

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
Физико-технический факультет
Кафедра технической физики

Б. Т. ПОРОДНОВ

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

ЧАСТЬ 1. ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Учебное пособие

Научный редактор канд. физ.-мат. наук Б. А. Калинин

Екатеринбург
УрФУ
2010

УДК 530.1(075.8)

ББК 22.25я73

П59

Рецензенты: заведующий кафедрой общей и молекулярной физики Уральского государственного университета, проф., д - р физ. - мат. наук С. Ф. Борисов; ведущий научный сотрудник Института теплофизики Уральского отделения Российской академии наук, проф., д-р. физ.-мат. наук В. Н. Скоков

Породнов Б. Т.

П59 МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД. Часть I. Теория упругости:
учебное пособие / Б. Т. Породнов. – Екатеринбург: УрФУ, 2010. 84 с.

ISBN 978-5-321-01872-9

Учебное пособие для студентов кафедры технической физики физико-технического факультета УрФУ подготовлено в соответствии с рабочими программами дисциплин «Механика сплошных сред» и «Гидрогазодинамика». Содержит разделы: кинематика сплошной среды, тензор напряжений, закон Гука, а также фундаментальную замкнутую систему уравнений сохранения движущейся сплошной среды. В приложении приведены основные сведения о пластических деформациях.

Библиогр.: 15 назв. Рис. 15. Табл. 1.

УДК 530.1(075.8)

ББК 22.25я73

ISBN 978-5-321-01872-9

© УрФУ, 2010

© Породнов Б. Т., 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
1. ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ СПЛОШНЫХ СРЕД	6
1.1. Модели механического движения.....	6
1.2. Бесконечно малые в МСС. Пределы применимости МСС	7
1.2.1. Элемент объёма в МСС	8
1.2.2. Малый промежуток времени в МСС.....	11
2. КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ.....	12
2.1. Деформация	12
2.2. Тензор поворота.....	14
2.3. Тензор деформации	16
2.3.1. Изменение объёма тела при деформации	17
2.3.2. Геометрические свойства линейных деформаций.....	18
2.3.3. Эллипсоид деформации.....	20
2.4. Температурная деформация	21
2.5. Теорема Коши-Гельмгольца	22
3. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ	24
3.1. Силы массовые, объёмные и поверхностные.....	24
3.1.1. Массовые силы	24
3.1.2. Силы поверхностные	24
3.1.3. Тензор напряжений	26
3.2. Результирующая сила, действующая на единицу единицу объёма тела	28
4. ТЕРМОДИНАМИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ	30
4.1. Работа сил внутренних напряжений	30
4.2. Основное термодинамическое равенство	31
5. ЗАКОН ГУКА	33
5.1 Свободная энергия деформируемого тела	33
5.2. Закон Гука	35
5.3. Однородная деформация тела.....	37
5.3.1. Растяжение стержня.....	37
5.3.2. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона – феноменологические коэффициенты	38
5.4. Свободная энергия неизотермического деформирования.....	41
5.4.1. Тензоры деформаций и напряжений при неизотермическом деформировании	41
5.4.2. Адиабатические и изотермические модули.....	42

6. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ	45
6.1. Тензор скоростей деформации.....	45
6.2. Дифференцирование по времени интеграла по подвижному объёму	46
6.3. Уравнение непрерывности	46
6.3.1. Различные формы уравнения непрерывности	46
6.3.2. Интегральная и дифференциальная форма уравнения непрерывности с источниками и стоками	48
6.4. Уравнение сохранения количества движения	49
6.4.1. Вывод уравнения сохранения количества движения.....	49
6.4.2. Субстанциональное и локальное описание движения	50
6.5. Уравнение сохранения момента количества движения сплошной среды	51
6.6. Тензор плотности потока импульса.....	54
6.7. Уравнение сохранения внутренней энергии.....	55
6.8. Вектор плотности потока полной энергии. Вектор Умова – Пойтинга.....	57
6.9. Фундаментальная замкнутая система уравнений движения сплошной среды.....	59
6.10. Тензор вязких напряжений.....	62
6.11. Модели сплошных сред	64
6.11.1. Твердое тело.....	64
6.11.2. Жидкость	65
6.11.3. Газы.....	65
6.11.4. Релаксация напряжений.....	65
6.12. Упругие волны	66
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	70
ПРИЛОЖЕНИЕ. ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ	71
П 1. ПРЕДМЕТ РЕОЛОГИИ	71
П 1.1. Вязкоупругость.....	71
П 1.2. Полимерные вещества	72
П 1.3. Пластические деформации. Дислокации и вакансии	73
П 1.4. Эффект памяти формы	74
П 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭФФЕКТА ПАМЯТИ ФОРМЫ	77
П 3. МАТЕРИАЛЫ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ	78
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК П	83

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном учебном пособии изложены основные закономерности при движении сплошных сред и соответствующие уравнения сохранения, наиболее распространённые методы их решения, описывающие широкий круг физических явлений и практических задач движения жидкостей и газов с до- и сверхзвуковыми скоростями при наличии пограничных слоёв и турбулизации потока. В последней главе представлены основные закономерности при движении плазмы.

Учебное пособие соответствует утверждённой учебной программе и предназначен для студентов физико-технологического института, студентам специальностей и специализаций физического профиля других факультетов, а также аспирантам, бакалаврам и магистрам физических и физико-химических специальностей университета

В основу данного пособия положены лекции, которые были прочитаны в 1960-х-начале 70-х гг. студентам кафедры молекулярной физики заведующим этой кафедры, профессором, доктором физико-математических наук Суетиным Паригорием Евстафьевичем. Некоторые лекции и части разделов неоднократно читались студентам других кафедр физико-технического и других факультетов университета доцентом, кандидатом технических наук Ивакиным Борисом Александровичем и доцентом, кандидатом физико-математических наук Калининным Борисом Алексеевичем.

Компьютерный вариант конспекта лекций подготовлен совместно со студентами кафедры молекулярной физики В. А. Дублёных и Д. В. Румянцевым.

1. ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ СПЛОШНЫХ СРЕД

Механика сплошных сред (МСС) – раздел теоретической физики, в котором изучаются свойства движения газов, жидких и твердых деформируемых тел, а также плазмы. Все перечисленные состояния вещества объединяют понятием *среда*.

1.1. МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

В развитии физики модели изучаемых явлений играют очень большую роль. Только построив и приняв определенную модель (желательно сначала наиболее простую), возможно описать явление математически и изучить главные, характерные и основные свойства изучаемого физического явления. Сравнение теоретически получаемых результатов с опытом подтверждает или отвергает адекватность построенной модели изучаемому явлению. Если характерные основные черты физического явления хорошо описываются принятой моделью, то предоставляется дальнейшая возможность для усложнения модели с целью описания более тонких деталей изучаемого явления. Если же сравнительно простая модель приходит в противоречие с опытом, то модель построена неправильно, что свидетельствует о нашем непонимании самого существа явления и необходимо или усложнить модель, или, что чаще всего, опираясь на экспериментальные факты, глубже вникнуть в физическую сущность явления и существенно изменить модель.

Изучение механического движения реальных тел по традиции начинается с *модели движения материальной точки*. Это самая простейшая модель движения реальных объектов. В этой модели предполагается, что основные свойства движения реальных тел можно изучить, не принимая во внимание их протяжённость и деформируемость. При этом математический аппарат, описывающий такую модель, наиболее прост. Физическое состояние тела характеризуется только его массой, а положение в пространстве – только тремя обобщёнными координатами. Однако даже при такой простейшей модели удалось изучить много основных черт движения реальных тел и установить фундаментальные законы движения: например, вывести законы сохранения количества движения и момента количества движения, законы сохранения механической энергии, законы движения центра масс системы частиц и т.д. На их основе изучены законы свободного падения тел, движения небесных объектов, решено много других задач, имеющих важное практическое значение. Кажется удивительным, что такая простейшая модель во многих случаях позволяет описать движение с очень большой точностью, как, например, в небесной механике.

Но в то же время существует достаточно много практических задач, которые не могут быть решены при помощи модели, игнорирующей размеры реальных тел (например, движение волчков, гироскопов и т.д.). Поэтому необходимо перейти к более сложной модели – *модели движения абсолютно твёрдого тела*, т.е. тела, которое имеет реальные размеры и в котором расстояние между любыми точками не изменяется в процессе движения. Это более сложная модель и математически сложнее. Для её описания необходимо знать не только массу тела, но и три её момента инерции относительно трёх взаимно-перпендикулярных осей. Положение же тела определяется уже не тремя, а шестью координатами, три из которых декартовы координаты какой-либо точки тела и три компоненты скорости или импульса тела в скоростном или импульсном пространстве, а также тремя *эйлеровыми* углами, которые определяют положение тела в пространстве. Это уже более реальная модель: она позволяет понять и рассчитать движение волчков и гироскопов, а также решить ряд других практических задач.

Тем не менее остается обширнейший класс явлений, которые не могут быть поняты и в рамках модели абсолютно твёрдого тела: например, движение жидкостей, газов и упругих тел, при котором расстояние между двумя точками явно и существенно изменяется в процессе движения. Этот факт является важным для описания большого круга явлений, окружающих нас и требующих своего практического решения.

Таким образом, приходим к ещё более сложной модели – *модели движения деформируемого тела*, являющейся предметом изучения механики сплошных сред. Усложнение предыдущей модели твёрдого тела заключается в том, что в процессе движения расстояния между любыми точками тела изменяются (тело *деформируется*). Конечно, с усложнением модели существенно усложняется и математический аппарат. В общем случае к имеющимся характеристикам движения абсолютно твёрдого тела необходимо будет добавить ещё девять, характеризующих деформацию тела в любой точке в процессе движения.

1.2. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ В МСС. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ МСС

Понятие *сплошная среда* также является некоторой физической моделью реальных тел. Хотя все физические тела состоят из отдельных молекул и атомов, масса которых сосредоточена в их ядрах, подавляющая часть пространства, занятого телом, "пустая" (действительно, размер ядра атома $\sim 10^{-12}$ см, а размер атома $\sim 10^{-8}$ см). В МСС предполагается, что вещество тела распределено непрерывно по его объёму и, например, плотность его является непрерывной функцией координат и времени. Будем полагать также, что и другие характеристики тела являются непрерывной функцией координат и

времени. Такая модель позволяет нам воспользоваться математическим аппаратом традиционного дифференциального и интегрального исчисления. Этот аппарат и модель сплошной среды заставляют физически определенно указать, что понимается под *бесконечно малыми* в МСС.

1.2.1. Элемент объёма в МСС

Изучая движение сплошной среды, будем разбивать её на некоторые малые части, в пределах которых все их физические характеристики можно считать примерно постоянными. Характеристики изменяются лишь при переходе от одной малой части среды к другой соседней части. Это изменение происходит непрерывно в зависимости от их координат и времени.

Ясно, что эта малая часть – элемент объёма ΔV – должна быть много меньше объёма рассматриваемого тела V с тем, чтобы можно было воспользоваться методами дифференциального исчисления. С другой стороны, этот элемент объёма все же должен быть достаточно большим, чтобы содержать достаточно большое число молекул вещества для того, чтобы все его физические характеристики имели бы смысл. В самом деле, если этот элемент объёма будет содержать мало молекул, то становятся неопределёнными такие характеристики вещества, как температура, давление и плотность в этом элементе объёма. Флуктуации этих характеристик будут столь большими, что мы не сможем сказать ничего достаточно определённого об их величине в данный момент времени в данной точке пространства, занятого телом.

Таким образом, требование, предъявляемое в МСС к элементу объёма ΔV , можно записать следующим образом. Пусть L есть характерный линейный размер тела (например, диаметр шара или длина ракеты). Тогда величина L^3 определяет порядок объёма тела. Далее, если l есть среднее расстояние между молекулами, то можно считать, что в объёме l^3 находится одна молекула. Если в 1 см^3 находится n молекул, то очевидно $l^3 \cdot n = 1 \text{ см}^3$ и тогда $l = n^{-1/3}$. Поэтому элемент объёма в механике сплошных сред должен удовлетворять следующему неравенству:

$$l^3 \ll \Delta V \ll L^3. \quad (1.1)$$

Нетрудно видеть, что понятие бесконечно малого объёма в МСС является понятием относительным. Например, в объёме $V = 1 \text{ см}^3$ при давлении 760 мм рт.ст. и температуре 293К находится количество молекул, определяемое числом Лошмидта и равное $N_o = 2,687 \cdot 10^{19}$ молекул/см³. Рассмотрим элемент объёма ΔV с размером ребра куба 0,1 мм. Тогда $\Delta V = 10^{-6} \text{ см}^3$. Размер молекул газа можно принять равным $l = 5 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Тогда элементарный объём имеет порядок 10^{-22} см^3 . Таким образом, в рассматриваемом случае получаем неравенство

$$l^3 = 10^{-22} \text{ см}^3 \ll \Delta V = 10^{-6} \text{ см}^3 \ll V = 1 \text{ см}^3.$$

Причем в элементе объёма ΔV содержится 10^{13} молекул, которых вполне достаточно для статистического определения давления и температуры, а также других макроскопических параметров газа.

Далее рассмотрим движение ракеты с характерным размером $L \sim 1$ м в межзвездном газе, состоящем из нейтральных атомов водорода. Если воспользоваться для описания этого движения методами МСС, то в качестве элемента объёма необходимо взять $\Delta V = 1 \text{ см}^3$. Тогда, естественно, выполняется правая часть неравенства (1.1), т.к. $\Delta V/L^3 \sim 10^{-6}$. Однако известно, что в выбранном элементе объёма межзвездного газа находится лишь одна частица и то лишь в среднем. Подавляющее время движения этот элемент объёма будет пустым. Очевидно, в этом случае невозможно определить в элементе объёма ΔV температуру и давление газа как непрерывную функцию координат и времени. Следовательно, использование методов МСС для описания движения ракеты в межзвездном газе является некорректным.

Рассмотрим аналогичный пример: движение Земли в межзвездном газе. Объём Земли по порядку величины равен $L^3 \sim 10^{12} \text{ км}^3$. Выберем элемент объёма $\Delta V = 1 \text{ км}^3$. Такой выбор ΔV полностью удовлетворяет неравенству (1.1), т.к. в выбранном элементе объёма содержится 10^{15} атомов, которых достаточно для статистического определения физических характеристик элемента объёма газа. Следовательно, задачу о движении Земли в межзвездном газе можно решить методами МСС, если бы ни еще одно физическое обстоятельство, которое нельзя игнорировать при выборе элемента объема среды.

Вышеприведенное определение малого элемента объёма ΔV как объёма, содержащего достаточно большое число молекул, безусловно справедливо для жидкостей и твёрдых тел, в которых среднее расстояние между атомами и молекулами порядка размеров самих атомов и молекул. Поэтому это "*достаточное*" число молекул одновременно означает достаточное число *взаимодействующих* между собой молекул. С физической точки зрения именно взаимодействие между молекулами является тем механизмом, при помощи которого в нём обеспечивается усреднение и непрерывное распределение его свойств.

Однако такое определение явно недостаточно для бесконечно малого элемента объёма в газе. Действительно, в разреженном газе часто можно легко удовлетворить правую часть неравенства (1.1) и указать такой элемент объёма, который будет содержать еще большее число частиц, достаточное для определения средних макроскопических характеристик этого элемента объёма. Но внутри этого элемента объёма молекулы могут и не сталкиваться, т. е. не

взаимодействовать друг с другом. Следовательно, макроскопические характеристики этого элемента объёма не будут функциями его координат. Поэтому для газов неравенство (1.1) необходимо заменить более жестким условием

$$\lambda^3 \ll \Delta V \ll L^3. \quad (1.2)$$

Здесь λ есть *средняя длина свободного пробега молекул* в газе. Для оценки величины λ можно воспользоваться известной формулой $\lambda \sim (n \cdot \sigma^2)^{-1}$, где $\sigma \sim 10^{-8}$ см есть диаметр молекулы. Неравенство (1.2) гарантирует, что в выбранном элементе объёма находится не просто достаточное число молекул, а достаточное число взаимодействующих, т. е. сталкивающихся, молекул.

