$, поэтому можно написать эквивалентное сравнение

$$(-5)^{22} \equiv 1 \bmod 23 \text{ или } 5^{22} \equiv 1 \bmod 23.$$

Последнее сравнение можно представить в виде $(5^2)^{11} \equiv 1 \bmod 23$ и так как $25 \equiv 2 \bmod 23$, то $2^{11} \equiv 1 \bmod 23$.

Полученное сравнение элементарно проверяется : $2048 \equiv 1 \bmod 23$.

б) Теорема Эйлера.

Если $m > 1$ и $(a, m)=1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \bmod m$. Эта теорема обобщает теорему Ферма, так как при $m = p$, $\varphi(m = p) = p - 1$.

Пусть $m = 18$, $a = 5$. Очевидно, что $(5, 18) = 1$.

Функция Эйлера $\varphi(m = 18) = 6$. Поэтому $5^6 \equiv 1 \bmod 18$. Это сравнение проверяется достаточно просто:

$$5^2 \equiv 7 \bmod 18, \text{ следовательно, } ((5^2))^3 \equiv 7^3 = 343 \equiv 1 \bmod 18.$$

Упражнения

На основании теорем Ферма и Эйлера доказать справедливость сравнений:

$$2^{36} \equiv 3^{36} \equiv \ldots \equiv 36^{36} \equiv 1 \bmod 37;$$
$$2^{100} \equiv 3^{100} \equiv \ldots \equiv 100^{100} \equiv 1 \bmod 101;$$
$$2^8 \equiv 4^8 \equiv 7^8 \equiv 8^8 \equiv 11^8 \equiv 13^8 \equiv 14^8 \equiv 1 \bmod 15.$$

1.10. Показатели чисел по модулю и примитивные корни

Пусть $(a, m) = 1$. Рассмотрим бесконечную последовательность степеней числа a: $a^0 = 1, a^1, a^2, a^3, \ldots$ В соответствии с теоремой Эйлера существует целое положительное число s, такое, что

$$a^s \equiv 1 \bmod m. \qquad (1)$$

В самой теореме $s = \varphi(m)$. Могут существовать и другие целые положительные числа s, удовлетворяющие этому сравнению. Наименьшее из них обозначается e и называется показателем числа a по модулю m. Иногда e называют порядком числа a по модулю m.

Набор степеней числа a вида: $a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots, a^{e-1}$ попарно не сравнимы между собой по модулю m. Докажем это. Пусть, например, при некоторых n_1 и n_2 выполняется сравнение

$$a^{n_1} \equiv a^{n_2} \bmod m,$$

где для определенности $n_1 < n_2 < e$. Умножим обе части сравнения на a^{e-n_2}, тогда получим: $a^{(e+n_1-n_2)} \equiv 1 \bmod m$. Но поскольку $n_1 < n_2$, то в левой части сравнения степень числа a меньше e, что противоречит тому, что e – наименьшее число, удовлетворяющее сравнению (1).

Если найдется некоторое k, такое, что

$$a^k \equiv 1 \bmod m,$$

то e является делителем k. Очевидно, что всегда e является делителем $\varphi(m)$.

Пример. Возьмем $m = 45$, $a = 2$, $(45, 2) = 1$. Функция Эйлера $\varphi(45) = 24$. Следовательно, $2^{24} \equiv 1 \bmod 45$. Число 24 представляется в канонической форме в виде: $24 = 2^3 3$, т. е. имеет 8 разных делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Проверка показывает, что наименьшее число $e = 12$, так как $2^{12} \equiv 1 \bmod 45$.

Если показатель e числа a по модулю m равен $\varphi(m)$, то a называют примитивным элементом по модулю m.

Пример. По каким модулям число $a = 2$ является примитивным элементом ?

$m = 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19$.

1.11. Конечные поля (поля Галуа)

В пособии [3] приведены определения математических моделей с одним классом объектов: групп, колец и полей. Не надеясь на то, что студенты хорошо знакомы с этими определениями, повторим их.

Пусть на множестве U с элементами a, b, c, …задана бинарная операция “*” так, чтобы множество было замкнуто относительно этой операции. Кроме того, пусть на множестве с бинарной операцией выполняется набор аксиом:

– *Ассоциативности*: для любых элементов множества результат применения операции * к трем (или большему) числу элементов не зависит от порядка расстановки скобок, т. е. $a*b*c = (a*b)*c = a*(b*c)$.

– *Наличие в множестве нейтрального элемента*: в множестве U имеется элемент $\boldsymbol{e}$ такой, что $a*e = e*a = a$.

– *Наличие обратного элемента*: для любого элемента a множества U существует элемент условно обозначаемый a^{-1} и называемый обратным к a элементом, такой, что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Если на множестве с операцией выполнены все три аксиомы, то пара (U, *) называется группой. Если выполнены только две первые аксиомы, то пара (U, *) называется полугруппой с единицей. Поскольку мы будем рассматривать только полугруппы с единицей, мы их будем называть просто полугруппами.

Возможно выполнение и 4-й аксиомы, которая называется аксиомой *коммутативности* : для любой пары элементов, например, a и b множества U справедливо равенство $a * b = b * a$. При выполнении всех 4-*х* аксиом пара (U, *) называется коммутативной (или абелевой) *группой.*

Пусть на множестве U заданы две операции типа сложения и типа умножения. Запишем это так: (U, “+”, “*”).

Если пара (U, +) – коммутативная группа с нейтральным элементом $e = 0$, а пара (U/0, *) – полугруппа, где U/0 обозначает множество с “выколотым” нулем, то тройка (U, “+”, “*”) – кольцо.

Пусть на множестве U заданы две операции типа сложения и типа умножения: (U, “+”, “*”).

Если пара (U, +) – коммутативная группа с нейтральным элементом e =0, а пара (U/0, *) –группа, то тройка (U, “+”, “*”) –поле.

П р и м е р . Пусть U содержит элементы 0, 1, 2, 3, 4; операция типа сложения – сложение по модулю 5; операция типа умножения – умножение по модулю 5. Тогда тройка (U, $\oplus$ mod 5, $\otimes$ mod 5) есть поле.