Если вновь вернуться к задаче о движении Земли в межзвёздном газе, то легко убедиться, что левая часть неравенства (1.2) не выполняется. Действительно, поскольку $n = 1$ молекул/см³, то $\lambda \sim 10^{11}$ км и $\lambda^3 \sim 10^{33}$ км³. В качестве же элемента объёма был выбран объём $\Delta V = 1$ км³. Таким образом, $\lambda^3 \gg \Delta V$. Это означает, что в выбранном элементе объёма атомы межзвёздного газа не сталкиваются. Формальное же усреднение их характеристик дает некоторую макроскопическую величину, которая является характеристикой не данного элемента объёма, а объёма λ^3 , чья величина значительно превышает объём самой Земли и сравнима с объёмом солнечной системы. Поэтому и эта задача не может быть решена методами МСС. Она может быть успешно решена методами кинетической теории газов, которая строится на основе дискретного молекулярного строения вещества.

Несколько другие соотношения получаются, если учесть, что межзвёздный газ состоит из ионизованного водорода, т. е. электронов и протонов. В этом случае длина свободного пробега частиц существенно уменьшается, и появляется возможность использовать методы МСС для решения подобных задач (например, обтекание Земли "*солнечным ветром*").

В принципе любую задачу о движении тел, состоящих из отдельных молекул, можно решить методами кинетической теории. Однако такой подход во многих случаях оказывается чрезвычайно сложным, содержащим слишком много несущественных для рассматриваемых задач подробностей. МСС же в рамках сформулированной модели позволяет получить во многих практически важных случаях вполне приемлемые решения, хорошо совпадающие с опытом. В МСС разработан свой достаточно специфический математический аппарат, позволяющий успешно решать практические задачи.

1.2.2. Малый промежуток времени в МСС

Совершенно ясно, что бесконечно малый промежуток времени Δt в методах дифференциального исчисления должен быть мал по сравнению с характерным временем решаемых задач. Для периодических движений он

должен быть значительно меньше периода движения, для неустановившихся движений – значительно меньше времени установления стационарного движения или времени релаксации физических параметров состояния t_p .

С другой стороны, бесконечно малый промежуток времени должен быть значительно больше характерных времен молекулярного движения τ_m . Полагая, что в элементе объёма все физические характеристики рассматриваемого тела постоянны, необходимо выбрать бесконечно малый промежуток времени, достаточный для выравнивания этих характеристик внутри выбранного элемента объёма. Для газов мериллом этого времени τ_m может служить время взаимодействия молекул, для твёрдых тел и жидкостей - период колебаний молекул или атомов кристаллической решётки или время локализации молекулы в данной точке неподвижной жидкости. Таким образом, бесконечно малый промежуток времени в МСС должен удовлетворять неравенству:

$$\tau_m \ll \Delta t \ll t_p. \quad (1.3)$$

Левая часть неравенства должна выполняться еще и потому, что силы, действующие между молекулами вещества, являются близкодействующими. Поэтому передача взаимодействия между различными соседними элементами тела может осуществляться только через движение молекул, находящихся на границе этих частей. Следовательно, при временах, меньших или порядка τ_m , просто не существует взаимодействия между соседними элементами объёма, а стало быть отсутствует механизм, при помощи которого непрерывно изменяются физические характеристики этих элементов.

2. КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

2.1. ДЕФОРМАЦИЯ

Кинематика (от греческого слова *kinema* – движение) – это раздел *механики*, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учёта их масс и действующих на них сил. В зависимости от свойств изучаемого движения кинематику подразделяют: на кинематику *материальной точки*, кинематику *абсолютного твёрдого тела* и кинематику *непрерывно изменяющейся среды* (деформация твёрдого тела, жидкости или газа).

В кинематике сплошной среды задача заключается в том, чтобы составить уравнение движения некоторого элемента объёма (или массы) тела. Под влиянием внешних сил или при изменении температуры тело изменяет свою форму и объём, поэтому расстояние между двумя любыми соседними точками изменяется, т. е. тело деформируется.

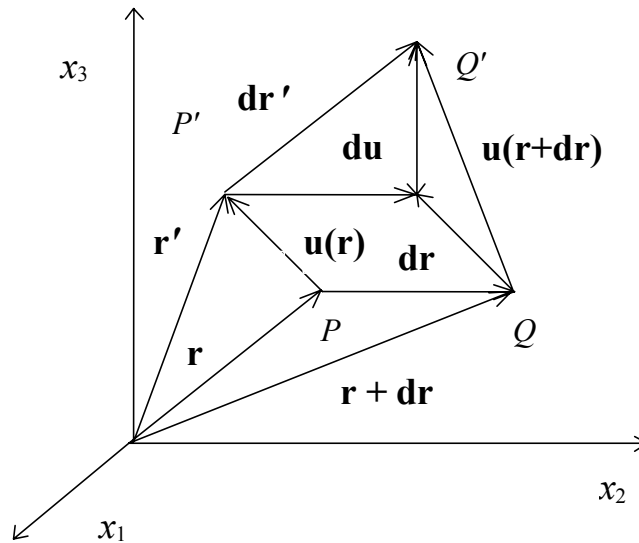


Рис. 2.1

Рассмотрим в декартовой системе координат некоторое тело (рис. 2.1). Обозначим оси координат через x_i ($i = 1, 2, 3$). Выделим бесконечно малый элемент объёма тела, расположенный около точки P . Положение точки P можно характеризовать радиусом-вектором $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$. После приложения к телу внешних сил в целом неподвижное тело деформируется, и точка P перейдет в другую точку пространства P' , характеризуемую радиус-вектором $\mathbf{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$. Смещение точки P , равное

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' - \mathbf{r}, \quad u_i(\mathbf{r}) = x'_i - x_i,$$

называют *деформацией* или *вектором смещения*, или просто *смещением*.

Для неизотропного тела деформация является функцией координат точки P , т. к. в других точках тела она может быть и другой. Задание вектора \mathbf{u} как функции \mathbf{r} во всех точках тела полностью определяет деформацию тела.

Теперь рассмотрим деформацию в точке Q , лежащей около точки P в дифференциальной окрестности первого порядка. После деформации точка Q перейдет в другую точку пространства – точку Q' с радиусом-вектором $\mathbf{r}' + d\mathbf{r}'$. Необходимо связать деформацию в точке P с деформацией в точке Q .

Из рис. 2.1 очевидно, что:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(Q) &= \mathbf{u}(P) + d\mathbf{u}, \\ \mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) &= \mathbf{u}(\mathbf{r}) + d\mathbf{u}, \quad u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + du_i. \end{aligned}$$

Каждую компоненту $u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$ деформации \mathbf{u} в точке $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ можно разложить в ряд Тейлора

$$u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \cdot dx_k + \dots \quad (2.1.1)$$

Ограничимся при разложении лишь вторым, линейным членом разложения. Если деформация тела во всех его точках удовлетворяет соотношению (2.1.1), то такое тело называют телом *однородной линейной деформации*. Учет нелинейных членов разложения в уравнении (2.1.1) требуется только при больших деформациях. В дальнейшем рассматриваются лишь малые деформации, когда деформацию можно рассматривать как *упругую*, при которой после снятия внешних сил тело полностью восстанавливает свою форму и объём.

Если условиться, что по дважды повторяющемуся индексу производится суммирование, то (2.1.1) можно записать в виде

$$u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \equiv u_i(\mathbf{r}) + du_i.$$

Следовательно, можно записать:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \equiv A_{ik} dx_k, \quad A_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (2.1.2)$$

Величина A_{ik} есть тензор второго ранга третьей мерности. Тензор A_{ik} называют *тензором относительной деформации*. Его компоненты являются в общем случае функциями координат и времени, т. е. $A_{ik} = A_{ik}(\mathbf{r}, t)$. Будем предполагать, что компоненты тензора относительной деформации малы по

сравнению с единицей из-за малости деформации или из-за малости промежутка времени деформирования, т. е. $A_{ik} \ll 1$.

В тензоре A_{ik} можно выделить симметричную и антисимметричную часть следующими слагаемыми:

$$A_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} + A_{ki}) + \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}) = \varepsilon_{ik} + \varphi_{ik}. \quad (2.1.3)$$

Симметричную часть ε_{ik} тензора A_{ik} называют *тензором деформации*, который равен

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}. \quad (2.1.4)$$

Антисимметричную часть φ_{ik} тензора A_{ik} называют *тензором поворота*:

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad \varphi_{ik} = -\varphi_{ki}. \quad (2.1.5)$$

Таким образом, изменение i -ой компоненты смещения в точке Q равно:

$$du_i = (\varepsilon_{ik} + \varphi_{ik}) dx_k.$$

2.2. ТЕНЗОР ПОВОРОТА

Рассмотрим физический смысл компонент тензора поворота φ_{ik} . Предположим, что все компоненты тензора деформаций ε_{ik} равны 0, т. е. $\varepsilon_{ik} = 0$. Тогда в соответствии с (2.1.2, 3) имеем

$$du_i = \varphi_{ik} dx_k. \quad (2.2.1)$$

Поскольку в соответствии с определением (2.1.5) компоненты $\varphi_{11} = \varphi_{22} = \varphi_{33} = 0$, то компоненты тензора φ_{ik} образуют матрицу:

$$\|\varphi_{ik}\| = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & 0 & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.2.2)$$

причем $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$, $\varphi_{13} = -\varphi_{31}$, $\varphi_{23} = -\varphi_{32}$. Таким образом, имеются лишь три независимых компоненты тензора поворота φ_{ik} . Введем обозначения $\varphi_{12} = -\varphi_3$, $\varphi_{13} = \varphi_2$, $\varphi_{23} = -\varphi_1$. В результате матрица (2.2.2) имеет вид

$$\|\varphi_{ik}\| = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда компоненты вектора \mathbf{du} согласно (2.2.1) можно записать в виде:

$$du_1 = -\varphi_3 dx_2 + \varphi_2 dx_3,$$

$$du_2 = \varphi_3 dx_1 - \varphi_1 dx_3,$$

$$du_3 = -\varphi_2 dx_1 + \varphi_1 dx_2.$$

Данные соотношения определяют компоненты вектора $\mathbf{du} = (du_1, du_2, du_3)$, который равен векторному произведению векторов $\boldsymbol{\varphi}$ и $d\mathbf{r}$:

$$\mathbf{du} = du_1 \cdot \mathbf{i} + du_2 \cdot \mathbf{j} + du_3 \cdot \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\varphi} \times d\mathbf{r}].$$

Вектор \mathbf{du} в случае $\varepsilon_{ik} = 0$ представляет собой вектор малого поворота элемента объёма (точки Q), находящегося на расстоянии $d\mathbf{r}$ от точки P , на некоторый малый угол φ (рис. 2.2).

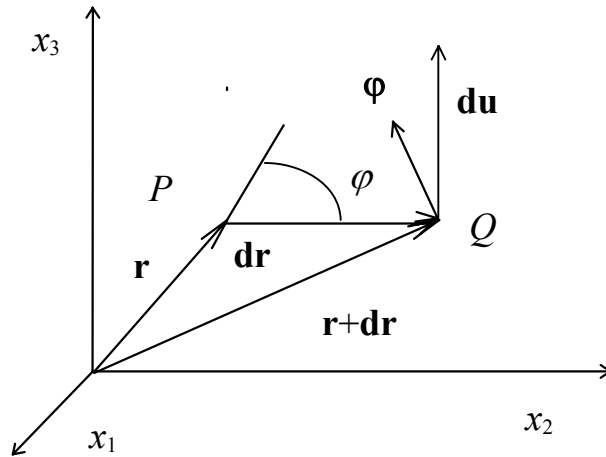


Рис. 2.2

Таким образом, компоненты тензора поворота φ_{ik} определяют поворот дифференциальной окрестности первого порядка (точки Q) около точки P как абсолютно твёрдого тела на некоторый малый угол φ , т. е. антисимметричная часть φ_{ik} тензора относительной деформации A_{ik} описывает не деформацию элемента тела в данной точке в собственном смысле этого слова, а лишь его поворот как поворот элемента абсолютно твёрдого тела.

Вспомним определение компонент ротора некоторого вектора \mathbf{u} :

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}. \quad (2.2.5)$$

Но согласно определения (2.1.5) для независимых компонент тензора поворота φ_{ik} и уравнения (2.2.5) для компонент **rot u** можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\varphi_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = -\varphi_3 = -\frac{1}{2} \text{rot}_3 \mathbf{u}, \\ \varphi_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = -\varphi_1 = -\frac{1}{2} \text{rot}_1 \mathbf{u}, \\ \varphi_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = -\varphi_2 = -\frac{1}{2} \text{rot}_2 \mathbf{u}.\end{aligned}\tag{2.2.6}$$

Очевидно, что уравнения (2.2.6) определяют компоненты вектора $\boldsymbol{\varphi}$ равенством

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}.\tag{2.2.7}$$

Следовательно, компоненты тензора поворота представляют собой компоненты ротора смещения.

2.3. ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИИ

Тензор деформации по определению (2.1.4) равен

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}.$$

Матрица компонент тензора деформаций имеет вид

$$\|\varepsilon_{ik}\| = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

Как всякий симметричный тензор ε_{ik} можно привести к *главным осям*, в которых матрица компонент тензора ε_{ik} будет иметь вид

$$\|\varepsilon_{ik}\| = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^0 \end{bmatrix}.$$

Диагональные компоненты тензора деформаций в главных осях $\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{22}^0, \varepsilon_{33}^0$ называют *главными значениями* тензора ε_{ik} и они описывают *главные деформации* среды.

Если все компоненты тензора поворота равны нулю, т. е. $\varphi_{ik} = 0$, то согласно (2.1.2, 3):

$$du_i = \varepsilon_{ik} \cdot dx_k.\tag{2.3.1}$$

Обозначим проекции приращения вектора \mathbf{dr} в главных осях через dx_i° ($i = 1, 2, 3$). Тогда деформации в главных осях можно записать в виде

$$du_1^\circ = \varepsilon_{11}^\circ \cdot dx_1^\circ, \quad du_2^\circ = \varepsilon_{22}^\circ \cdot dx_2^\circ, \quad du_3^\circ = \varepsilon_{33}^\circ \cdot dx_3^\circ. \quad (2.3.2)$$

Здесь du_i° есть деформация отрезка dx_i° . Все деформации направлены по главным осям. В силу линейности деформаций деформации любого отрезка (не обязательно бесконечно малого) в главных осях будут иметь вид

$$du_i^\circ = \varepsilon_{ii}^\circ \cdot \Delta x_i^\circ. \quad (2.3.3)$$

Из (2.3.3) видно, что главные деформации описывают локальные *растяжение* (+) или *сжатие* (-) элемента объёма в направлении главных осей деформации. Растяжение или сжатие по трем взаимно перпендикулярным направлениям называют *чистой деформацией*.

Таким образом, если все компоненты тензора поворота равны нулю ($\varphi_{ik} = 0$), то всегда в элементе объёма, лежащем около точки P , можно определить главные оси деформации, в которых этот элемент объёма испытывает чистую деформацию. Если же компоненты тензора φ_{ik} не равны нулю, то они описывают поворот этих главных осей вокруг точки P на некоторый малый угол. Следовательно, *деформация* некоторого элемента объёма тела в общем случае *сводится к его чистой деформации* (растяжению или сжатию по его главным осям деформации) и *повороту на малый угол главных осей деформации*; причем этот поворот происходит как *поворот абсолютно твердого тела*.

2.3.1. Изменение объёма тела при деформации

Поскольку компоненты тензора поворота φ_{ik} описывают поворот элемента объёма как абсолютно твердого тела, то они не могут влиять на изменение его объёма при деформации. Рассмотрим чистую деформацию в главных осях, которая единственно может привести к изменению объёма рассматриваемого элемента.

Пусть до деформации изменение элемента объёма в главных осях определяется выражением

$$\Delta V_0 = \Delta x_1^\circ \cdot \Delta x_2^\circ \cdot \Delta x_3^\circ.$$

После деформации рёбра элемента объёма получают приращения и их величину можно определить как

$$\Delta x_i^\circ = \Delta x_i^\circ + du_i^\circ.$$

Принимая во внимание (2.3.3), элемент объёма после деформации можно записать в форме

$$\Delta V'_{\circ} = (1 + \varepsilon_{11}^{\circ})(1 + \varepsilon_{22}^{\circ})(1 + \varepsilon_{33}^{\circ}) \cdot \Delta x_1^{\circ} \cdot \Delta x_2^{\circ} \cdot \Delta x_3^{\circ}.$$

Поскольку рассматриваются только малые деформации, т. е. $\varepsilon_{11}^{\circ}, \varepsilon_{22}^{\circ}, \varepsilon_{33}^{\circ} \ll 1$, то, пренебрегая величинами более высокого порядка малости, получим выражение для $\Delta V'_{\circ}$ в виде

$$\Delta V'_{\circ} = (1 + \varepsilon_{11}^{\circ} + \varepsilon_{22}^{\circ} + \varepsilon_{33}^{\circ}) \cdot \Delta V_{\circ}.$$

Тогда относительное изменение объёма при чистой деформации определяется соотношением

$$\frac{\Delta V'_{\circ} - \Delta V_{\circ}}{\Delta V_{\circ}} = \varepsilon_{11}^{\circ} + \varepsilon_{22}^{\circ} + \varepsilon_{33}^{\circ}. \quad (2.3.4)$$

Из тензорного анализа известно, что сумма диагональных элементов тензора является линейным инвариантом при его преобразованиях. Поэтому, используя (2.3.4), можно записать

$$\varepsilon_{11}^{\circ} + \varepsilon_{22}^{\circ} + \varepsilon_{33}^{\circ} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \text{Spur}(\varepsilon_{ik}) = \text{inv}.$$

Следовательно, для нахождения относительного изменения элемента объёма тела при его деформации нет необходимости приводить тензор деформации ε_{ik} к его главным осям. Сумма его диагональных элементов в любых осях определяет относительное изменение элемента объёма.

Соотношение (2.3.4) можно записать и в следующем виде:

$$\frac{\Delta V'_{\circ} - \Delta V_{\circ}}{\Delta V_{\circ}} = \frac{\delta V}{\Delta V_{\circ}} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \text{div } \mathbf{u} \equiv \frac{dV}{V}. \quad (2.3.5)$$

Таким образом, *относительное изменение объёма* при деформации определяется *дивергенцией вектора деформаций*. Следует заметить также, что сдвиг, описываемый недиагональными элементами тензора деформаций ε_{ik} (в отличие от диагональных), не приводит к изменению объёма, а описывает лишь изменение формы рассматриваемого элемента объёма.

2.3.2. Геометрические свойства линейных деформаций

Отметим следующие геометрические свойства линейных деформаций.

1. Точки элемента объёма тела, находящиеся до деформации в одной плоскости, после линейной деформации также расположатся в некоторой плоскости.

Действительно, запишем уравнение плоскости в главных осях

$$ax_1^{\circ} + bx_2^{\circ} + cx_3^{\circ} + d = 0.$$

После деформации новые координаты точек плоскости будут связаны со старыми координатами в соответствии с (2.3.3) соотношениями:

$$x_1^{\circ'} = x_1^{\circ} + \varepsilon_{11}^{\circ} x_1^{\circ}, \quad x_2^{\circ'} = (1 + \varepsilon_{22}^{\circ}) x_2^{\circ}, \quad x_3^{\circ'} = (1 + \varepsilon_{33}^{\circ}) x_3^{\circ}.$$

Тогда координаты точек после деформации удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{a}{1 + \varepsilon_{11}^{\circ}} x_1^{\circ'} + \frac{b}{1 + \varepsilon_{22}^{\circ}} x_2^{\circ'} + \frac{c}{1 + \varepsilon_{33}^{\circ}} x_3^{\circ'} + d = 0$$

или

$$a_1 x_1^{\circ'} + b_2 x_2^{\circ'} + c_3 x_3^{\circ'} + d = 0.$$

Новые координаты точек после деформации удовлетворяют уравнению некоторой другой плоскости. Этот результат справедлив и в любой системе координат в общем случае деформации, а не обязательно только для чистой деформации, которая рассмотрена для доказательства. Действительно, в общем случае деформация элемента объёма состоит из растяжения или сжатия по главным осям и повороту этих осей на некоторый малый угол как абсолютно твёрдого тела, определяемый компонентами тензора поворота. Поворот же элемента объёма как абсолютно твёрдого тела, содержащего некоторую плоскость, не может сместить точки тела из этой плоскости.

2. Точки, лежащие на одной прямой в элементе объёма до деформации, после деформации также будут лежать на некоторой прямой. Это следует из первого свойства, т.к. прямая является геометрическим местом точек пересечения двух плоскостей. Следовательно, влияние линейной деформации на материальные точки, расположенные на некотором отрезке прямой, проявляются, во-первых, в повороте прямой на некоторый малый угол и, во-вторых, в растяжении или сжатии этого отрезка.

3. Две параллельные плоскости в элементе объёма до деформации остаются параллельными и после его деформации.

Действительно, пусть имеем две параллельные плоскости в элементе объёма. В главных осях уравнения этих плоскостей имеют вид:

$$a x_1^{\circ} + b x_2^{\circ} + c x_3^{\circ} + d = 0,$$

$$A x_1^{\circ} + B x_2^{\circ} + C x_3^{\circ} + D = 0.$$

Плоскости параллельны, если выполняется соотношение:

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

После деформации плоскости будут описываться уравнениями следующего вида:

$$\frac{a}{1+\varepsilon_{11}^{\circ}} x_1^{\circ'} + \frac{b}{1+\varepsilon_{22}^{\circ}} x_2^{\circ'} + \frac{c}{1+\varepsilon_{33}^{\circ}} x_3^{\circ'} + d = 0 ,$$

$$\frac{A}{1+\varepsilon_{11}^{\circ}} x_1^{\circ'} + \frac{B}{1+\varepsilon_{22}^{\circ}} x_2^{\circ'} + \frac{C}{1+\varepsilon_{33}^{\circ}} x_3^{\circ'} + D = 0 .$$

Как видно, условие параллельности плоскостей выполняется и после деформации.

4. Из условия сохранения параллельности плоскостей при деформации вытекает условие параллельности двух прямых, т. е. две параллельные прямые, проведенные в элементе деформируемого объема, останутся параллельными и после линейной деформации.

Повторяя рассуждения пункта 1, можно утверждать, что свойства параллельности прямых и плоскостей сохраняются и при произвольной линейной деформации.

2.3.3. Эллипсоид деформации

Рассмотрим в элементе объема сферу единичного радиуса с центром в начале координат главных осей. Уравнение сферы имеет вид

$$x_1^{\circ 2} + x_2^{\circ 2} + x_3^{\circ 2} = 1.$$

После линейной деформации координаты точек на поверхности сферы, как и в предыдущем параграфе, определяются соотношениями

$$x_1^{\circ'} = (1 + \varepsilon_{11}^{\circ}) x_1^{\circ} , \quad x_2^{\circ'} = (1 + \varepsilon_{22}^{\circ}) x_2^{\circ} , \quad x_3^{\circ'} = (1 + \varepsilon_{33}^{\circ}) x_3^{\circ} .$$

Тогда уравнение сферы после деформации имеет вид

$$\frac{(x_1^{\circ'})^2}{(1 + \varepsilon_{11}^{\circ})^2} + \frac{(x_2^{\circ'})^2}{(1 + \varepsilon_{22}^{\circ})^2} + \frac{(x_3^{\circ'})^2}{(1 + \varepsilon_{33}^{\circ})^2} = 1.$$

Из данного уравнения следует, что при линейной деформации уравнение сферы переходит в уравнение эллипсоида, если все главные значения тензора деформаций различны. Этот результат справедлив не только в главных осях, но и при произвольной линейной деформации, т.к. поворот элемента объема как абсолютно твердого тела на некоторый угол не изменяет формы поверхности, расположенной внутри этого элемента объема. Если $\varepsilon_{11}^{\circ} = \varepsilon_{22}^{\circ} = \varepsilon_{33}^{\circ}$ (деформация однородна), то сфера переходит в сферу большего или меньшего радиуса. Если $\varepsilon_{11}^{\circ} = \varepsilon_{22}^{\circ} \neq \varepsilon_{33}^{\circ}$, то сфера переходит в эллипсоид вращения.

2.4. ТЕМПЕРАТУРНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Расстояние между двумя точками элемента объёма тела может изменяться не только с приложением к телу внешних сил, но и в результате изменения его температуры. В пределах элемента объёма тела температура предполагается постоянной. Если в начальный момент времени температура элемента объёма равнялась T_0 , то после нагревания или охлаждения тела пусть она будет равна T . Изменение температуры равно $\Delta T = T - T_0$. При этом предполагается, что внутри элемента не возникает каких-либо напряжений. В общем случае деформации элемента объёма вследствие изменения его температуры пропорциональны изменению температуры, и поэтому можно записать:

$$du_i^T = \varepsilon_{ik}^T \cdot dx_k, \quad \varepsilon_{ik}^T = \alpha_{ik} \Delta T. \quad (2.4.1)$$

В этом соотношении тензор деформаций ε_{ik}^T называют *тензором теплового расширения*, а величины α_{ik} называют *коэффициентами линейного теплового расширения*. В общем случае коэффициенты α_{ik} образуют диагональный тензор 2-го ранга. Так как рассматриваемый элемент объёма достаточно мал, то его можно считать однородным и температурные деформации имеют место только в главных осях. Следовательно, температурная деформация элемента объёма тела происходит без его поворота и заключается в расширении или сжатии по трём взаимно перпендикулярным главным осям деформации.

В главных осях матрица компонент тензора α_{ik} имеет вид

$$\|\alpha_{ik}\| = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^\circ & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22}^\circ & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^\circ \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть по аналогии с предыдущим, что при температурной деформации сфера деформируется в эллипсоид, имеющий уравнение

$$\frac{(x_1^{\circ'})^2}{(1 + \alpha_{11}^\circ \Delta T)^2} + \frac{(x_2^{\circ'})^2}{(1 + \alpha_{22}^\circ \Delta T)^2} + \frac{(x_3^{\circ'})^2}{(1 + \alpha_{33}^\circ \Delta T)^2} = 1.$$

Если $\alpha_{11}^\circ = \alpha_{22}^\circ = \alpha_{33}^\circ$, то сфера деформируется в сферу большего или меньшего радиуса. Если $\alpha_{11}^\circ = \alpha_{22}^\circ \neq \alpha_{33}^\circ$, то сфера деформируется в эллипсоид вращения.

Если $\alpha_{11}^\circ = \alpha_{22}^\circ = \alpha_{33}^\circ = \alpha$, то тело *изотропно* и характеризуется лишь одним коэффициентом линейного теплового расширения α . Тогда тензор теплового расширения можно записать в виде

$$\varepsilon_{ik}^T = \alpha \delta_{ik} \Delta T. \quad (2.4.2)$$

Здесь δ_{ik} – единичный симметричный тензор или *символ Кронекера*. В этом случае из (2.4.1) следует знакомый из общего курса физики результат:

$$du_i^T = \varepsilon_{ik}^T dx_k = \alpha_{ik} \Delta T dx_k = \alpha \delta_{ik} \Delta T dx_k = \alpha \Delta T dx_i.$$

Так как du_i^T есть приращение отрезка dx_i вследствие температурных деформаций, то в силу линейности и изотропности деформаций для приращения любого отрезка l при однородном нагревании тела можно записать известную формулу

$$\Delta l = \alpha \Delta T l.$$

Относительное изменение объёма при температурной деформации для изотропного тела по аналогии с (2.3.5) имеет вид

$$\frac{\delta V}{\Delta V} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}^T = \alpha \Delta T \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = 3\alpha \Delta T. \quad (2.4.4)$$

Последнее соотношение для малых температурных деформаций можно записать в дифференциальной форме, если полагать, что $\Delta V \approx V$, $\delta V \approx \partial V$, $\Delta T \approx \partial T$:

$$\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 3\alpha. \quad (2.4.5)$$

Величину 3α называют *коэффициентом объёмного расширения тела*. Производная в последней формуле взята при постоянном давлении, т.к. при однородном нагревании тела в отсутствие внешних сил внутри него не возникает каких-либо напряжений. Эту величину называют *изобарной сжимаемостью* среды.

2.5. ТЕОРЕМА КОШИ-ГЕЛЬМГОЛЬЦА

При рассмотрении деформаций предполагалось, что тело в целом находится в состоянии покоя. Если же тело под действием внешних сил перемещается в пространстве, то будет перемещаться и точка P как полюс (рис. 2.1). Поэтому, рассматривая смещение произвольного элемента объёма тела, в общем случае можно сформулировать *теорему Коши-Гельмгольца*.

Общее перемещение некоторой точки Q элемента объёма деформируемого тела, содержащего точку P , может быть представлено в виде суммы:

- *поступательного перемещения точки P как полюса;*
- *вращения точки Q вместе с элементом объёма как абсолютно твёрдого тела вокруг точки P на малый угол, определяемый вектором поворота φ ;*

- собственно деформационного перемещения вследствие сжатия или растяжения по трем взаимно перпендикулярным осям (главным осям деформации).

Математически теорему можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(Q) &= \mathbf{u}(P) + [\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{dr}] + \mathbf{du}_{\text{деф}}, \\ \mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{dr}) &= \mathbf{u}(\mathbf{r}) + [\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{dr}] + \mathbf{du}_{\text{деф}}, \\ u_i(\mathbf{r} + \mathbf{dr}) &= u_i(\mathbf{r}) + \varepsilon_{ikl} \varphi_k dx_l + \varepsilon_{ik} dx_k. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Здесь ε_{ikl} – символ Леви-Чивита. Из (2.5.1) видно, что по сравнению с механикой абсолютно твердого тела в механике деформируемого тела к смещению точки добавляется еще одно слагаемое, связанное с собственно деформацией среды.

Если температура тела не остается постоянной, то к правой части (2.5.1) необходимо добавить еще одно слагаемое, определяющее температурную деформацию согласно (2.4.1). Тогда общее перемещение точки Q равно

$$u_i(\mathbf{r} + \mathbf{dr}) = u_i(\mathbf{r}) + \varepsilon_{ikl} \varphi_k dx_l + \varepsilon_{ik} dx_k + \alpha_{ik} \Delta T dx_k. \quad (2.5.2)$$

3. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

3.1. СИЛЫ МАССОВЫЕ, ОБЪЁМНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ

Под влиянием внешних сил тело деформируется. В результате деформаций в теле возникают напряжения. Все силы, действующие на элемент объёма деформируемого тела, разделяют на две категории: *силы массовые* или *объёмные* и *силы поверхностные*.

3.1.1. Массовые силы

Массовые силы – это силы, пропорциональные массе элемента объёма тела. Если масса элемента объёма тела ΔV равна Δm , то массовая сила $\Delta \mathbf{F}$, действующая на этот элемент объёма, равна

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{f}^m \cdot \Delta m .$$

Здесь \mathbf{f}^m – *напряжённость* (плотность) *массовой силы* или массовая сила, действующая на единицу массы. Если ввести понятие массовой плотности вещества

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} ,$$

то в пределах однородного элемента объёма можно записать:

$$\Delta m = \rho \Delta V, \quad \Delta \mathbf{F} = \rho \mathbf{f}^m \Delta V .$$

Тогда по аналогии произведение $\rho \mathbf{f}^m = \mathbf{f}^v$ можно назвать *напряжённостью* (*плотностью*) *объёмной силы*, т. е. силой, действующей на единицу объёма. Типичными массовыми или объёмными силами являются: *сила тяжести*, *Лоренцева сила*, *сила Кориолиса* и т.п.

3.1.2. Силы поверхностные

В МСС по сравнению с механикой точки и абсолютно твёрдого тела необходимо ввести новое понятие – понятие о *поверхностных силах*. Если внутри деформируемого тела мысленно выделить некоторый объём, то на его поверхность со стороны остальной части будут действовать некоторые силы вследствие деформации, т.е. смещения одних участков тела по отношению к другим. Взаимодействие между соседними элементами тела осуществляется при помощи короткодействующих молекулярных сил (радиус действия молекулярных сил порядка размеров атомов или молекул). Поэтому передача силового взаимодействия от одного элемента объёма к соседнему осуществляется практически лишь через очень тонкий (порядка нескольких

ангстрем) поверхностный слой, который можно считать разделяющей поверхностью. Тогда не рассматриваемая или мысленно отбрасываемая часть объёма тела действует на выделенный элемент объёма только через его поверхность. Это силовое воздействие на выделенный элемент объёма может быть заменено некоторыми поверхностными силами.

Таким образом, *поверхностные силы* – это внутренние силы в деформируемом теле, которые возникают между соседними частями тела (на граничных поверхностях) при деформации или движении среды (например, сила давления, вязкие напряжения и т.д.). Если тело не деформировано, но однородно нагрето, то эти внутренние силы отсутствуют, и все части его находятся в механическом и термодинамическом равновесии.