Можно показать, что такое числовое конечное поле (поле с конечным числом элементов) существует только при операциях сложения и умножения по модулю p, где p – простое число. Такие поля называются числовыми конечными полями Галуа и обозначаются GF(p) или F(p).

Примеры

1. Построить конечные поля F(2), F(3), F(7). Для решения этих примеров указать все элементы множества U, найти нейтральные и обратные элементы для групп по сложению и умножению с соответствующим модулем.

2. Показать, что не существует полей F(6), F(12), F(15).

Поля Галуа можно построить в совершенно другой форме, а именно как поля многочленов по модулю некоторого неприводимого многочлена над числовым полем F (p). В этом случае порядок поля (число его элементов) равен p^h, где p – простое; h– целое.

Пусть F(p) – числовое поле Галуа порядка p. Рассмотрим множество многочленов вида:

$f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_k X^k$, где $a_i \in$ F(p), i = 0, 1, 2, 3…, k.(1)

Таким образом, коэффициенты принимают значения из F(p), операции сложения и умножения чисел выполняются по mod p. Если $a_k \neq 0$, то многочлен $f(X)$ имеет степень k. Множество всех многочленов, имеющих степень k и меньше будем обозначать $F^{(k)}[X]$.

Введем операции сложения и умножения многочленов над полем F(p) следующим образом. Пусть $f(X) = \sum f_i X^i$ и $g(X) = \sum g_i X^i$. Тогда

$$f(X) + g(X) = \sum_i (f_i + g_i) X^i;$$

$$f(X)g(X) = \sum_i \left(\sum_{j=0}^{i} f_i g_{i-j} \right) X^i.$$

Например, пусть $f(X) = f_0 + f_1 X$; $g(X) = g_0 + g_1 X + g_2 X^2$.
Тогда: $f(X) + g(X) = (f_0 + g_0) + (f_1 + g_1) X + g_2 X^2$;

$$f(X) * g(X) = (f_0 g_0) + (f_0 g_1 + f_1 g_0) X + (f_1 g_1 + f_0 g_2) X^2 + f_1 g_2 X^3.$$

Из примера видно, что при сложении степень результирующего многочлена равна максимальной степени слагаемых, а при умножении – сумме степеней перемножаемых многочленов.

Упражнения

Сложить и перемножить следующие пары многочленов:

а) $f(X) = f_0 + f_1 X + f_2 X^2$; $g(X) = g_0 + g_1 X + g_3 X^3$.

б) $f(X) = f_1 X + f_2 X^2 + f_5 X^5$; $g(X) = g_0 + g_1 X^1 + g_4 X^4$.

в) $f(X) = f_1 X + f_2 X^2 + X^5$; $g(X) = g_0 + g_1 X^3 + g_2 X^4$.

А теперь сделать то же самое, если указано числовое поле (модуль):

г) $f(X) = 2X + 3X^2 + X^5$; $g(X) = 4 + 2X^3 + X^4$, $p = 7$.

д) $f(X) = 3X + 2X^2 + 2X^5$; $g(X) = 2 + 4X^1 + 3X^4$, $p = 5$.

Если рассматривать многочлены всех возможных степеней F(X), то с такими операциями сложения и умножения множество многочленов образует кольцо.

Для любых двух многочленов $f(X)$ и $g(X)$ существует и притом единственные многочлены $a(X)$ и $r(X)$, такие, что

$$f(X) = a(X)g(X) + r(X),$$

где степень $g >$ степени r.

Переходя к сравнениям многочленов, получаем:

$$f(X) \equiv r(X) \bmod (g(X)) \qquad (2)$$

Деление многочленов производится так же, как и деление целых чисел. Следует только учитывать, что все операции выполняются в поле F(p).

Например, разделим многочлен $g(X) = 1 + X + X^2$ на $f(X) = 1 + X$ в поле F(2):

$$\begin{array}{l|l} (1 + X + X^2) & (1 + X) \\ \underline{\quad X + X^2 \quad} & \\ 1 & X \end{array}$$

В результате получим: $(1 + X + X^2) : (1 + X) = X$, при этом в остатке будет 1. Для деления удобнее записывать многочлены в обратном порядке, начиная со старшей степени. При вычислении в поле F(2) операция сложения имеет специальное обозначение “$\oplus$ “и называется “сложение по модулю 2 “

Упражнения

Найти остатки от деления многочленов:

1. $X^5 \oplus X^2 \oplus X$ на $X^3 \oplus X^2 \oplus X \oplus 1$ в поле F(2)(0).

2. $2X^4 + X^2 + 2$ на $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ в поле F(3) ($2X^2$).

Если в (2) остаток $r(X) = 0$, то говорят, что $g(X)$ делит $f(X)$. Если в F (X) нет ни одного многочлена степени большей 0, который бы делил $f(X)$ без остатка, за исключением скалярных кратных $f(X)$, т. е. многочленов вида: $bf(X)$, где $b \in$ F(p), то многочлен $f(X)$ называется *неприводимым*.

Найдем неприводимые многочлены некоторых малых степеней над полем F(2).

Имеется два многочлена первой степени: $X \oplus 1$ и X. По определению они оба считаются неприводимыми.

Многочлен второй степени вида $X^2 \oplus aX \oplus b$ будет неприводимым над полем F(2), если он не будет делиться ни на какой неприводимый многочлен первой степени, т.е. ни на $X \oplus 1$, ни на X. А это означает, что он не должен иметь корней в поле F(2). Таким образом: $F(0) = b \neq 0$, $F(1) = 1 \oplus a \oplus b \neq 0$. Откуда получаем, что $a = 1$, $b=1$, а сам неприводимый многочлен второго порядка имеет вид: $X^2 \oplus X \oplus 1$.

Многочлен третьей степени имеет общий вид: $X^3 \oplus aX^2 \oplus bX \oplus c$. Он будет неприводимым в поле F(2), если не будет делиться ни на один из неприводимых многочленов первой степени (проверять делимость на многочлен второй степени не требуется). Таким образом, должны выполняться условия: $F(0) = c = 1$, $F(1) = 1 \oplus a \oplus b \oplus 1 = 1$. Следовательно, либо a, либо b должны равняться 1, но не оба вместе, поэтому существуют два неприводимых многочлена третьей степени: $X^3 \oplus X^2 \oplus 1$ и $X^3 \oplus X \oplus 1$.

Приведем небольшую таблицу всех неприводимых многочленов над полем F(2), степень которых не превышает 4.

Максимальная степень многочлена	Неприводимые многочлены в поле F(2)
1	$X \oplus 1$; X.
2	$X^2 \oplus X \oplus 1$.
3	$X^3 \oplus X^2 \oplus 1$; $X^3 \oplus X \oplus 1$.
4	$X^4 \oplus X^3 \oplus X^2 \oplus X \oplus 1$; $X^4 \oplus X \oplus 1$; $X^4 \oplus X^3 \oplus 1$

Возьмем один из неприводимых многочленов степени 2 над числовым полем F(2), например $X^2 \oplus X \oplus 1$. При делении на этот многочлен все многочлены будут давать остатки (вычеты по модулю этого неприводимого многочлена). Приведем все виды остатков: $\{(0), (1), (X), (X \oplus 1)\}$. Каждый из этих остатков образует класс вычетов по модулю неприводимого многочлена, а их совокупность с операциями сложения и умножения по модулю неприводимого многочлена образует поле. Порядок этого поля (число элементов) в общем случае может быть равен

p^h, где p – простое; h – целое. В приведенном примере $p = 2$, $h = 2$ и порядок поля равен 4.

Упражнение

Постройте поля Галуа $F(2^3)$, $F(2^4)$ для пяти полиномов (многочленов), взятых из таблицы неприводимых полиномов.

Элемент поля α такой, что $F(\alpha) = 0$ называется корнем многочлена $f(X)$. В этом случае говорят, что уравнение $f(X)$ имеет корень в поле $F(p)$.

Упражнения

1. Найдите корни многочлена $X^2 + X + 1$ в полях F(2), F(3), F(5), F(7).

Покажем, как это сделать для поля F (5). В уравнение

$$X^2 + X + 1 = 0 \qquad (3)$$

будем последовательно подставлять значения элементов поля: 0, 1, 2, 3, 4.

В результате получим:

$$0^2 + 0 + 1 \equiv 1 \bmod 5;$$
$$1^2 + 1 + 1 \equiv 3 \bmod 5;$$
$$2^2 + 2 + 1 \equiv 2 \bmod 5;$$
$$3^2 + 3 + 1 \equiv 3 \bmod 5;$$
$$4^2 + 4 + 1 \equiv 1 \bmod 5;$$

т. е. этот многочлен не имеет корней в поле F(5). Однако он имеет корни в поле F(7). Действительно, при $X = 2$ и $X^2 = 4$ левая часть уравнения (3) обращается в 0.

2. Найдите корни многочлена $X^4 + X^3 + 1$ в тех же полях, что и в примере 1.

Конечное поле $F(p^h)$ содержит p^h элементов. Основное поле $F(p)$, которое является подполем поля $F(p^h)$, содержит p элементов (0, 1, 2, 3, ..., p –1) и 2 операции: $\oplus \bmod p$ и $\otimes \bmod p$.

Элемент α называется алгебраическим степени h над полем $F(p)$, если и только если α удовлетворяет в $F(p)$ уравнению: $P(x) = 0$, где $P(x)$ – многочлен степени h, но не удовлетворяет никакому уравнению с многочленом меньшей степени (α в этом случае может быть комплексным числом). Это влечет за собой неприводимость многочлена $P(x)$. Все p^h элементов поля $F(p^h)$ могут быть представлены в виде

$$\sum c_j \alpha^i ,$$

где $0 \le c_j \le p-1$; $0 \le i \le h-1$.

При вычислениях степень α^s, где $s \ge h$ заменяется на меньшую в соответствии с уравнением $P(\alpha) = 0$.

Пусть, например, $p = 3$, $h = 2$ и α удовлетворяет уравнению $x^2 - x - 1 = 0$. Элементы поля $F(3^2)$ можно выразить как

$$0, 1, 2, \alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, 2\alpha, 2\alpha + 1, 2\alpha + 2.$$

В вычислениях понижение степеней производится с использованием равенства $\alpha^2 = \alpha + 1$. Например, $(2\alpha + 1)(\alpha + 2) = 2\alpha^2 + \alpha + 4\alpha + 2 = 2(\alpha + 1) + 5\alpha + 2 = 7\alpha + 4 = \alpha + 1$.

Элемент $\beta \neq 0$ поля $F(p^h)$ называется образующей $F^*(p^h)$ мультипликативной группы ненулевых элементов поля $F(p^h)$, если степени β^i , $i = 1, 2, 3, ..., p^h - 1$ пробегают все ненулевые элементы поля $F(p^h)$. Образующая может рассматриваться как основание log. Такие логарифмы называются дискретными логарифмами. Рассмотрим, например, все 8 степеней (кроме нулевой) корня α в приведенном примере и запишем результат в виде таблицы:

ι	1	2	3	4	5	6	7	8
α^ι	α	$\alpha+1$	$2\alpha+1$	2	2α	$2\alpha+2$	$\alpha+2$	1

Из таблицы видно, что α является образующей. Эта таблица может быть представлена как таблица дискретных логарифмов. Для этого в верхней строке запишем упорядоченные элементы поля, а в нижней – значения степеней образующего элемента, при которых получаем данный элемент поля:

y	1	2	α	$\alpha+1$	$\alpha+2$	2α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$
$\log_\alpha y$	8	4	1	2	7	5	3	6

Считается, что вычисление дискретных логарифмов является трудной задачей, как и задача факторизации (разложения на множители), что является существенным в криптосистемах с открытым распределением ключей. Таблица логарифмов может использоваться для выполнения умножения и деления элементов поля. Заметим, что операции выполняются по модулю $p^h - 1$, в данном примере по модулю $3^2 - 1 = 8$. Для примера

$$\log((\alpha + 2)(2\alpha + 1)) = \log(\alpha + 2) + \log(2\alpha + 1) = 7 + 3 = 10 \equiv 2 \bmod 8,$$

что соответствует элементу $\alpha + 1$.

$$\log((\alpha + 1)/(2\alpha + 2)) = 2 - 6 = -4 \equiv 4 \bmod 8,$$

что соответствует элементу 2.