Существенное различие между объёмными и поверхностными силами заключается в том, что если объёмные (или массовые) силы могут зависеть лишь от координат и времени $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, то поверхностные силы зависят еще и от ориентации площадки, на которую они действуют. Эта зависимость в общем случае является тензорной.

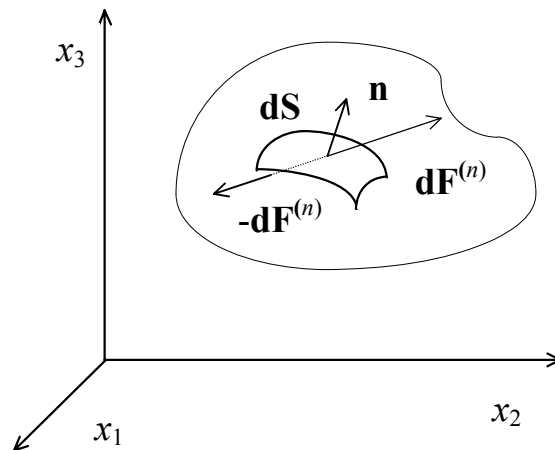


Рис. 3.1

Рассмотрим некоторый выделенный объём тела (рис. 3.1). Действие остальной части тела на этот выделенный объём можно заменить некоторыми силами, действующими на его поверхность. Выделим на этой поверхности элемент площади $d\mathbf{S}$. Пусть \mathbf{n} есть нормальный единичный вектор к элементарной площадке $d\mathbf{S}$. Единичный вектор \mathbf{n} будем считать положительным, если он направлен вне выделенного объёма тела.

Пусть далее на этот элемент поверхности действует поверхностная сила $d\mathbf{F}^{(n)}$. Причем сила необязательно направлена по нормали к элементу

поверхности. Значок (n) указывает на ориентацию площадки в пространстве. Тогда можно записать

$$d\mathbf{F}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^{(n)} \cdot dS, \quad d\mathbf{F}^{(n)} = -d\mathbf{F}^{(-n)}. \quad (3.1.1)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ есть поверхностная сила, действующая на единицу площади. Величину $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ по аналогии с объёмными силами можно назвать *напряжённостью* (плотностью) *поверхностных сил* или просто *напряжением*.

3.1.3. Тензор напряжений

Значение напряжения $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ в данной точке элемента поверхности можно выразить через напряжения $\boldsymbol{\sigma}^{(n_i)}$, которые на плоскости перпендикулярны координатным осям в декартовой системе координат.

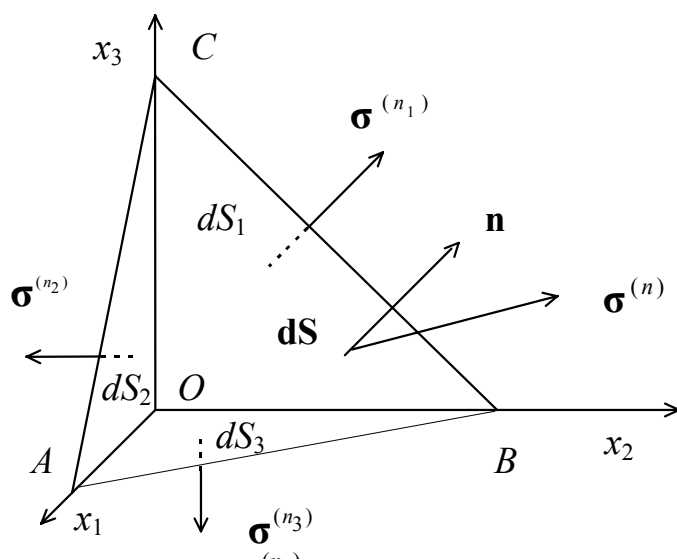


Рис. 3.2

Рассмотрим тетраэдр $ABCO$ (рис. 3.2) объёмом dV , представляющий некоторый элемент деформируемого тела. Результат рассмотрения не должен зависеть от формы выделенного элемента объёма тела и тетраэдр рассматривается только для простоты доказательства.

Обозначим силы, действующие на каждую из площадок dS_i , в соответствии с (3.1.1) через $\boldsymbol{\sigma}^{(n_i)}$. Далее составим уравнение баланса сил, действующих на тетраэдр $ABCO$:

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{F}_v + d\mathbf{F}_s. \quad (3.1.2)$$

Здесь сила $d\mathbf{F}$ определяется согласно второму закону Ньютона через произведение массы тетраэдра на ускорение движения, т.е. $d\mathbf{F} = \rho dV \cdot d\mathbf{u} / dt$, где ρ – массовая плотность среды и \mathbf{u} – скорость движения элемента объёма dV .

Объемная сила \mathbf{dF}_V представляет собой силу, равную по определению $\mathbf{dF}_V = \rho \mathbf{f}^m dV$. Сила \mathbf{dF}_S есть сила, действующая на всю поверхность тетраэдра $ABCO$, и она равна алгебраической сумме произведений соответствующих напряженностей $\boldsymbol{\sigma}^{(n_i)}$ и площадок dS_i . Тогда уравнение баланса сил (3.1.2) можно записать в форме

$$\rho dV \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f}^m dV + \boldsymbol{\sigma}^{(n)} \cdot dS + \boldsymbol{\sigma}^{(n_1)} \cdot dS_1 + \boldsymbol{\sigma}^{(n_2)} \cdot dS_2 + \boldsymbol{\sigma}^{(n_3)} \cdot dS_3, \quad (3.1.3)$$

$$dS_i = dS \cdot \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{n}_i}) = -dS \cdot n_i, \quad \frac{\pi}{2} < (\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{n}_i}) < \pi.$$

Здесь \mathbf{n}_i нормальный единичный вектор, перпендикулярный к площадке dS_i .

Очевидно, что в (3.1.3) элементы объёма dV и площади dS пропорциональны кубу и квадрату линейного размера. Поэтому, если стягивать тетраэдр в точку, то можно пренебречь в (3.1.3) слагаемыми с dV . Тогда напряженность $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ равна

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^{(n_1)} \cdot n_1 + \boldsymbol{\sigma}^{(n_2)} \cdot n_2 + \boldsymbol{\sigma}^{(n_3)} \cdot n_3. \quad (3.1.4)$$

Проекцию этой силы на ось i можно записать в виде

$$\sigma_i^{(n)} = \sigma_{ik} \cdot n_k. \quad (3.1.5)$$

Трёхмерный тензор второго ранга σ_{ik} называют *тензором напряжений*. Равенство (3.1.5) позволяет определить напряжение, действующее в направлении оси x_i на произвольно ориентированную в теле единичную площадку, через напряжения, действующие на три перпендикулярные координатным осям единичные площадки.

Из вывода тензора напряжений следует, что любая компонента тензора напряжений σ_{ik} представляет собой силу, действующую в направлении координатной оси x_i на единичную площадку, перпендикулярную оси x_k .

На рис. 3.3 изображены все компоненты тензора напряжений σ_{ik} , действующие на три взаимно перпендикулярные грани куба единичной площади. Компоненты тензора σ_{ik} при $i = k$ называют *нормальными напряжениями*, а компоненты тензора σ_{ik} при $i \neq k$ называют *касательными (сдвиговыми) напряжениями*. Далее будет показано (п. 6.5), что тензор σ_{ik} является *симметричным* тензором (т. е. $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$); следовательно, он имеет 6 независимых компонент. Как симметричный тензор он может быть приведен к главным осям, в которых матрица компонент тензора напряжений имеет вид:

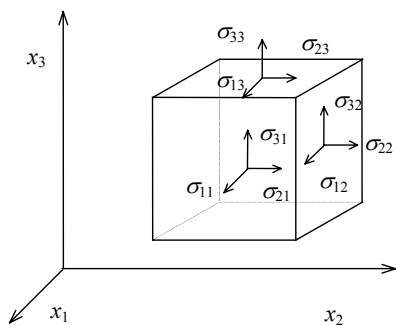


Рис. 3.3

$$\|\sigma_{ik}^{\circ}\| = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{\circ} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^{\circ} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}^{\circ} \end{bmatrix}.$$

Если $\sigma_{11}^{\circ} = \sigma_{22}^{\circ} = \sigma_{33}^{\circ} = -P$, то говорят, что элемент объёма испытывает *всестороннее и равномерное сжатие*, что

имеет место в газах, жидкостях и изотропных твёрдых телах. В этом случае тензор напряжений можно записать в виде:

$$\sigma_{ik} = -P \cdot \delta_{ik}. \quad P = -(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3. \quad (3.1.6)$$

3.2. РЕЗУЛЬТИРУЮЩАЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ЕДИНИЦУ ОБЪЁМА ТЕЛА

Рассмотрим некоторый выделенный объём тела V . Силы внутренних напряжений внутри него не могут дать никакой результирующей силы, т.к. по закону равенства действия и противодействия силовые взаимодействия различных внутренних частей выделенного объёма взаимно компенсируются. Следовательно, результирующая сила может быть вызвана только силами, действующими на поверхность выделенного объёма со стороны ”отброшенной“ части тела. Пусть \mathbf{F} есть сила, действующая на единицу объёма. Тогда на элемент объёма dV действует сила $\mathbf{F}dV$. Чтобы выделенный элемент объёма находился в равновесии, необходимо, чтобы результирующая сила, действующая на объём, была равна результирующей поверхностной силе, т. е.

$$\int_{(V)} \mathbf{F}dV = \oint_{(S)} d\mathbf{F}_S^{(n)} = \oint_{(S)} \boldsymbol{\sigma}^{(n)} dS, \quad \int_{(V)} F_i dV = \oint_{(S)} \sigma_i^{(n)} dS = \oint_{(S)} \sigma_{ik} n_k dS. \quad (3.2.1)$$

В вышеприведённых формулах интегрирование в правой части ведётся по поверхности S выделенного объёма V , n_k – проекция на ось k единичного нормального к элементарной площадке dS вектора \mathbf{n} . Произведение $n_k dS$ можно записать в виде dS_k , если элементарной площадке приписывать направление нормали к ней. Тогда из (3.2.1) следует

$$\int_{(V)} F_i dV = \oint_{(S)} \sigma_{ik} dS_k. \quad (3.2.2)$$

По теореме Гаусса-Остроградского интеграл по замкнутой поверхности от некоторого вектора может быть преобразован в интеграл по объёму, охватываемому этой поверхностью, от дивергенции этого вектора.

Действительно, для вектора \mathbf{a} теорема Гаусса-Остроградского определяет интегральное соотношение вида

$$\oint_{(S)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{(S)} a_k dS_k = \int_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{a} dV \equiv \int_{(V)} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} dV. \quad (3.2.2 a)$$

Для тензора A_{ik} по аналогии можно записать

$$\oint_{(S)} A_{ik} dS_k = \int_{(V)} \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} dV, \quad (3.2.2 б)$$

Аналог этой теоремы для интеграла по замкнутой поверхности от тензора второго ранга приводит к результату

$$\int_{(V)} F_i dV = \oint_{(S)} \sigma_{ik} dS_k = \int_{(V)} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV. \quad (3.2.3)$$

Следовательно, результирующая сила, которая действует на единицу объёма деформируемого тела, определяется формулой

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (3.2.4)$$

Таким образом, зная зависимость компонент тензора напряжений от координат и времени, по формуле (3.2.4) можно вычислить силу, действующую на единицу объёма или элемент объёма в любой точке деформируемого тела в любой момент времени, и, следовательно, составить уравнения движения этих элементов, а значит, и всего тела.

4. ТЕРМОДИНАМИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ

4.1. РАБОТА СИЛ ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Рассмотрим некоторое деформируемое тело. Определим работу, которая совершается силами внутренних напряжений при деформировании тела. Пусть dA_V есть работа, совершаемая силами внутренних напряжений в единице объёма тела. Тогда, умножая скалярно силу \mathbf{F} на элементарное перемещение $d\mathbf{u}$, получим

$$dA_V = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} = F_i du_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} du_i. \quad (4.1.1)$$

Работа, производимая силами внутренних напряжений внутри некоторого объёма тела V , равна

$$A_V = \int_{(V)} dA_V dV = \int_{(V)} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} du_i dV. \quad (4.1.2)$$

Интеграл в правой части можно записать в следующем виде:

$$A_V = \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} du_i) dV - \int_{(V)} \sigma_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} du_i \right) dV.$$

Применяя теорему Гаусса-Остроградского к первому интегралу, получим

$$A_V = \oint_{(S)} (\sigma_{ik} du_i) dS_k - \int_{(V)} \sigma_{ik} d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dV.$$

Если рассматривать очень большой объём (в пределе бесконечный), можно предположить, что на границах тело не деформируется. Поэтому можно считать, что первый интеграл в этом выражении равен нулю. Тогда работа сил внутренних напряжений в объёме V равна

$$A_V = - \int_{(V)} \sigma_{ik} \left(d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dV. \quad (4.1.3)$$

Далее рассмотрим скалярное произведение симметричного тензора A_{ik} на произвольный тензор B_{ik} , который можно разложить на симметричную и антисимметричную часть, и преобразуем его:

$$A_{ik} \cdot B_{ik} = A_{ik} \cdot \frac{1}{2} (B_{ik} + B_{ki}) + A_{ik} \cdot \frac{1}{2} (B_{ik} - B_{ki}) = A_{ik} \cdot \frac{1}{2} (B_{ik} + B_{ki}) + \frac{1}{2} (A_{ik} \cdot B_{ik} - A_{ik} \cdot B_{ki}).$$

Поскольку здесь значки i и k немые (повторяются дважды), их в любом слагаемом можно поменять местами. Тогда получим

$$A_{ik} \cdot B_{ik} = \frac{1}{2} A_{ik} \cdot (B_{ik} + B_{ki}) + \frac{1}{2} (A_{ik} \cdot B_{ik} - A_{ki} \cdot B_{ik}).$$

Но так как тензор A_{ik} по условию тензор симметричный, т. е. $A_{ik} = A_{ki}$, то выражение во вторых скобках равно нулю. Поэтому, используя симметрию тензора напряжений, подынтегральное выражение в (4.1.3) можно записать в виде

$$A_V = - \int_{(V)} \sigma_{ik} \cdot d \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] dV \equiv - \int_{(V)} \sigma_{ik} \cdot d\varepsilon_{ik} dV. \quad (4.1.4)$$

Таким образом, из сравнения (4.1.2) и (4.1.4) следует, что работа, совершаемая внутренними напряжениями в единице объёма деформируемого тела, равна

$$dA_V = - \sigma_{ik} \cdot d\varepsilon_{ik}. \quad (4.1.5)$$

4.2. ОСНОВНОЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО

Если после прекращения действия внешних сил тело полностью возвращается в исходное недеформированное состояние, то возникающие при этом деформации называют *упругими* деформациями. Если после прекращения действия внешних сил тело не возвращается в исходное состояние, то такие деформации называют *неупругими* или *пластическими* деформациями. При пластических деформациях после прекращения действия внешних сил остаются некоторые *остаточные* деформации, и состояние тела после деформации может существенно отличаться от его состояния до деформации. Малые деформации при кратковременном действии внешних сил всегда являются упругими.