Можно проверить, что кроме элемента α образующими β также являются элементы $2\alpha + 1$, $\alpha + 2$ и 2α. Если $s = p^h - 1$ есть наименьшая, положительная степень, удовлетворяющая уравнению $\beta^s = 1$, то β является образующей. Поэтому число образующих элементов поля равно $\varphi(p^h-1)$, где φ – функция Эйлера. Для нашего примера $\varphi(8) = 4$.

Упражнения

Найдите количество образующих элементов для полей Галуа: $F(3^4)$, $F(5^2)$, $F(7^2)$, $F(11^5)$, $F(13^4)$.

1.12. Квадратичные вычеты. Символ Лежандра. Символ Якоби

Рассмотрим поле Галуа $F(p^h)$ при $p > 2$ и h – целом. Исключим из элементов поля нулевой элемент, а оставшееся множество обозначим $F^*(p^h)$. Если некоторый элемент $a \in F^*(p^h)$ есть квадрат некоторого элемента $x \in F^*(p^h)$, то a называют *квадратичным вычетом*, если же такого элемента x не найдется в $F^*(p^h)$, то a называют *квадратичным невычетом*.

Пример. Рассмотрим поле $F(3^2)$. Все элементы поля можно представить в виде: 0, 1, 2, α, $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, 2α, $2\alpha + 1$, $2\alpha + 2$, где α – корень некоторого неприводимого полинома степени 2 над полем $F(3)$. Возьмем в качестве такого полинома $P(X) = X^2 - X - 1$. Тогда $P(\alpha) = \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. При выполнении вычислений будем производить замену: $\alpha^2 = \alpha + 1$. $F^*(3^2)$ будет содержать все те же элементы кроме элемента 0, а именно: 1, 2, α, $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, 2α, $2\alpha + 1$, $2\alpha + 2$. Будем последовательно возводить в квадрат все элементы поля (кроме нулевого) и выявлять квадратичные вычеты:

$$1^2 = 1;\ 2^2 = 1;\ \alpha^2 = \alpha+1;\ (\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + 2\alpha+1 = \alpha + 1 + 2\alpha +1 = 2;$$
$$(\alpha + 2)^2 = \alpha^2 + 4\alpha+4 = (\alpha + 1) + 4\alpha+4 = 2\alpha + 2;\ (2\alpha)^2 = 4\alpha^2 = (\alpha + 1);$$
$$(2\alpha + 1)^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = \alpha+ 1 + 4\alpha + 1 = 2\alpha + 2;\ (2\alpha + 2)^2 =$$
$$=4\alpha^2 + 8\alpha + 4 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 2.$$

Таким образом, элементы 1, 2, $\alpha + 1$ и $2\alpha + 2$ являются квадратичными вычетами, а остальные элементы α, $\alpha + 2$, 2α и $2\alpha + 1$– квадратичными невычетами.

Упражнения

Найдите квадратичные вычеты и квадратичные невычеты в полях Галуа: $F(3^3)$, $F(5^2)$.

Пусть теперь $h = 1$. Рассмотрим поле $F(p)$ с элементами 0, 1, 2, ..., p–1. Если исключить элемент 0, то для остальных элементов поля можно также определить, являются они квадратичными вычетами или невычетами. Ясно, что элемент a, $1 \le a \le p - 1$ будет квадратичным вычетом по модулю p тогда и только тогда, когда выполняется сравнение:

$$x^2 \equiv a \bmod p,$$

где x также является элементом поля $F(p)$.

Рассмотрим пример. Пусть $p = 7$. Тогда $1^2 \equiv 1 \bmod 7$; $2^2 \equiv 4 \bmod 7$; $3^2 \equiv 2 \bmod 7$; $4^2 \equiv 2 \bmod 7$; $5^2 \equiv 4 \bmod 7$; $6^2 \equiv 1 \bmod 7$. Таким образом, квадратичными вычетами являются числа: 1, 2, 4. А квадратичными невычетами числа: 3, 5, 6.

Если a – квадратичный вычет по модулю p, полученный возведением в квадрат числа x, то это же число будет получено возведением в квадрат числа $-x \equiv p - x \bmod p$. Поэтому все квадратичные вычеты по модулю p можно найти возведением в квадрат чисел 1, 2, 3, ..., $(p - 1)/2$. Таким образом, для любого p имеется ровно $(p - 1)/2$ квадратичных вычетов и столько же квадратичных невычетов.

Упражнения

а) Найдите квадратичные вычеты и квадратичные невычеты по простым модулям $p = 11, 13, 17, 19, 23$.

Символ Лежандра для целого a и простого $p > 2$ определяется следующим образом

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } p \text{ делит } a; \\ 1, \text{ если } a - \text{квадратичный вычет по модулю } p; \\ -1, \text{ если } a - \text{квадратичный невычет по модулю } p. \end{cases}$$

Понятно, что a можно заменить любым целым числом, сравнимым с a по модулю p, при этом символ Лежандра не изменится. Вычисление символа Лежандра удобно производить по формуле

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{(p-1)/2} \bmod p.$$

Действительно,

$$\left(\frac{8}{5}\right) = 8^2 \in -1 \bmod 5.$$

Упражнения

Вычислите следующие символы Лежандра:

$$\left(\frac{7}{5}\right),\left(\frac{3}{7}\right),\left(\frac{11}{7}\right),\left(\frac{35}{11}\right),\left(\frac{169}{13}\right),\left(\frac{523}{13}\right).$$