Если упругая деформация совершается достаточно медленно, то в каждый момент времени в элементе объёма деформируемого тела успевает установиться состояние термодинамического равновесия, соответствующее тем внешним условиям, в которых тело в данный момент находится. Такой процесс называют *термодинамически обратимым*. Тогда из первого начала термодинамики следует, что приращение внутренней энергии единицы объёма тела $dE_{\text{вн}}$ равно разности полученного извне данной единицей объёма тепла dQ и производимой силами внутренних напряжений работы dA_V , т. е.

$$dE_{\text{вн}} = dQ_V - dA_V = dQ_V + \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik}. \quad (4.2.1)$$

Условимся все величины относить к единице объёма недеформируемого тела, т.к. объём при деформировании тела может измениться. Уравнение (4.2.1) является *основным термодинамическим равенством* для деформируемых тел. При обратимом процессе количество тепла равно $dQ_V = TdS_V$, где T – температура, а S_V – энтропия единицы объёма недеформированного тела. Тогда соотношение (4.2.1) принимает вид

$$dE_{\text{ен}} = TdS_V + \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik}. \quad (4.2.2)$$

Нетрудно видеть, что равенство (4.2.2) соответствует аналогичному равенству, рассматриваемому в традиционной термодинамике. Действительно, при всестороннем равномерном сжатии (газы, жидкости) тензор напряжений согласно (3.1.6) равен $\sigma_{ik} = -P \cdot \delta_{ik}$. Тогда равенство (4.2.2) запишется в виде

$$dE_{\text{ен}} = TdS_V - P\delta_{ik}d\varepsilon_{ik} = TdS_V - Pd\varepsilon_{ii} = TdS_V - Pd\frac{\Delta V}{V}.$$

Здесь использовано свойство тензора деформаций, что при равномерном сжатии сумма его диагональных элементов равна относительному изменению объёма. Если рассматривать малую деформацию единицы объёма тела и считать, что в этом случае $d(\Delta V) \approx dV$, то из предыдущего равенства следует известное термодинамическое равенство вида:

$$dE_{\text{ен}} = TdS_V - PdV, \quad TdS_V = dE_{\text{ен}} + PdV. \quad (4.2.2 a)$$

Одним из основных термодинамических потенциалов является *свободная энергия* F , которая определяется выражениями:

$$F = E_{\text{ен}} - TS_V, \quad dF = dE_{\text{ен}} - TdS_V - S_V dT.$$

После подстановки вместо $dE_{\text{ен}}$ равенства (4.2.2) получим для дифференциала свободной энергии:

$$dF = -S_V dT + \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik}. \quad (4.2.3)$$

Независимыми переменными в уравнениях (4.2.2) и (4.2.3) являются величины S_V , σ_{ik} и T . Поэтому компоненты тензора напряжений можно получить из (4.2.2) и (4.2.3) дифференцированием по компонентам тензора деформаций ε_{ik} внутренней энергии $E_{\text{ен}}$ при постоянной энтропии S_V или свободной энергии F при постоянной температуре T , т. е.

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial E_{\text{ен}}}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_{S_V} = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_T. \quad (4.2.4)$$

5. ЗАКОН ГУКА

5.1 СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Для решения конкретных задач необходимо иметь связь между компонентами тензора деформаций ε_{ik} и компонентами тензора напряжений σ_{ik} . Для нахождения этой связи воспользуемся общими термодинамическими соотношениями (4.2.4). Для этого необходимо найти явную зависимость, например, свободной энергии F от компонент тензора деформации ε_{ik} . Будем рассматривать малые деформации при постоянной температуре тела. Тогда общий вид зависимости свободной энергии от компонент тензора деформации можно установить путем следующих рассуждений.

В силу малости деформаций ($\varepsilon_{ik} \ll 1$) свободную энергию F можно представить в виде степенного ряда по компонентам тензора деформаций ε_{ik} . При малой упругой деформации после прекращения действия всех внешних сил, вызывающих эту деформацию, тело должно возвращаться в свое исходное состояние, в котором все компоненты тензора деформации ε_{ik} и все компоненты тензора напряжений σ_{ik} равны нулю. Но поскольку согласно (4.2.4) $\sigma_{ik} = (\partial F / \partial \varepsilon_{ik})_T$, то, следовательно, в разложении F по степеням ε_{ik} должны отсутствовать линейные по ε_{ik} слагаемые. В противном случае при дифференцировании по ε_{ik} конструируемого выражения получается некоторая постоянная, что не обеспечит условия $\sigma_{ik} = 0$ при $\varepsilon_{ik} = 0$.

Далее, поскольку свободная энергия F является скалярной величиной, то каждое слагаемое в искомом разложении F также должно быть скалярной величиной. Но из компонент симметричного тензора ε_{ik} можно составить только три скалярных величины, инвариантных при различных преобразованиях координат:

- * сумма диагональных элементов ε_{ik} – линейный инвариант;
- * сумма квадратов всех элементов ε_{ik} – квадратичный инвариант;
- * определитель матрицы ε_{ik} – кубический инвариант.

В силу малости деформаций, ограничиваясь лишь квадратичными членами разложения, свободную энергию можно представить в виде

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{ii})^2 + \mu (\varepsilon_{ik})^2. \quad (5.1.1)$$

Здесь для упрощения записи использовано скалярное произведение тензоров $\varepsilon_{ik} \cdot \varepsilon_{ik} = (\varepsilon_{ik})^2$. Величины λ , μ – некоторые коэффициенты пропорциональности,

которые называют *коэффициентами Ламэ*; F_0 – свободная энергия единицы объёма недеформированного тела.

Как отмечалось в п. 2, любую деформацию в произвольной системе координат можно представить в виде суммы деформации чистого сдвига, происходящего без изменения объёма, и деформации всестороннего сжатия или растяжения, приводящего к изменению объёма деформируемого элемента. Поэтому и тензор деформаций ε_{ik} можно записать в виде

$$\varepsilon_{ik} = \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll}. \quad (5.1.2)$$

Действительно, сумма диагональных элементов первого тензора в (5.1.2) равна нулю, следовательно, он представляет собой тензор сдвига. Второе слагаемое в (5.1.2) представляет собой тензор всестороннего сжатия или растяжения, поскольку сумма его диагональных членов равна: $\varepsilon_{ll} = \Delta V/V$.

С учётом (5.1.2) выражение для свободной энергии удобно привести к следующему виду:

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{ll})^2 + \mu \left[\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ll} \delta_{ik} \right) + \frac{1}{3} \varepsilon_{ll} \delta_{ik} \right]^2.$$

После элементарных преобразований данного выражения получаем:

$$F = F_0 + \frac{\kappa}{2} (\varepsilon_{ll})^2 + \mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right)^2, \quad (5.1.3)$$

$$\frac{\kappa}{2} = \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3}.$$

Здесь коэффициенты κ и μ называют *модулем всестороннего сжатия* и *модулем сдвига* соответственно.

В состоянии термодинамического равновесия (недеформируемое состояние) свободная энергия F минимальна. Это значит, что разность $F - F_0$ всегда является положительной величиной, равной нулю только при $\varepsilon_{ik} = 0$. Следовательно, правая часть равенства (5.1.3) также должна быть положительной величиной. Но это может быть лишь тогда, когда оба коэффициента κ и μ являются каждый в отдельности положительным, поскольку деформация может быть сдвигом без всестороннего сжатия или всесторонним сжатием без сдвига. Таким образом, модули κ и μ – положительные величины, т. е. $\kappa > 0$ и $\mu > 0$.

5.2. ЗАКОН ГУКА

Для установления связи между тензором напряжений σ_{ik} и тензором деформаций ε_{ik} найдем дифференциал свободной энергии dF , используя определение (5.1.3):

$$\begin{aligned} dF &= \kappa \varepsilon_{ii} d\varepsilon_{ii} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right) d \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right), \\ dF &= \kappa \varepsilon_{ii} d\varepsilon_{ii} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right) d\varepsilon_{ik}, \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

поскольку $\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right) \delta_{ik} = \left(\varepsilon_{kk} - \frac{1}{3} \delta_{ii} \varepsilon_{ll} \right) = 0$. Но $d\varepsilon_{ii} = \delta_{ik} d\varepsilon_{ik}$, поэтому (5.2.1) для дифференциала свободной энергии dF можно переписать

$$dF = \left[\kappa \varepsilon_{ii} \delta_{ik} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right) \right] d\varepsilon_{ik}. \quad (5.2.2)$$

В соответствие с определением (4.2.4) имеем

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_T = \kappa \varepsilon_{ii} \delta_{ik} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right). \quad (5.2.3)$$

Выражение (5.2.3) устанавливает линейную связь между компонентами тензора напряжений σ_{ik} и компонентами тензора деформаций ε_{ik} при малых изотермических деформациях.

Возможно получить и обратную связь, т.е. выразить компоненты тензора деформаций ε_{ik} через компоненты тензора напряжений σ_{ik} . Для этого найдём сумму диагональных элементов тензора напряжений σ_{ik} (5.2.3), т.е.

$$\sigma_{ik} (i = k) = \sigma_{ii} = \kappa \delta_{ii} \varepsilon_{ii} = 3\kappa \varepsilon_{ii}, \quad \varepsilon_{ii} = \frac{1}{3\kappa} \sigma_{ii}.$$

После подстановки данного соотношения в (5.2.3) и элементарных преобразований получим зависимость $\varepsilon_{ik}(\sigma_{ik})$:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{9\kappa} \sigma_{ii} \delta_{ik} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll} \right). \quad (5.2.4)$$

Выражение (5.2.4) называют *законом Гука*. В форме (5.2.4) получен закон Гука для малых деформаций, тем не менее он справедлив во всей области упругих деформаций, поскольку во всей области упругих деформаций сохраняется линейная зависимость между компонентами тензора деформаций и тензора напряжений.

Из (5.2.4) можно показать, что относительное изменение объёма при

деформации определяется только диагональными элементами тензора напряжений. Действительно, согласно (2.3.4) имеем

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii} = \frac{1}{9\kappa} \delta_{ii} \sigma_{ii} = \frac{1}{3\kappa} \sigma_{ii}. \quad (5.2.5)$$

Для газа (жидкости), который может испытывать только всестороннее равномерное сжатие, тензор напряжений σ_{ik} согласно (3.1.6) равен:

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik}, \quad \sigma_{ii} = -3P. \quad (5.2.5 a)$$

Поэтому при равномерном всестороннем сжатии относительное изменение объёма газа (жидкости) равно

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{P}{\kappa}. \quad (5.2.6)$$

Если деформации малы, температура среды постоянна, а давление P изменяется на малую величину ΔP , то соотношение (5.2.6.) можно записать в дифференциальной форме

$$\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{\kappa}. \quad (5.2.7)$$

Величину $1/\kappa$ называют *коэффициентом всестороннего сжатия* или *изотермической сжимаемостью*.

Поскольку изменение свободной энергии при деформации единицы объёма тела $\Delta F = F - F_0$ есть однородная квадратичная функция компонент тензора деформаций ε_{ik} (5.1.3), то, используя уравнения (5.1.3) и (5.2.2), можно получить следующее соотношение:

$$\varepsilon_{ik} \cdot \frac{\partial \Delta F}{\partial \varepsilon_{ik}} = 2\Delta F.$$

Принимая во внимание (4.2.4), имеем

$$\Delta F = \frac{1}{2} \sigma_{ik} \cdot \varepsilon_{ik}. \quad (5.2.8)$$

Формула (5.2.8) определяет изменение свободной энергии ("упругой" энергии) единицы объёма тела при малых изотермических деформациях.

5.3. ОДНОРОДНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТЕЛА

5.3.1. Растяжение стержня

Деформацию тела называют *однородной*, если все компоненты тензора деформаций постоянны по всему телу. В качестве примера рассмотрим простое растяжение стержня вдоль оси x_2 (рис. 5.1).

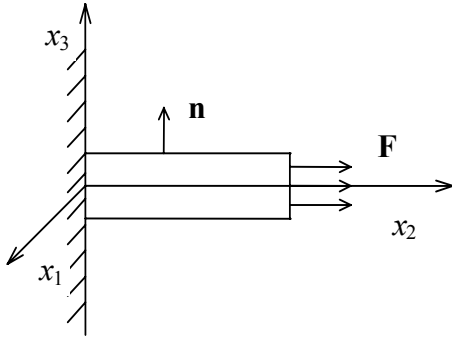


Рис. 5.1

Пусть один из концов стержня закреплен, а на другой действует некоторая растягивающая вдоль оси x_2 сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}(0, F_2, 0)$. Если S – площадь поперечного сечения стержня, то компонента растягивающей силы $F_2 = P \cdot S$, где P – нормальное к S напряжение.

По условию задачи деформация стержня однородна, поэтому компоненты тензора напряжений постоянны вдоль всего стержня, и их можно определить из граничных условий. На боковую поверхность стержня не действуют никакие внешние силы, следовательно, на ней выполняется условие

$$\sigma_i^{(n)} = \sigma_{ik} n_k = 0. \quad (5.3.1)$$

Поскольку нормальный единичный вектор \mathbf{n} к любой площадке боковой поверхности стержня перпендикулярен к оси x_2 , т. е. имеет лишь компоненты $n_1 \neq 0$ и $n_3 \neq 0$, а $n_2 = 0$, то условие (5.3.1) дает следующую систему уравнений для определения компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} \cdot 0 + \sigma_{13} n_3 &= 0 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} \cdot 0 + \sigma_{23} n_3 &= 0 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} \cdot 0 + \sigma_{33} n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

При произвольных n_1 и n_3 данная система уравнений непротиворечива (имеет решение) только тогда, когда все компоненты тензора напряжений, входящие в неё, равны нулю. Поэтому равны нулю как диагональные $\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0$, так и недиагональные компоненты тензора напряжений, т.е. $\sigma_{21} = \sigma_{12} = 0$, $\sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$. Следовательно, единственной компонентой тензора напряжений, **которая может быть отлична от нуля на боковой поверхности стержня, а поэтому и внутри него, является компонента σ_{22} . Величину этой компоненты можно определить из граничных условий на торце стержня, где приложена растягивающая сила F_2 или единичная поверхностная сила $\sigma_2^{(n_2)}$, равная

$$\sigma_2^{(n_2)} = \sigma_{2k} n_k = P. \quad (5.3.3)$$

Поскольку для элемента площади торца $n_1 = n_3 = 0$, но $n_2 = 1$, из (5.3.3) следует:

$$\sigma_{22} = P. \quad (5.3.4)$$

Теперь можно найти компоненты тензора деформаций, используя закон Гука (5.2.4). Действительно, для однородного стержня, как показано выше, при $i \neq k$ все недиагональные элементы тензора напряжений σ_{ik} равны нулю, также равны нулю и недиагональные элементы тензора деформаций ε_{ik} согласно (5.2.4). Для диагональных ($i = k$) элементов ε_{ik} , поскольку $\sigma_{22} = P$, из (5.2.4) следует:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\kappa} - \frac{1}{2\mu} \right) P, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\kappa} + \frac{1}{\mu} \right) P. \quad (5.3.5)$$

5.3.2. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона - феноменологические коэффициенты

Компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{11} = du_1 / dx_1$, $\varepsilon_{33} = du_3 / dx_3$ определяют *относительное сжатие* стержня в поперечном направлении, а компонента тензора деформаций $\varepsilon_{22} = du_2 / dx_2$ определяет *относительное удлинение* стержня вдоль оси x_2 . Из (5.3.5) следует:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = \frac{2\mu - 3\kappa}{18\mu\kappa} P, \quad \varepsilon_{22} = \frac{P}{E}, \quad E = \frac{9\kappa\mu}{3\kappa + \mu}. \quad (5.3.6)$$

Здесь величину E называют *модулем Юнга*; он имеет размерность давления, т. е. размерность силы, делённой на площадь. По определению (5.3.6) модуль Юнга – это такая приложенная к единице поверхности торца стержня сила растяжения P , при которой относительное удлинение стержня равно 1.

Отношение относительного поперечного сжатия к относительному продольному растяжению называют *коэффициентом Пуассона* и обозначают как

$$\sigma = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\kappa - 2\mu}{3\kappa + \mu}. \quad (5.3.7)$$

Поскольку, как показано выше, модуль всестороннего сжатия κ и модуль сдвига μ всегда положительны, то из (5.3.7) видно, что коэффициент Пуассона может изменяться в пределах от -1, когда тело не сопротивляется сжатию ($\kappa = 0$), до 1/2, когда тело не сопротивляется сдвигу ($\mu = 0$). Следовательно, коэффициент Пуассона изменяется в пределах $-1 < \sigma < 1/2$. В действительности же, как показывает опыт, коэффициент Пуассона изменяется от нуля до 1/2, т.к. в природе неизвестны тела, имеющие отрицательное значение коэффициента Пуассона, т. е. неизвестны тела, у которых увеличивались бы поперечные

размеры при их растяжении. Коэффициент Пуассона, близкий к $1/2$, наблюдается у тел типа резины, у которых модуль сдвига очень мал. Таким образом, для реальных тел справедливо неравенство

$$0 < \sigma < \frac{1}{2}.$$

Пользуясь формулами (5.1.3), (5.3.6) и (5.3.7), можно выразить модуль всестороннего сжатия κ , модуль сдвига μ и коэффициент Ламэ λ через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона σ с помощью формул:

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad \lambda = \frac{\sigma E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}. \quad (5.3.8)$$

Очевидно, что все предыдущие соотношения между ε_{ik} и σ_{ik} могут быть записаны с применением только модуля Юнга E и коэффициента Пуассона σ .