Символ Якоби является обобщением символа Лежандра на случай произвольного нечетного модуля $n > 2$. Пусть число n представлено в канонической форме: $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_k^{s_k}$. Тогда символ Якоби определяется как произведение символов Лежандра:

$$\left(\frac{a}{n}\right)=\left(\frac{a}{p_1}\right)^{s_1}\left(\frac{a}{p_2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{a}{p_k}\right)^{s_k}.$$

Например, пусть $n = 363825 = 3^3 5^2 7^2 11^1$. Найдем символ Якоби для числа $a = 863$. Сначала найдем наименьший положительный вычет числа 863 по модулям $p = 3, 5, 7$ и 11.

$$863 \equiv 2 \bmod 3;\ 863 \equiv 3 \bmod 5;\ 863 \equiv 2 \bmod 7;\ 863 \equiv 5 \bmod 11.$$

Тогда символ Якоби можно вычислить следующим образом:

$$\left(\frac{863}{363825}\right)=\left(\frac{863}{3}\right)^3\left(\frac{863}{5}\right)^2\left(\frac{863}{7}\right)^2\left(\frac{863}{11}\right)^1=\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{7}\right)^2\left(\frac{5}{11}\right)^1$$

$(2^1 \equiv -1 \bmod 3)^3\ (3^2 \equiv -1 \bmod 5)^2\ (2^3 \equiv 1 \bmod 7)^2\ (5^5 \equiv 1 \bmod 11)^1 =$ $= (-1)(1)(1)(1) = -1$. Таким образом, число 863 является квадратичным невычетом по модулю 363825.

Для произведения чисел справедливо свойство мультипликативности:

$$\left(\frac{ab}{n}\right)=\left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right).$$

Тогда

$$\left(\frac{abb}{n}\right)=\left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right)=\left(\frac{a}{n}\right).$$

Для некоторых значений a символ Якоби вычисляется без перевода n в каноническую форму следующим образом

$$\left(\frac{1}{n}\right)=1;\left(\frac{-1}{n}\right)=(-1)^{(n-1)/2};\left(\frac{2}{n}\right)=(-1)^{(n^2-1)/8}.$$

При вычислении символа Якоби основное сведение выполняется на основе закона взаимности:

$$\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{(m-1)(n-1)/4}\left(\frac{n}{m}\right),$$

где m и n – нечетные числа большие 2.

Если не выполняется сравнение $m \equiv n \equiv 3 \bmod 4$, то

$$\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{n}{m}\right).$$

Если же это сравнение выполняется, то

$$\left(\frac{m}{n}\right)=-\left(\frac{n}{m}\right).$$

Пример. Определить, является ли число $a = 369$ квадратичным вычетом или квадратичным невычетом по модулю 247?

$369 \equiv 1 \bmod 4$, поэтому можно вычислить

$$\left(\frac{369}{247}\right)=\left(\frac{122}{247}\right)=\left(\frac{247}{122}\right)=\left(\frac{3}{122}\right)=\left(\frac{122}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)=-1.$$

Таким образом, 369 является квадратичным невычетом по модулю 247.

Упражнения

Определить символы Якоби в следующих случаях

$$\text{а)}\left(\frac{1815}{1683}\right)\quad \text{б)}\left(\frac{361}{5515}\right)\quad \text{в)}\left(\frac{2197}{625}\right).$$

Для криптографических систем представляет интерес случай, когда n является произведением двух простых чисел p и q, т. е. $n = pq$. Требуется определить, является ли некоторое число a квадратичным вычетом или квадратичным невычетом по модулю n? То есть существует ли такое x, что выполняется сравнение

$$x^2 \equiv a \bmod n.$$

Некоторое число a будет квадратичным вычетом по модулю $n = pq$, если и только если оно будет квадратичным вычетом как по модулю p, так и по модулю q. Если рассмотреть множество чисел: 1, 2, 3, ..., $n - 1$ и исключить из него все числа, кратные p и (или) q, то половина из оставшихся чисел будет удовлетворять условию:

$$\left(\frac{a}{n}\right)=1,$$

а вторая половина будет удовлетворять условию

$$\left(\frac{a}{n}\right)=-1.$$

Более того, из чисел a, удовлетворяющих условию

$$\left(\frac{a}{n}\right)=1,$$

половина будет квадратичными вычетами, а именно такие числа a, для которых

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a}{q}\right)=1.$$

Другая половина, для которых

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a}{q}\right)=-1,$$

будет квадратичными невычетами.

Пример. Пусть $p = 3$, $q = 5$, тогда $n = 15$. Квадратичными вычетами по модулю 15 будут числа $a = 1$ и 4. Квадратичными невычетами будут числа $a = 2$ и 8.

Если известно, что некоторое a является квадратичным вычетом по модулю $n = pq$, но простые числа p и q неизвестны, то решение сравнения (нахождение x из сравнения): $x^2 \equiv a \bmod n$ является важной, но очень сложной задачей в криптографии с открытым ключом.

2. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРИИ

2.1. Использование теории чисел при открытом распределении секретных ключей

Пусть два абонента A и B обмениваются информацией по открытому каналу. Для защиты передаваемой информации может быть использован ключ K, который должен быть как у абонента A, так и у абонента B и больше ни у кого.

Абонент A, передавая сообщение S (двоичная последовательность кодированных букв, цифр, знаков и т. п.) может закодировать его следующим образом: вместо того, чтобы передавать открытое сообщение S передаст сообщение $S \oplus K$, где $\oplus$ – булева операция сложения по модулю 2. Не зная ключа K, очень трудно расшифровать сообщение S. Если же ключ K известен, то расшифрование производится очень просто: достаточно к полученному сообщению $(S \oplus K)$ прибавить по модулю 2 значение ключа K. Однако мы же сталкиваемся с другой проблемой: как снабдить абонентов A и B секретным ключом K? Отправить курьера – дорого и опасно, поскольку курьера можно перехватить, отобрать секретный ключ или просто его купить. В связи с этим соображением в криптографии предполагается, что перехватчику информации известно все: и машины для шифрования, и коды. Неизвестным может быть только то, что очень хорошо охраняется (а это дорого) или что еще не успели украсть или купить.

Одна из идей криптографии с открытым ключом основана на трудностях логарифмирования сравнений. Так, если имеется равенство

$$a^x = b,$$

где a и b известно и требуется найти x, то значение x находится элементарно $x = \log b / \log a$.

Если же имеется сравнение:

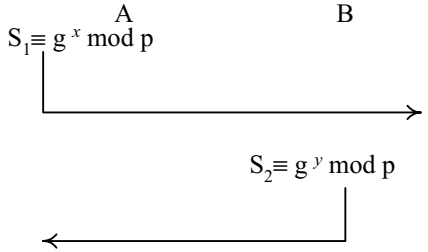
$$a^x \equiv b \bmod p,$$

где известны a, b и p, то для нахождения неизвестного x часто требуется произвести полный перебор.

Рассмотрим простейший протокол открытого обмена секретным ключом.

Пусть абонентам A и B известны некоторые значения g и p. Кроме того, известно, что ключ K получается возведением g в некоторую степень и нахождением остатка по модулю p. Это же известно и всем, кто пытается перехватить секретное сообщение и расшифровать его.

Протокол обмена оформим в виде следующей схемы:



Абонент A придумывает некоторое число x и, не сообщая его никому, находит значение S_1 и передает его по открытому каналу абоненту B. Абонент B одновременно с абонентом A придумывает некоторое число y и передает сообщение S_2 абоненту A. Затем каждый из абонентов возводит полученное сообщение в степень, которую придумал сам (A в степень x, B в степень y) и получают одинаковый ключ:

$$(S_2)^x \equiv g^{yx} \equiv (S_1)^y \bmod p,$$

т. е. общий ключ равен $K \equiv g^{xy} \bmod p$.

Недоброжелатели, которые могли бы перехватить S_1 и S_2, даже зная g и p, не смогут найти секретный ключ K, кроме как только путем перебора.

Приведем еще один пример протокола открытого обмена секретной информацией. Этот протокол носит имя одного из авторов Шамира.

Абонент A шифрует свое сообщение S, возводя в некоторую степень x и находя наименьший положительный остаток по модулю p:

$$S_1 \equiv S^x \bmod p$$

и передает сообщение абоненту B по открытому каналу.

Абонент B возводит S_1 в известную только ему степень y и находит наименьший положительный остаток $S_2 \equiv S^x{}_1 \equiv S^{xy} \bmod p$, после чего по открытому каналу передает S_2 абоненту A.

Абонент A "снимает свой ключ" следующим образом: $S_3 \equiv S^{-x}{}_2 \equiv S^y \bmod p$ и возвращает S_3 абоненту B. Абонент B "снимает свой ключ" аналогичным образом и получает исходный текст S.

Для "снятия" ключа можно воспользоваться теоремой Ферма или Эйлера. Так, в соответствии с теоремой Ферма $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$. Для

снятия ключа вместо возведения в степень $-x$ абонент А может возвести в степень $p-x-1$, а абонент В в степень $p-y-1$. В книге *Salomaa* [4] приводится хороший пример, иллюстрирующий метод Шамира.

Абонент А отправляет чемодан, с секретными документами абоненту В, закрывая его своим замком, ключ от которого есть только у А. Абонент В, получив чемодан, навешивает на него еще и свой замок, ключ от которого есть только у него и отправляет чемодан с двумя замками к А. Абонент А, получив чемодан, снимет свой замок и отправляет чемодан к В, который снимает свой замок и открывает чемодан с секретными документами.

В криптосистемах с открытым распределением ключей очень эффективно используются методы и теоремы теории чисел. Так, целый класс криптосистем, основанных на так называемых "рюкзачных векторах", использует поля полиномов Галуа $F(p^h)$. В этом случае плотность рюкзачных векторов оказывается максимальной, а секретность высокой.

Приведем простейший пример криптосистемы, основанный на идее "рюкзачных" векторов. Рюкзачным вектором называется упорядоченный набор чисел: $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. При зашифровании сообщения выбираются некоторые номера элементов рюкзачного вектора и суммируются значения соответствующих элементов. Эта сумма является элементом зашифрованного сообщения. Если в рюкзачном векторе элементов достаточно много, то решить обратную задачу (по сумме найти номера элементов) достаточно сложно. В то же время можно рассмотреть "сверхрастущие" векторы, в которых каждый следующий элемент больше суммы всех предыдущих. Например, такой вектор: (2, 3, 6, 12, 25, 49, 100). Если передаваемая сумма некоторых элементов равняется 89, то легальному получателю не представляет труда найти номера передаваемых элементов (и сами эти элементы): $6 + 12 + 25 + 49 = 89$. Но эту задачу также легко решит и перехватчик (криптоаналитик). Чтобы затруднить криптоаналитику задачу расшифрования можно сверхрастущий рюкзачный вектор изменить, например, по такому правилу: каждый элемент a_i умножается на некоторое целое число d, к результату прибавляется целое число c и вычисляется остаток по некоторому модулю n, т. е. $b_i \equiv da_i + c \bmod n$. Вычисленные значения b_i и являются элементами официально публикуемого рюкзачного вектора. Лазейкой для официального получателя являются значения d и c, с помощью которых он может свести задачу расшифрования к задаче со сверхрастущими векторами.

2.2. Линейные коды для коррекции ошибок при передаче сообщений

Одним из классов кодов, обнаруживающих или исправляющих ошибки при передаче сообщений в каналах связи, являются линейные коды. В качестве входного алфавита используются полиномы конечного поля Галуа GF(q), где $q = p^h$; p – простое число; h – целое. Если V_n – векторное пространство размерности n над полем GF(q), то подпространства размерности k пространства V_n называются p – ичными линейными кодами длины n с k информационными символами или (n, k) кодами. При $p = 2$ эти коды называются групповыми кодами.

Пример 1. Пусть число разных передаваемых символов равно 2^{n-1}, например, при передаче двоичных кодов десятичных цифр можно взять $n = 5$. Образуем двоичные последовательности вида: (x_1, x_2, x_3, …, x_{n-1}) и сопоставим каждую последовательность с одним из передаваемых символов. Сформируем еще один символ x_n по следующему правилу: $x_n = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}$, где операция "$\oplus$" означает сложение по модулю 2. Если при передаче сообщений произошла ошибка в каком-либо одном разряде, то сумма $x_n \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}$ станет четной, если была изначально нечетной или наоборот. Такая проверка позволяет обнаружить одиночную ошибку (вообще говоря, все ошибки нечетной кратности).