Таким образом, два из любых введенных коэффициентов полностью характеризуют упругие свойства среды. В механике сплошных сред они являются *феноменологическими* коэффициентами, определяемыми из опыта. Необходимо лишь выбрать опыт, из которого эти коэффициенты извлекались бы наиболее просто и надежно, без каких-либо приближений теории опыта. Разумность введения новых модулей Юнга и Пуассона подтверждается чистотой и простотой опыта, из которого они могут быть определены. Как показано выше, они могут быть получены из простых опытов по растяжению стержней. Для этого достаточно измерить лишь изменение продольных и поперечных размеров стержней при растяжении. Очевидно, что опыт по растяжению стержня не является единственным, из которого можно определить эти феноменологические коэффициенты, тем более не из каждого материала можно изготовить стержень.

Конечно, зная силы, действующие между молекулами или атомами, составляющими тело, и характер их движения, можно теоретически вычислить эти коэффициенты, но это уже предмет не механики сплошных сред, а некоторой микроскопической теории. В механике же сплошных сред модуль Юнга и коэффициент Пуассона должны быть определены из опыта.

Относительное изменение объема стержня при растяжении согласно (2.3.4) и (5.3.5) равно

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii} = \frac{1}{3} \frac{P}{\kappa}. \quad (5.3.9)$$

Из сравнения данного результата с изменением относительного объема при всестороннем равномерном сжатии (5.2.6) видно, что при одноосном растяжении относительное изменение объема в три раза меньше, чем при

всестороннем сжатии. Различие знаков в определениях (5.2.6) и (5.3.9) обусловлено противоположным направлением действия внешних сил на поверхность тела.

Изменение свободной (упругой) энергии единицы объёма стержня при растяжении согласно (5.2.8), (5.2.3) и (5.3.5) равно

$$\Delta F = \frac{1}{2} \sigma_{22} \varepsilon_{22} = \frac{1}{2} \frac{P^2}{E}. \quad (5.3.9)$$

5.4. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

5.4.1. Тензоры деформаций и напряжений при неизотермическом деформировании

Соотношение (5.1.3) определяет свободную энергию единицы объёма деформируемого тела при изотермическом деформировании. Теперь определим свободную энергию единицы объёма тела при деформациях, сопровождающихся изменением его температуры. Температура может изменяться как вследствие подвода или отвода тепла при помощи внешних по отношению к телу источников, так и в результате самого процесса деформирования.

Пусть в недеформированном состоянии температура рассматриваемого элемента объёма тела равна T_0 . При изменении температуры этот элемент объёма испытывает температурную деформацию, даже если внешние силы отсутствуют. Поэтому в разложении свободной энергии по компонентам тензора деформаций ε_{ik} теперь могут быть и линейные по этим компонентам слагаемые, которые должны исчезать при $T = T_0$. Если деформации вследствие изменения температуры малы, то можно считать их просто пропорциональными изменению самой температуры $\Delta T = T - T_0$. Для простоты рассмотрим изотропное тело, характеризуемое лишь одним коэффициентом линейного α или объёмного 3α теплового расширения. Так как свободная энергия является скалярной величиной, то единственным выражением для дополнительного слагаемого ΔF^T в определении свободной энергии, связанного с изменением температуры, будет выражение вида

$$\Delta F^T = A(T - T_0)\varepsilon_{ii} = A(T - T_0)\delta_{ik}\varepsilon_{ik}, \quad (5.4.1)$$

где A – некоторый коэффициент, независящий в первом приближении от температуры. Тогда в соответствии с (5.1.3) и (5.4.1) свободная энергия $F(T)$ равна

$$F(T) = F_0(T_0) + \frac{\kappa}{2}\varepsilon_{ii}^2 + \mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll}\right)^2 + A(T - T_0)\delta_{ik}\varepsilon_{ik}. \quad (5.4.2)$$

Дифференцируя полученное выражение по ε_{ik} , как и в п. 5.2, с учетом (5.2.3) для тензора напряжений σ_{ik} имеем

$$\sigma_{ik} = \kappa\delta_{ik}\varepsilon_{ll} + 2\mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll}\right) + A(T - T_0)\delta_{ik}. \quad (5.4.3)$$

Для определения коэффициента A через уже известные величины воспользуемся тем фактом, что при свободном однородном тепловом

расширении тела (при отсутствии внешних сил) внутренние напряжения должны отсутствовать, т. е. $\sigma_{ik} = 0$. В этом случае из (5.4.3) следует

$$0 = k\varepsilon_{ii}\delta_{ik} + 2\mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}\delta_{ik}\right) + A(T - T_0)\delta_{ik}.$$

Если данное равенство умножить на δ_{ik} , то второе слагаемое обращается в нуль, и, используя (2.4.4), получим

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{A}{\kappa}(T - T_0) \equiv \varepsilon_{ii}^T = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_P = 3\alpha(T - T_0), \quad A = -3\alpha\kappa. \quad (5.4.4)$$

Таким образом, тензор напряжений σ_{ik} , учитывающий и температурную деформацию для изотропного тела, имеет вид

$$\sigma_{ik} = \kappa\varepsilon_{ii}\delta_{ik} + 2\mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}\delta_{ik}\right) - 3\alpha\kappa(T - T_0)\delta_{ik}. \quad (5.4.5)$$

Здесь последнее слагаемое описывает напряжения, связанные с изменением температуры тела. Следует иметь в виду, что это слагаемое получено в отсутствие действия внешних сил. Повторяя вывод закона Гука для тензора деформаций, получим формулу

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{9\kappa}\sigma_{ii}\delta_{ik} + \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\sigma_{ii}\delta_{ik}\right) + \alpha(T - T_0)\delta_{ik}. \quad (5.4.6)$$

5.4.2. Адиабатические и изотермические модули

Если деформирование тела происходит при постоянной температуре, то свободная энергия определяется согласно (5.1.3). Модули κ и μ в (5.1.3) называют *изотермическими модулями*. Однако деформация может совершаться и адиабатически, т. е. без притока тепла в элемент объёма извне и без передачи тепла из выделенного элемента соседним или, иначе говоря, при его постоянной энтропии (например, при быстром деформировании). В этом случае коэффициенты κ и μ имеют другое, *адиабатическое* значение при малых деформациях, вообще говоря, мало отличающееся от их изотермических значений.

Вычислим значение температуры тела при адиабатической деформации, т. е. при $S_V = \text{const}$. Для этого воспользуемся соотношением (4.2.3), из которого следует

$$S_V = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ik}}.$$

Дифференцируя (5.4.2) по температуре, получим с точностью до слагаемых первого порядка малости по компонентам тензора деформации:

$$S_V(T) = S_o(T) + 3\alpha k \varepsilon_{ii}. \quad (5.4.7)$$

Здесь $S_V(T)$ – энтропия единицы объёма при температуре T после деформации, $S_o(T)$ – энтропия единицы объёма при температуре T в деформированном

состоянии без температурных деформаций. Следовательно, $S_o(T)$ получено дифференцированием свободной энергии при $\varepsilon_{ii} = 0$, т. е. при постоянном объёме.

При адиабатическом деформировании энтропия единицы объёма должна оставаться постоянной, т. е.

$$S_V(T) = S_o(T_o) = S_o(T) + 3\alpha k \varepsilon_{ii}. \quad (5.4.8)$$

Здесь $S_o(T_o)$ – энтропия единицы объёма при температуре T_o и при отсутствии деформаций.

Разлагая разность энтропий в ряд по степеням $(T - T_o)$ при постоянном объёме V , ограничиваясь линейными по $(T - T_o)$ слагаемыми и используя термодинамическое определение удельной теплоёмкости при постоянном объёме C_V , получаем

$$S_o(T) - S_o(T_o) = \left(\frac{\partial S_V}{\partial T} \right)_V (T - T_o) + \dots = \frac{C_V}{T} (T - T_o). \quad (5.4.9)$$

Таким образом, из сравнения (5.4.8) и (5.4.9) находим, что изменение температуры элемента объёма при адиабатическом деформировании равно

$$T - T_o = -\frac{3\alpha k T}{C_V} \varepsilon_{ii}. \quad (5.4.10)$$

Подставляя в (5.4.3) разность температур $T - T_o$ согласно (5.4.10), получим аналогичное (5.2.3) выражение для σ_{ik} с новым модулем сжатия κ_{ad} , соответствующим адиабатическому процессу деформирования:

$$\sigma_{ik} = \kappa_{ad} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right). \quad (5.4.11)$$

Здесь *адиабатический* модуль сжатия κ_{ad} определяется формулой

$$\kappa_{ad} = \frac{9\alpha^2 k^2 T}{C_V} + \kappa. \quad (5.4.12)$$

Для изотермического деформирования в соответствии с (5.2.7) и для адиабатического деформирования по аналогии с (5.2.7) можно записать:

$$\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{\kappa}, \quad \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = -\frac{1}{\kappa_{ad}}. \quad (5.4.13)$$

Если первую величину в (5.4.13), как отмечалось ранее называют изотермической сжимаемостью, то вторую величину в (5.4.13) называют *адиабатической сжимаемостью*.

Используя правила преобразования термодинамических величин *) и полученные соотношения (5.4.12), (5.4.13), легко получить формулы, связывающие адиабатический и изотермический модули:

$$\frac{C_V}{C_P} = \frac{\kappa}{\kappa_{ad}} = \frac{1}{\gamma}, \quad \frac{1}{\kappa_{ad}} = \frac{1}{\kappa} - \frac{9\alpha^2 T}{C_P}. \quad (5.4.14)$$

Здесь γ – показатель адиабаты. Нетрудно видеть, что $\kappa_{ad} > \kappa$. Следовательно, $(\Delta V/V)_S < (\Delta V/V)_T$.

Очевидно, эти изменения не касаются модуля сдвига, т.е. модуль сдвига адиабатический равен изотермическому модулю сдвига ($\mu_{ad} = \mu$). Пользуясь формулами (5.3.8) и (5.4.14), можно получить соотношения между адиабатическим и изотермическим модулями Юнга и коэффициентами Пуассона.

При адиабатическом деформировании связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций будет иметь вид, аналогичный (5.2.3) и (5.2.4):

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= \kappa_{ad} \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ll} \delta_{ik} \right), \\ \varepsilon_{ik} &= \frac{1}{9\kappa_{ad}} \sigma_{ll} \delta_{ik} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ik} \right), \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

т. е. уравнения Гука имеют прежний вид (5.2.3) и (5.2.4), только в них следует изотермический модуль сжатия κ заменить адиабатическим κ_{ad} по формуле (5.4.14).

*) Действительно, пользуясь известным правилом преобразования термодинамических величин, можно получить следующие соотношения:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = - \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_V / \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_P, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V / \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P.$$

Деля первое равенство на второе, получаем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S / \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V / \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = \frac{C_V}{C_P} = \frac{\kappa}{\kappa_{ad}}.$$

6. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

6.1. ТЕНЗОР СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ

Как следует из теоремы Коши-Гельмгольца (п. 2.5), общее перемещение достаточно малого элемента деформируемого тела вблизи точки $Q(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$ в окрестности произвольной точки $P(\mathbf{r})$ может быть представлено в виде

$$u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + d u_i = u_i(\mathbf{r}) + \varphi_{ik} d x_k + \varepsilon_{ik} d x_k. \quad (6.1.1)$$

Если это малое перемещение происходит за физически малый промежуток времени Δt , то, деля каждое слагаемое равенства (6.1.1) на Δt , в пределе $\Delta t \rightarrow dt$ будем иметь

$$v_i = v_{0i} + \dot{\varphi}_{ik} d x_k + \dot{\varepsilon}_{ik} d x_k. \quad (6.1.2)$$

Здесь v_i есть i -ая компонента скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ точки $Q(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$, находящейся в дифференциальной окрестности первого порядка около точки $P(\mathbf{r})$; v_{0i} — i -ая компонента скорости точки P как полюса; величины $\dot{\varphi}_{ik}$ и $\dot{\varepsilon}_{ik}$ определяются соотношениями:

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (6.1.3)$$

В (6.1.3) величины $\dot{\varphi}_{ik}$ и $\dot{\varepsilon}_{ik}$ называют *тензорами скоростей поворота* и *скоростей деформации* соответственно. Как компоненты φ_{ik} определяют вектор поворота $\boldsymbol{\varphi}$, так и компоненты $\dot{\varphi}_{ik}$ определяют вектор скорости поворота $\boldsymbol{\omega}$. Величины компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ характеризуют модуль *угловой скорости поворота* ω окрестности точки $P(\mathbf{r})$.

Нетрудно получить из (2.2.7) и (2.3.5) по аналогии с (6.1.2) следующие соотношения:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}, \quad \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \text{div } \mathbf{v}. \quad (6.1.4)$$

В векторном виде равенство (6.1.2) можно записать как:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}] + d\mathbf{v}_{\text{деф}}. \quad (6.1.5)$$

Если во время движения изменяется и температура, то деформационная часть скорости должна включать и скорость деформации вследствие изменения температуры, пропорциональную $\partial T / \partial t$, т. е.

$$d v_i^T = \dot{\varepsilon}_{ik}^T d x_k = \alpha_{ik} (\partial T / \partial t) d x_k. \quad (6.1.6)$$

6.2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПО ВРЕМЕНИ ИНТЕГРАЛА ПО ПОДВИЖНОМУ ОБЪЁМУ

Получим формулу дифференцирования по времени интеграла по некоторому движущемуся в пространстве объёму. Пусть $f(\mathbf{r}, t)$ есть произвольная функция координат и времени (это может быть масса, импульс, энергия и т. п.). Рассмотрим производную по времени от некоторого интеграла по объёму, т. е. $\frac{d}{dt} \int_{(V)} f(\mathbf{r}, t) dV$. Здесь объём V есть некоторый *индивидуальный*

объём, который состоит из одних и тех же частиц, в процессе движения среды он может изменять как свою форму, так и величину. Характерной особенностью индивидуального объёма является то обстоятельство, что через его поверхность нет потока вещества, т.к. он состоит в течение всего процесса движения из одних и тех же частиц.

Полная производная по времени определяет изменение с течением времени выше приведенного интеграла не только вследствие изменения с течением времени подынтегральной функции f , но также и вследствие изменения в процессе движения самого объёма V . Вычислим указанную выше производную по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} f dV &= \int_{(V)} \left(\frac{df}{dt} dV + f \frac{d}{dt} dV \right) = \int_{(V)} \left(\frac{df}{dt} dV + f \frac{d}{dt} (dx_1 dx_2 dx_3) \right) = \\ &= \int_{(V)} \left(\frac{df}{dt} dV + f (d\nu_1 dx_2 dx_3 + dx_1 d\nu_2 dx_3 + dx_1 dx_2 d\nu_3) \right). \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Если второе, третье и четвёртое слагаемые в (6.2.1) умножить и разделить соответственно на dx_1 , dx_2 и dx_3 , то их сумма даёт $f \operatorname{div} \mathbf{v} dV$.

Таким образом, дифференцирование по времени от интеграла по индивидуальному объёму необходимо выполнять по формуле

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} f dV = \int_{(V)} \left(\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV. \quad (6.2.2)$$

6.3. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

6.3.1. Различные формы уравнения непрерывности

Используя формулу (6.2.2), нетрудно получить уравнение, которое представляет собой закон сохранения массы любого индивидуального объёма среды, состоящего из одних и тех же частиц. Выделим в движущейся среде

некоторый индивидуальный объём V вещества. Если $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ есть массовая плотность, то масса M вещества в этом объёме равна

$$M = \int_{(V)} \rho(\mathbf{r}, t) dV. \quad (6.3.1)$$

В соответствии с определением индивидуального объёма эта величина должна сохраняться с течением времени в процессе движения, т. е.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho(\mathbf{r}, t) dV = 0.$$

Пользуясь формулой (6.2.2), последнее равенство можно записать в следующем виде

$$\int_{(V)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (6.3.2)$$

Поскольку равенство (6.3.2) должно выполняться для произвольного элемента объёма, то для его выполнения необходимо равенство нулю подынтегрального выражения, т. е.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (6.3.3)$$

Уравнение (6.3.3) называют *уравнением непрерывности* или *уравнением сохранения массы* – это первое основное уравнение сохранения механики сплошных сред.