Пример 2. Пусть требуется передавать 16 различных сообщений (например, букв или символов). Закодируем эти сообщения 4-х разрядными двоичными кодами и поставим им в соответствие последовательность: x_3, x_5, x_6, x_7. Зарезервируем дополнительные разряды x_1, x_2, x_4 для контроля. Будем вычислять значения контрольных разрядов по следующему правилу

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем

$$x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0,\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0,\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0,$$

откуда легко находятся значения контрольных разрядов x_1, x_2, x_4.

Пусть передаваемое сообщение имело вид: 1011. Тогда значения контрольных разрядов определятся следующим образом

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_4 = 0.$$

Вместо сообщения 1011 будет передано сообщение: 0 1 1 0 0 1 1. Пусть теперь в результате одиночной ошибки сообщение при передаче исказится и станет равным: 0 1 1 0 0 0 1; т. е. исказился 6-й разряд сообщения. При проверке сообщения получаем двоичный код искаженного разряда: 1 1 0 (6-й разряд). Добавив по модулю 2 единицу в шестой разряд, мы исправим сообщение. Приведенный пример является совершенным кодом Хэмминга, который исправляет одиночные ошибки.

2.3. Управление роботами (перевод спектральных отсчетов из поля действительных чисел в поле Галуа F(p))

При решении задач дискретного спектрального анализа для управлении роботами возникает необходимость сжатия информации, представленной в виде системы функций управляющих воздействий. Кроме широко распространенных методов сжатия информации можно использовать дополнительные преобразования спектральных отсчетов из поля действительных чисел в поля Галуа F(p), где p – простое число. В этом случае сокращается количество разных значений отсчетов, все отсчеты становятся целыми числами и дополнительно появляются нулевые значения.

Пусть S(w) – спектральные отсчеты; w = 0, 1, 2, …, n–1, n – число дискретных значений функции $f(t)$; w – частота (номер спектрального отсчета). В общем случае, S(w) принимают значения из поля комплексных чисел. Для спектральных базисов Уолша S(w) будут принимать значения из поля действительных чисел.

Для нахождения спектра функции по базису Уолша и Хаара можно воспользоваться алгоритмами быстрого преобразования [5], впервые предложенными Э. С. Москалевым в 1966 году (официально зарегистрированными американцами в 1968 году).

Пусть задана некоторая дискретная числовая функция $f(t)$ на 2^m наборах аргумента. При m=3 число дискретов функции $2^3 = 8$. Спектральные отсчеты имеют вид: $s/2^m$, где $0 \le |s| \le 2^m - 1$, где $|s|$ – модуль числа

s. Для перевода значений спектральных отсчетов из поля действительных чисел в поле Галуа требуется решить сравнения вида

$$s\ /2^m \equiv x \bmod p.$$

Если $p > |s|$, то сравнение всегда имеет решение. Пусть, например, $s = 7$, $m = 4$, $p = 11$, Тогда получаем сравнение $7/16 \equiv x \bmod 11$. Обе части сравнения умножаем на 16, получаем эквивалентное сравнение: $7 \equiv 16\ x \bmod 11$. К левой части сравнения прибавляем модуль 11 : $18 \equiv 16\ x \bmod 11$. Обе части сравнения делим на 2: $9 \equiv 8\ x \bmod 11$. Опять к левой части сравнения прибавляем модуль: $20 \equiv 8\ x \bmod 11$. Делим обе части сравнения на 4: $5 \equiv 2\ x \bmod 11$. Прибавляем к левой части сравнения модуль: $16 \equiv 2\ x \bmod 11$. Делим обе части сравнения на 2 и получаем решение: $x \equiv 8 \bmod 11$.

П р и м е р ы .

Произвести преобразование спектральных отсчетов из поля действительных чисел в поля Галуа при следующих значениях параметров:

а) $s = 18$, $m = 4$, $p = 19$;
б) $s = 20$, $m = 5$, $p = 23$;
в) $s = 0$, $m = 3$, $p = 7$;
г) $s = -15$, $m = 4$, $p = 19$.

2.4. Арифметические коды

Арифметические коды (или AN коды) предназначены для коррекции ошибок при выполнении арифметических операций. Код определяется значением A, а слова из диапазона 0, 1, 2, …, N–1 кодируются умножением на A.

Вектор одиночной ошибки представляет собой величины +1 или –1, которые арифметически складываются с кодовым словом (с учетом переносов в отличие от ошибок в каналах связи). Для того чтобы код, порождаемый числом A длины n, исправлял одиночные арифметические ошибки необходимо и достаточно, чтобы не выполнялось сравнение

$$2^s \equiv 2^k \bmod \mathrm{A},$$

где $s \neq \mathrm{k}$; s, $\mathrm{k} \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Из подразд. 1.11 следует, что если e – показатель числа 2 по модулю A, то число A порождает арифметический код длины $n = e$, исправляющий одиночные ошибки. Совершенный арифметический код, исправляющий одиночные ошибки, может быть получен, если 2 является прими-

тивным корнем по модулю A, причем A в этом случае должен являться простым числом.

Могут быть построены арифметические коды, исправляющие ошибки более высокой кратности, однако их анализ затруднителен. Так, для того чтобы число A порождало код, исправляющий арифметические ошибки кратности t длины n, необходимо и достаточно, чтобы не выполнялось сравнение:

$$2^{s_1}2^{s_2}\ldots2^{s_t} \equiv 2^{k_1}2^{k_2}\ldots2^{k_t} \bmod A, \qquad (4)$$

где все $s_1, s_2, \ldots, s_t, k_1, k_2, \ldots, k_t$ – различные числа в диапазоне от 0 до $n-1$.

Единственным результатом, который позволяет строить длинные арифметические коды с большим кодовым расстоянием, удовлетворяющие условию (4), является набор теорем, доказанных И.Л. Ерошем и С. Л. Ерошем в 1967 г. [6].

П р и м е р ы . Определите длины арифметических кодов, исправляющих одиночные ошибки, порождаемые числами A = 7, 9, 11, 19, 23, 25, 27, 29.

2.5. Использование теории чисел при распознавании образов (определении ориентации деталей)

При решении задач распознавания образов кроме идентификации объектов часто требуется еще определять их параметры положения. Так, при распознавании деталей для операций автоматической сборки промышленными роботами в некоторых случаях требуется определять их угловое положение на плоскости. Для этого изображение детали проецируется в вершины правильного многоугольника, описанного, например, вокруг центра формы детали. После чего вычисляется спектр по базису Крестенсона (дискретный вариант базиса Фурье при количестве дискретов, равном простому числу или степени простого числа). Модуль спектра является характеристикой, инвариантной к смещениям и поворотам детали на плоскости. По модулям спектральных отсчетов проводится идентификация путем сравнения с эталоном. Для определения угла ориентации детали используется следующая процедура [7].

Спектр функции формы $F(\varphi)$, заданной в вершинах правильного многоугольника, состоит из действительной и мнимой части:

$$S_F(w) = A(w) + jB(w),\ w - \text{частота}.$$

Каждый спектральный отсчет характеризуется модулем и фазой, которая вычисляется следующим образом:

$$\alpha = \text{arctg } B(\omega)/A(\omega).$$

Фаза содержит информацию об угле поворота детали относительно опорного положения.

Пусть для некоторого эталонного положения объекта вычислен спектральный отсчет $S(\omega_0) = A(\omega_0) + jB(\omega_0)$, $\omega_0 \neq 0$. Тогда опорный угол определится выражением

$$\alpha_0 = \text{arctg } B(\omega_0)/A(\omega_0)$$

Если изображение детали повернуто на дискретный угол β, то функция формы $F(\varphi)$ сдвигается на β дискретов, спектральные отсчеты поворачиваются на $w\beta$ дискретов в противоположную сторону.

Угол поворота детали относительно опорного положения определится из выражения $2\pi(\alpha_0 - \omega\beta)/p = \alpha 2\pi/p$.

Поскольку p – простое число, при любом $w \neq 0$ угол поворота определяется как наименьшее положительное целое, удовлетворяющее сравнению: $\beta \equiv (\alpha_0 - \alpha)/\omega \bmod p$. Например, пусть начальное положение спектрального отсчета при $\omega = 5$ равно $\alpha_0 = -2$, а после поворота детали на неизвестный угол β равно $\alpha = 7$. Если число дискретов $n = 23$, то для нахождения β решаем сравнение: $\beta \equiv (-2 - (7))/5 \bmod 23$. Эквивалентное сравнение имеет вид: $5\beta \equiv -9 \bmod 23$. Далее получаем $5\beta \equiv 14 \bmod 23$, $5\beta \equiv 60 \bmod 23$, $\beta \equiv 12 \bmod 23$, т. е. деталь повернута на 12 дискретов относительно опорного положения.

П р и м е р . Вычислите угол поворота детали при следующих значениях угловых положений спектральных отсчетов, модулей p и частот ω:

№ варианта	α_0	α	ω	p
1	3	–7	2	23
2	–5	11	4	19
3	–8	–19	3	29
4	21	2	5	23

Заключение

Еще 50 лет назад “Теория чисел” считалась одним из “чистых” разделов математики, “не запятнавших” себя какими-либо техническими приложениями. Этот раздел математики изучался только на механико-математических факультетах университетов, в технических вузах не вводились даже элементарные понятия этой красивой и очень перспективной теории. В настоящее время разделы “Теории чисел” используются в самых разнообразных технических приложениях. Одним из первых приложений этой теории явилось ее использование при построении линейных кодов для коррекции ошибок в каналах связи и кодов для контроля арифметических операций. Следующим шагом явилась идея Э. С. Москалева об использовании полей Галуа для сжатия информации при спектральных преобразованиях [5]. И, конечно, главным применением результатов “Теории чисел” явилось ее использование с середины 70-х годов для построении криптосистем с открытым ключом. Сейчас трудно себе представить инженера – системотехника или инженера-программиста, не владеющего хотя бы азами этой теории.

Библиографический список

1. *Виноградов И. М*. Основы теории чисел. М.: Наука, 1965. 172с.

2. *Касами Т.* и др. Теория кодирования: Пер. с японского. М.: Мир. 1978. 576 с.

3. *Ерош И. Л.* Основы теории конечных групп преобразований: Учеб. пособие / СПбГУАП. СПб., 1999. 38 с.

4. *Salomaa Arto* Public-Key Criptography. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barselona: Springer-Verlag. 1990. (Пер. с англ. *Арто Саломаа.* Криптография с открытым ключом: М.: Мир. 1995). 364 с.

5. *Москалев Э. С*., *Карповский М. Г*. Спектральный анализ и синтез дискретных устройств. М.: Энергия, 1972. 124 с.

6. *Ерош И. Л*., *Ерош С. Л*. Арифметические коды с исправлением многократных ошибок//Проблемы передачи информации. 1967. № 3. Вып. 4. С. 72–80.

7. *Ерош И. Л.* Применение преобразований Крестенсона для определения параметров положения объектов по плоским проекциям//Техническая кибернетика. 1981. № 3. С. 46–52.

Оглавление

Учебное издание

Ерош Игорь Львович

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Учебное пособие

Редактор *В. П. Зуева*
Компьютерная верстка *М. С. Вотяковой*

Лицензия ЛР №020341 от 07.05.97. Сдано в набор 20.12.00. Подписано к печати 14.03.01. Формат 60×84 1/16. Бумага тип. №3. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,86. Усл. кр.-отт. 1,98. Уч. -изд. л. 2,0. Тираж 100 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел
Лаборатория компьютерно-издательских технологий
Отдел оперативной полиграфии
СПбГУАП
190000, Санкт-Петербург, ул. Б. Морская, 67