Поскольку индивидуальный объём V перемещается в физическом пространстве, то координаты функции $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ следует рассматривать как координаты движущейся индивидуальной частицы, неявно зависящие от времени. Поэтому полную производную плотности по времени можно записать следующим образом:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \rho. \quad (6.3.4)$$

Учитывая (6.3.4) и соотношение из векторной алгебры $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$, уравнение непрерывности (6.3.3) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = 0. \quad (6.3.5)$$

6.3.2. Интегральная и дифференциальная форма уравнения непрерывности с источниками и стоками

Вывод уравнения непрерывности, как это ясно из самого вывода, справедлив, если внутри рассматриваемого индивидуального объёма нет источников или стоков вещества. Если внутри объёма V имеются источники или стоки мощностью Q_i , то уравнение непрерывности в интегральной форме имеет вид

$$\frac{dM}{dt} = \int_{(V)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (6.3.6)$$

Правая часть уравнения (6.3.6) есть алгебраическая сумма мощностей источников (+) и стоков (-). Мощность источника или стока Q_i равна количеству вещества, поставляемого источником или отводимого стоком в единицу времени. Источники или стоки могут быть распределены в пространстве как дискретно, так и непрерывно. Например, если рассматривать уравнение сохранения числа нейтронов в делящемся материале, то в интегральной форме это уравнение можно, очевидно, записать в виде

$$\int_{(V)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = \int_{(V)} \nu dV. \quad (6.3.7)$$

Здесь ρ – число нейтронов в единице объёма, \mathbf{v} – скорость диффузии нейтронов, ν – разность числа нейтронов, рождающихся и поглощающихся в среде в единице объёма в единицу времени.

Нетрудно видеть из (6.3.7), что уравнение непрерывности с непрерывными в пространстве источниками или стоками можно записать и в дифференциальной форме. Однако этого сделать нельзя в случае их дискретного распределения. Поэтому уравнение непрерывности в дифференциальной форме (6.3.5) справедливо во всех точках пространства, занятого средой, кроме точек, в которых расположены источники и стоки. Интегральная форма уравнения непрерывности является более общей, поскольку позволяет записать его в любом случае.

Для несжимаемой среды плотность вещества не зависит ни от координат, ни от времени, т. е. $(\partial \rho / \partial t) = 0$, $(\partial \rho / \partial x_i) = 0$ и, следовательно, имеем

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \equiv 0. \quad (6.3.8)$$

Тогда из (6.3.8) следует, что для всех точек пространства, занимаемого несжимаемой средой (кроме точек пространства, в которых расположены источники и стоки), справедливо выражение

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (6.3.9)$$

Уравнение (6.3.9) называют *условием несжимаемости сплошной среды*.

Для стационарного состояния, когда плотность ρ не зависит от времени, но может зависеть от координат, из (6.3.5) имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (6.3.10)$$

Уравнение (6.3.10) называют *условием стационарного движения сплошной среды*.

6.4. УРАВНЕНИЕ СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

6.4.1. Вывод уравнения сохранения количества движения

Из курса общей физики известно, что изменение в единицу времени импульса любой частицы определяется действующей на неё силой (второй закон Ньютона). Тогда изменение во времени полного импульса $\mathbf{\Pi}$ всех элементов объёма сплошной среды определяется результирующей всех сил, действующих в этом объёме, т. е.

$$\frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = \mathbf{F} = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S. \quad (6.4.1)$$

Если $\rho \mathbf{v}$ есть импульс (количество движения) единицы объёма, то полный импульс $\mathbf{\Pi}$, i -ая компонента полного импульса Π_i некоторого индивидуального объёма V сплошной среды и его полная производная по времени равны:

$$\mathbf{\Pi} = \int_{(V)} \rho \mathbf{v} dV, \quad \Pi_i = \int_{(V)} \rho v_i dV, \quad \frac{d\Pi_i}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho v_i dV. \quad (6.4.2)$$

Пользуясь уравнением (6.2.2), получаем

$$\frac{d\Pi_i}{dt} = \int_{(V)} \left(\frac{d\rho v_i}{dt} + \rho v_i \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = \int_{(V)} \rho \frac{dv_i}{dt} dV + \int_{(V)} v_i \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV.$$

Второй интеграл в соответствии с уравнением непрерывности (6.3.5) равен нулю, поэтому имеем

$$\frac{d\Pi_i}{dt} = \int_{(V)} \rho \frac{dv_i}{dt} dV. \quad (6.4.3)$$

Найдем результирующую силу \mathbf{F} , действующую на рассматриваемый объём V . Объёмные силы можно найти по формуле

$$F_{Vi} = \int_{(V)} f_i^v dV = \int_{(V)} \rho f_i^m dV. \quad (6.4.4)$$

где f_i^m – напряженность массовой силы (см. п. 3.1.1).

Результирующая поверхностных сил, действующих на единицу объёма, была определена ранее формулой (3.2.4) и равна $f_{Si} = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k$. Полная результирующая поверхностная сила F_{Si} , действующая на объём V , равна

$$F_{Si} = \int_{(V)} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV. \quad (6.4.5)$$

Подставляя уравнения (6.4.3–5) в уравнение (6.4.1) и собирая все члены в левую часть, получим следующее уравнение:

$$\int_{(V)} \left(\rho \frac{dv_i}{dt} - \rho f_i^m - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) dV = 0.$$

Данное уравнение должно выполняться для любого индивидуального объёма. Следовательно, должно равняться нулю подынтегральное выражение, т.е.

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho \cdot f_i^m + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (6.4.7)$$

Уравнение (6.4.7) называют *уравнением сохранения количества движения* или просто *уравнением движения сплошной среды*. Данное уравнение, по существу, является законом Ньютона, записанным для единицы объёма сплошной среды (массы ρ). Левая часть уравнения (6.4.7) представляет собой действующую на единицу объёма ньютоновскую силу и ускоряющую его движение, а правая – сумму массовых и поверхностных сил, действующих на ту же единицу объёма среды и определяющих эту ньютоновскую силу.

6.4.2. Субстанциональное и локальное описание движения сплошной среды

Уравнение движения в форме (6.4.7) можно применить для описания движения отдельной индивидуальной частицы. Зная начальные координаты и компоненты скорости этой частицы в некоторый момент времени, можно, решив это уравнение, найти его координаты в любой момент времени, т.е. найти её траекторию движения. Зная траектории движения всех частиц, составляющих данное сплошное тело, можно составить полное представление о характере движения сплошной среды в целом. Такой подход к описанию движения сплошной среды называют *субстанциональным* или описанием в представлении Лагранжа.

Однако такой способ описания не всегда удобен. Для составления полного представления о характере движения сплошной среды достаточно знать, как изменяется скорость в данной точке неподвижного пространства, через которую с течением времени будут проходить, вообще говоря, различные индивидуальные частицы сплошной среды. Вместе со сведениями о таких

изменениях в различных точках пространства получается довольно полное представление о характере движения. Такое описание движения называют *локальным* или описанием в представлении Эйлера. Субстанциональный подход ввиду большой сложности неудобен еще и тем (особенно в гидродинамике), что в процессе достаточно длительного движения рассматриваемая индивидуальная частица может настолько сильно деформироваться, что трудно о ней говорить как о частице, форма которой не влияет на результаты рассмотрения.

Поскольку $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, то полную производную скорости по времени в (6.4.7) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}, \quad \frac{dx_i}{dt} = v_i.$$

Поэтому последнее соотношение можно записать:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (6.4.8)$$

Из формулы (6.4.8) следует, что полное изменение во времени скорости индивидуальной частицы можно разделить на две части. Первая часть представляет собой изменение скорости в данной неподвижной точке пространства с течением времени. Вторая часть описывает изменение скорости при движении индивидуальной частицы из одной точки пространства в другую точку в данный момент времени.

Уравнение движения (6.4.7) с учетом (6.4.8) имеет вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = f_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (6.4.9)$$

Здесь и в дальнейшем $f_i \equiv f_i^m$. В векторном виде это уравнение можно записать:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \vec{\sigma}, \quad (\vec{\sigma})_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (6.4.10)$$

В уравнении (6.4.10) запись второго слагаемого в правой части чисто условная, смысл которой дается аналогичным слагаемым в уравнении (6.4.9).

6.5. УРАВНЕНИЕ СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Из курса общей физики известно, что изменение во времени полного момента \mathbf{M} количества движения некоторого объема V относительно некоторой точки определяется моментом \mathbf{K} всех сил, действующих на этот объем относительно той же точки. Математическая запись этого закона следующая:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}. \quad (6.5.1)$$

Если $[\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}]$ есть момент количества движения единицы объёма относительно точки, находящейся на расстоянии \mathbf{r} от начала координат, то полный момент \mathbf{M} количества движения всех элементов некоторого индивидуального объёма тела будет равен

$$\mathbf{M} = \int_{(V)} [\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}] dV. \quad (6.5.2)$$

Индивидуальный объём, состоящий из одних и тех же частиц, может изменяться в процессе движения. Найдем производную $d\mathbf{M}/dt$, воспользовавшись формулой преобразования (6.2.2):

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{(V)} [\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}] dV = \int_{(V)} \rho \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] dV + \int_{(V)} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV.$$

Второй интеграл здесь равен нулю в соответствии с уравнением непрерывности. Поэтому имеем

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \int_{(V)} [\mathbf{v} \times \mathbf{v}] \rho dV + \int_{(V)} \rho \frac{d}{dt} \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] dV.$$

Здесь первый интеграл равен нулю из-за векторного произведения вектора самого на себя. Поэтому изменение количества движения можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \int_{(V)} \rho \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] dV. \quad (6.5.3)$$

Формулу (6.5.3) для i -ой компоненты момента \mathbf{M} можно записать в виде

$$\frac{dM_i}{dt} = \int_{(V)} \rho \varepsilon_{ikl} x_k \frac{dv_l}{dt} dV. \quad (6.5.4)$$

Здесь ε_{ikl} — антисимметричный тензор третьего ранга или *символ Леви-Чивита* ^{*}).

Далее рассмотрим момент всех сил, действующих на выделенный индивидуальный объём. Разделим действующие силы на силы объёмные и силы поверхностные. Тогда полный момент сил равен

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_V + \mathbf{K}_S. \quad (6.5.5)$$

Момент K_V объёмных сил можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{K}_V = \int_{(V)} [\mathbf{r} \times \mathbf{f}] \rho dV, \quad K_{Vi} = \int_{(V)} \varepsilon_{ikl} x_k f_l \rho dV. \quad (6.5.6)$$

Для поверхностных сил имеем

$$\mathbf{K}_S = \oint_{(S)} [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}^{(n)}] dS, \quad K_{Si} = \oint_{(S)} \varepsilon_{ikl} x_k \sigma_l^{(n)} dS. \quad (6.5.7)$$

Поскольку для поверхностных напряжений справедливо соотношение $\sigma_l^{(n)} = \sigma_{lm} n_m$, то момент поверхностных сил K_{Si} , пользуясь теоремой Гаусса-Остроградского, можно записать в форме:

$$\begin{aligned} K_{Si} &= \oint_{(S)} \varepsilon_{ikl} x_k \sigma_{lm} dS_m = \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial x_m} (\varepsilon_{ikl} x_k \sigma_{lm}) dV; \\ K_{Si} &= \int_{(V)} \varepsilon_{ikl} \left(x_k \frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial x_m} + \sigma_{lm} \delta_{km} \right) dV. \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

После подстановки в исходное уравнение (6.5.1) определений (6.5.4–6) и (6.5.8), перегруппировки слагаемых получаем уравнение

$$\int_{(V)} \left[\varepsilon_{ikl} x_k \rho \left(\frac{dv_l}{dt} - f_l - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial x_m} \right) - \varepsilon_{ikl} \sigma_{lm} \delta_{km} \right] dV = 0.$$

Выражение в круглых скобках здесь равно нулю вследствие уравнения сохранения количества движения (6.4.9). Из остальной части интеграла следует

$$\varepsilon_{ikl} \sigma_{lm} \delta_{km} = 0 = \varepsilon_{iml} \sigma_{lm}.$$

Так как в правой части этого равенства значки дважды повторяются, то их можно поменять местами

$$\varepsilon_{iml} \sigma_{lm} = 0 = -\varepsilon_{ilm} \sigma_{ml}.$$

Здесь знак (-) поставлен в соответствие с 4-м свойством символа Леви-Чивита.

Тогда можно записать следующее равенство:

$$\varepsilon_{iml} \sigma_{lm} + \varepsilon_{ilm} \sigma_{ml} = 0.$$

*) Свойства символа Леви-Чивита:

1. $\varepsilon_{ikl} = 0$, если среди индексов i, k, l есть два одинаковых (например, $I = k, I = l, k = l$);

2. $\varepsilon_{ikl} = 1$, если упорядоченная система индексов (1, 2, 3) получается чётным числом перестановок;

3. $\varepsilon_{ikl} = -1$, если упорядоченная система индексов (1, 2, 3) получается нечётным числом перестановок;

4. $\varepsilon_{ikl} = -\varepsilon_{ilk}$;

5. $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \varepsilon_{ikl} A_k B_l$, $rot_i \mathbf{A} = [\nabla \times \mathbf{A}]_i = \varepsilon_{ikl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k}$;

6. Справедливы также следующие соотношения:

$$\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{imn} = \delta_{km} \delta_{ln} - \delta_{kn} \delta_{ml}, \quad \varepsilon_{ikl} \delta_{km} = \varepsilon_{iml}.$$

Во втором слагаемом в символе Леви-Чивита ε_{ilm} можно сделать одну перестановку индексов l и m , т. е. $\varepsilon_{ilm} = -\varepsilon_{iml}$. Тогда имеем

$$\varepsilon_{iml}(\sigma_{lm} - \sigma_{ml}) = 0.$$

При произвольных ε_{iml} последнее равенство будет выполняться только тогда, когда

$$\sigma_{lm} = \sigma_{ml}. \quad (6.5.9)$$

Таким образом, из (6.5.9) следует, что тензор напряжений σ_{lm} , как отмечалось ранее в п. 3.1.3, является симметричным тензором второго ранга. Этот вывод следует из уравнения сохранения момента количества движения сплошной среды.

6.6. ТЕНЗОР ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ИМПУЛЬСА

Найдём плотность потока импульса (количества движения) в некоторой фиксированной точке пространства. Для этого рассмотрим некоторый объём V , неподвижный в пространстве, и найдём изменение во времени импульса среды в этом объёме. Очевидно, импульс среды в рассматриваемом объёме равен $\Pi = \int_{(V)} \rho v_i dV$. Рассмотрим изменение во времени i -ой компоненты импульса.

Можно полагать, что изменение импульса в единицу времени в неподвижном объёме V равно потоку импульса через поверхность S , ограничивающую этот объём. Плотность потока некоторого скаляра является вектором. Плотность потока вектора (импульса) является тензором второго ранга. Поэтому можно записать следующее уравнение баланса (сохранения) импульса в неподвижном объёме V в проекции на ось i :

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho v_i dV = - \oint_{(S)} \Pi_{ik} dS_k. \quad (6.6.1)$$

Здесь величина Π_{ik} есть тензор плотности потока импульса, т.е. это плотность потока i -ой компоненты импульса через единичную площадку, перпендикулярную оси k . Определим явный вид данного тензора в отсутствие объёмных сил. Для этого преобразуем левую часть уравнения (6.6.1), пользуясь уравнением непрерывности (6.3.5) и уравнением движения в отсутствие действия объёмных сил (6.4.9), т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho v_i dV = \int_{(V)} \left(v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) dV = \int_{(V)} \left(-v_i \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} - \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) dV.$$

Первые два слагаемых в правой части можно записать в виде дивергенции тензора $\rho v_i v_k$ и затем можно воспользоваться теоремой Гаусса-Остроградского

для перехода от интегрирования по объёму V к интегрированию по замкнутой поверхности S , т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho v_i dV = - \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) dV = - \oint_{(S)} (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) dS_k. \quad (6.6.2)$$

Из сравнения (6.6.1) и (6.6.2) находим

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}. \quad (6.6.3)$$

Из (6.6.3) видно, что тензор плотности потока импульса Π_{ik} есть симметричный тензор, характеризующий перенос импульса и связанный с перемещением самой жидкости.

Если учесть действие массовых сил f_i , то уравнение сохранения импульса можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i. \quad (6.6.4)$$

Из (6.6.4) следует, что изменение импульса единицы объёма среды в заданной точке пространства происходит как вследствие поступления импульса из соседних частей среды, так и вследствие действия внешних массовых сил.

6.7. УРАВНЕНИЕ СОХРАНЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим индивидуальный объём V сплошной среды. Для него справедливо основное термодинамическое равенство $dQ_V = dE_{\text{вн}} + \int_{(V)} dA_V dV$. Но согласно (4.1.5) $dA_V = -\sigma_{ik} d\varepsilon_{ik}$, поэтому

$$dE_{\text{вн}} = dQ_V + \int_{(V)} \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik} dV.$$

Если разделить данное равенство на элемент времени Δt и перейти к пределу $\Delta t \rightarrow dt$, то получим

$$\frac{dE_{\text{вн}}}{dt} = \frac{dQ_V}{dt} + \int_{(V)} \sigma_{ik} \dot{\varepsilon}_{ik} dV. \quad (6.7.1)$$

Второе слагаемое в (6.7.1), включающее в себя тензор скоростей деформаций, может быть преобразовано следующим образом:

$$\sigma_{ik} \dot{\varepsilon}_{ik} = \sigma_{ik} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ik} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (6.7.2)$$

Удобно перейти к внутренней энергии единицы массы $\varepsilon_{\text{вн}}$. Рассмотрим некоторый индивидуальный объём V сплошной среды и запишем изменение его внутренней энергии с течением времени

$$\frac{dE_{\text{вн}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \varepsilon_{\text{вн}} dV = \int_{(V)} \left[\left(\rho \frac{d\varepsilon_{\text{вн}}}{dt} + \varepsilon_{\text{вн}} \frac{d\rho}{dt} \right) + \rho \varepsilon_{\text{вн}} \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV. \quad (6.7.3)$$

Здесь второе и третье слагаемые в сумме равны нулю в соответствии с уравнением непрерывности, поэтому имеем

$$\frac{dE_{\text{вн}}}{dt} = \int_{(V)} \rho \frac{d\varepsilon_{\text{вн}}}{dt} dV. \quad (6.7.4)$$

Аналогично работу сил внутренних напряжений, совершаемую в единицу времени в рассматриваемом объёме, запишем в виде

$$\int_V \frac{dA_V}{dt} dV = - \int_V \sigma_{ik} \cdot \varepsilon dV = - \int_V \sigma_{ik} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV.$$

Рассмотрим изменение количества тепла, поступающего внутрь некоторого индивидуального объёма от внешних источников с течением времени. Если внутри объёма нет источников или стоков тепла, то тепло может поступать внутрь объёма только через его поверхность. Если \mathbf{q} есть *вектор плотности потока тепла*, то уравнение баланса тепла в объёме V можно записать в форме

$$\frac{dQ_V}{dt} = - \oint_{(S)} \mathbf{q} d\mathbf{S} = - \int_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{q} dV. \quad (6.7.5)$$

Таким образом, *уравнение баланса внутренней энергии* (6.7.1) для индивидуального объёма V с учётом (6.7.4, 5) записывается как

$$\int_{(V)} \left(\rho \frac{d\varepsilon_{\text{вн}}}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) dV = 0. \quad (6.7.6)$$

Равенство (6.7.6) должно выполняться для любого индивидуального объёма. Поэтому из (6.7.6) следует дифференциальное уравнение для изменения внутренней энергии:

$$\rho \frac{d\varepsilon_{\text{вн}}}{dt} = - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (6.7.7)$$

Полную производную от внутренней энергии $\varepsilon_{\text{вн}} = \varepsilon_{\text{вн}}(\mathbf{r}, t)$ по времени можно записать по аналогии с (6.3.4):

$$\frac{d\varepsilon_{\text{вн}}}{dt} = \frac{\partial \varepsilon_{\text{вн}}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \varepsilon_{\text{вн}}. \quad (6.7.8)$$

Из уравнения (6.7.7) следует, что внутренняя энергия единицы объёма изменяется вследствие притока тепла извне и работы сил внутренних напряжений.

Воспользуемся термодинамическим равенством, записанным для единицы массы при всестороннем равномерном сжатии в предположении, что индивидуальным объёмом является удельный объём $V_0 = 1/\rho$:

$$d\varepsilon_{\text{вн}} = dQ_{\text{в}} - PdV = TdS - PdV = TdS + P \frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Разделим это равенство на dt и найдем изменение энтропии единицы объёма во времени, заменив $d\varepsilon_{\text{вн}}/dt$ с помощью (6.7.7). В результате получим

$$\rho T \frac{dS}{dt} = -\frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (6.7.9)$$

Используя (6.7.8) в уравнении (6.7.7) и уравнение непрерывности в форме (6.3.3) для замены первого слагаемого в уравнении (6.7.9), получим два эквивалентных уравнения:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \varepsilon_{\text{вн}}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \varepsilon_{\text{вн}}}{\partial x_k} \right) &= -\frac{dq_k}{dx_k} + \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \\ \rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + v_k \frac{\partial S}{\partial x_k} \right) &= P \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (6.7.10)$$

Очевидно, что первое уравнение (6.7.10) является более общим, так как оно справедливо при любой деформации.

6.8. ВЕКТОР ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ. ВЕКТОР УМОВА - ПОЙТИНГА

Полная энергия $\rho\varepsilon$ единицы объёма среды определяется суммой её внутренней, кинетической и потенциальной энергий, т. е.

$$\rho\varepsilon = \rho(\varepsilon_{\text{вн}} + \varepsilon_{\text{кин}} + \varepsilon_{\text{пот}}), \quad (6.8.1)$$

где ε есть полная энергия единицы массы.

Рассмотрим некоторый неподвижный объём V пространства. Уравнение баланса полной энергии E среды в этом объёме можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} E dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho (\varepsilon_{\text{вн}} + \varepsilon_{\text{кин}} + \varepsilon_{\text{пот}}) dV = - \oint_{(S)} \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.8.2)$$

Здесь вектор \mathbf{I} представляет собой вектор плотности потока полной энергии, а правая часть – полный поток энергии через поверхность S , ограничивающую

объем V . Найдём явное выражение вектора \mathbf{I} . Для этого преобразуем левую часть уравнения (6.8.2):

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho \varepsilon dV = \int_{(V)} \left[\rho \left(\frac{\partial \varepsilon_{\text{вн}}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{\text{кин}}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{\text{ном}}}{\partial t} \right) + (\varepsilon_{\text{вн}} + \varepsilon_{\text{кин}} + \varepsilon_{\text{ном}}) \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV. \quad (6.8.3)$$

Кинетическую энергию единицы массы среды и её производную по времени можно записать в виде:

$$\varepsilon_{\text{кин}} = \frac{v^2}{2} = \frac{v_i v_i}{2}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{\text{кин}}}{\partial t} = v_k \frac{\partial v_k}{\partial t}. \quad (6.8.4)$$

Предположим, что потенциальная энергия единицы массы в данной точке пространства от времени не зависит, т. е. $\partial \varepsilon_{\text{ном}} / \partial t = 0$. Для замены слагаемых в (6.8.3) используем уравнение сохранения внутренней энергии (6.7.10), уравнение непрерывности (6.3.5) и соотношение (6.8.4). В результате получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho \varepsilon dV = \int_{(V)} & \left(-\rho v_k \frac{\partial \varepsilon_{\text{вн}}}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \varepsilon_{\text{вн}} \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} + \right. \\ & \left. + \rho v_k \frac{\partial v_k}{\partial t} - \frac{v_i v_i}{2} \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} - \varepsilon_{\text{ном}} \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} \right) dV. \end{aligned} \quad (6.8.5)$$

Далее сделаем в (6.8.5) очевидные преобразования первого и четвертого, третьего и последнего слагаемых и воспользуемся уравнением движения (6.4.9) для замены $\partial v_k / \partial t$ в подынтегральном выражении. В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho \varepsilon dV = \int_{(V)} & \left(-\frac{\partial q_k}{\partial x_k} - \frac{\partial \rho v_k \varepsilon_{\text{вн}}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_i \sigma_{ik}}{\partial x_k} - v_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho v_i v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \right. \\ & \left. + \rho v_k f_k + v_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \frac{v_i v_i}{2} \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} - \frac{\partial \rho v_k \varepsilon_{\text{ном}}}{\partial x_k} + \rho v_k \frac{\partial \varepsilon_{\text{ном}}}{\partial x_k} \right) dV. \end{aligned} \quad (6.8.6)$$

Предположим, что внешние силы f_k являются потенциальными, т. е. $f_k = -\partial \varepsilon_{\text{ном}} / \partial x_k$. Для дальнейших преобразований запишем очевидное тождество

$$\frac{v_i v_i}{2} \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{v^2}{2} \rho v_k - \rho v_k \frac{\partial v^2}{\partial x_k} \frac{1}{2}.$$

После подстановки данных выражений в (6.8.6) и проведения элементарных преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho \varepsilon dV = - \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(q_k + v_k \rho \varepsilon_{\text{вн}} - v_i \sigma_{ik} + \rho v_k \frac{v^2}{2} + v_k \rho \varepsilon_{\text{ном}} \right) dV. \quad (6.8.7)$$

Интеграл по объёму V в (6.8.7) можно преобразовать в интеграл по поверхности S , используя теорему Гаусса-Остроградского, т. е. (6.8.7) можно записать в видеЖ:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho \varepsilon dV = - \frac{\partial}{\partial x_k} \int [\rho v_k (\varepsilon_{кин} + \varepsilon_{вн} + \varepsilon_{ном}) + q_k - v_i \sigma_{ik}] dS_k. \quad (6.8.8)$$

Из сравнения (6.8.2) и (6.8.8) следует:

$$I_k = \rho v_k \varepsilon + q_k - v_i \sigma_{ik}, \quad (6.8.9)$$

$$\mathbf{I} = \rho \mathbf{v} \varepsilon + \mathbf{q} - (\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}), \quad (\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma})_k = v_i \sigma_{ik}.$$

Вектор \mathbf{I} есть *вектор плотности потока полной энергии*; его называют *вектором Умова-Пойтинга*. Как видно, вектор плотности потока энергии \mathbf{I} состоит из трех существенно отличающихся частей.

1. $\rho \mathbf{v} \varepsilon$ – конвективное слагаемое, описывающее перенос полной энергии самой движущейся средой, его направление совпадает с направлением движения среды. Если среда неподвижна, то это слагаемое равно нулю.

2. \mathbf{q} – вектор плотности потока тепла, его направление определяется направлением градиента температуры. Это слагаемое отлично от нуля и в покоящейся среде.

3. $(\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma})$ – вектор плотности потока энергии, связанный с работой сил внутренних напряжений в единице объёма. Он также существует лишь в движущейся среде, однако его направление не совпадает с направлением скорости движения среды.

Имея в виду определение (6.8.9) для вектора \mathbf{I} , из уравнения (6.8.7) можно получить дифференциальное уравнение сохранения полной энергии типа уравнения непрерывности в форме

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \text{div } \mathbf{I} = 0. \quad (6.8.10)$$

Однако в таком общем виде (*дивергентном*) уравнение сохранения внутренней энергии применяется сравнительно редко, т. к. в большинстве случаев оказывается проще рассматривать различные виды энергии в отдельности, если задача это позволяет.

6.9. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Система уравнений сохранения, описывающих движение сплошной среды, включает уравнение непрерывности – уравнение сохранения массы

(6.3.5), уравнение движения – уравнение сохранения импульса (6.4.9) и уравнение сохранения внутренней энергии (6.7.10) и записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= f_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \\ \rho \left(\frac{\partial \varepsilon_{вн}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \varepsilon_{вн}}{\partial x_k} \right) &= - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (6.9.1)$$

Здесь связь между тензорами напряжений σ_{ik} и деформаций ε_{ik} , а также определение скоростей деформации v_i можно записать с помощью известных соотношений:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= k \varepsilon_{ik} \delta_{ik} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right) - 3\alpha k (T - T_0) \delta_{ik}, \\ \varepsilon_{ik} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad v_i = \frac{du_i}{dt}. \end{aligned}$$

Подставляя вышеприведенные соотношения в систему уравнений движения, нетрудно видеть, что входящие в них скорости v_i можно выразить через производные деформации u_i по координатам x_k и времени t .

Если внешние массовые силы f_i известны, то для описания состояния единицы объёма сплошной среды необходимо знать 10 неизвестных: P , ρ , T , $\varepsilon_{вн}$, u_i , q_i . Однако система уравнений (6.9.1) содержит только пять уравнений. Следовательно, система не замкнута и не может иметь однозначного решения. Для замыкания системы уравнений до полной необходимы дополнительные соотношения.

При локальном термодинамическом равновесии в малой частице сплошной среды необходимо знать уравнение состояния, связывающее P , ρ и T . В общем случае для бесконечно малой частицы в качестве некоторого среднего термодинамического давления в ней можно взять треть линейного инварианта тензора напряжений согласно (5.2.5а), т. е.

$$P = -\frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\frac{1}{3} k \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right). \quad (6.9.2)$$

Если известно, как правило, эмпирическое уравнение состояния типа $P = f(\rho, T)$ (для идеального газа – это $P/\rho = RT$), то с учётом (6.9.2) имеется ещё одно уравнение для определения деформаций – *термическое уравнение состояния*. Если известны теплоёмкость среды и характер процесса

деформирования, можно выразить внутреннюю энергию единицы массы $\varepsilon_{\text{вн}}$ как функцию, например, ρ и T , т. е. $\varepsilon_{\text{вн}} = \varepsilon_{\text{вн}}(\rho, T)$ – *калорическое уравнение состояния*.

Таким образом, для замыкания системы уравнений (6.9.1) до полной недостает еще трёх уравнений. Этими уравнениями являются эмпирические *уравнения Фурье* для трех компонент плотности потока тепла \mathbf{q} :

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (6.9.3)$$

Здесь λ – *коэффициент теплопроводности*, в механике сплошных сред он является *феноменологическим* коэффициентом.

Таким образом, система уравнений движения сплошной среды (6.9.1) совместно с термическим, калорическим уравнениями и уравнениями Фурье оказывается замкнутой. Она включает в себя некоторые опытные, *феноменологические* коэффициенты, число которых определяется той или иной моделью сплошной среды. Такую замкнутую систему уравнений называют *фундаментальной системой уравнений движения (уравнений сохранения)*.

Если интересуются не смещениями $u_i(\mathbf{r}, t)$, а скоростями $v_i(\mathbf{r}, t)$ частиц сплошной среды, то достаточно полученные из решения системы значения u_i продифференцировать по времени t . Для нахождения же компонент тензора деформации ε_{ik} необходимо продифференцировать полученные функции u_i по координатам x_k . Если с самого начала нас интересуют неизвестные параметры $P, \rho, T, \varepsilon_{\text{вн}}, v_i, q_i$, то смещения u_i или траектории индивидуальных частиц могут быть получены простым интегрированием $u_i = \int v_i dt$.

Решение фундаментальной системы уравнений может быть единственным, если оно будет удовлетворять начальным и граничным условиям. Поскольку данная система уравнений в частных производных, то необходимо задать не начальные условия для отдельных частиц сплошной среды (в представлении Лагранжа), а краевые условия (в представлении Эйлера), т. е. для получения единственного решения необходимо в начальный момент времени задать все искомые функции на некоторой поверхности. Например, в случае стационарной задачи, зная значение искомых функций на некоторой замкнутой поверхности, необходимо найти значение этих функций в любой точке объёма, ограниченного этой поверхностью.

В общем случае необходимо доказать *теорему существования и единственности* решений фундаментальной системы уравнений. Однако в силу значительной сложности и нелинейности уравнений системы такая теорема в общем случае не доказана. Доказательство можно получить лишь для простейших движений. Поэтому вместо строгого доказательства приходится

принять *на веру*, что решение данной системы существует, и при заданных начальных и краевых условиях оно единственное. Эта уверенность основана на хорошем совпадении теоретических и экспериментальных результатов при изучении простых и сложных движений сплошной среды.

Все феноменологические коэффициенты в уравнениях системы в общем случае могут быть функциями термодинамических параметров, например, давления P и температуры T . Эта зависимость также должна быть найдена из опыта. Если термодинамические параметры изменяются незначительно в процессе движения или если зависимость коэффициентов от термодинамических параметров слабая, то можно их полагать постоянными, не зависящими ни от координат, ни от времени.

6.10. ТЕНЗОР ВЯЗКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

В сплошной среде внутренние напряжения могут возникать под действием внешних сил не только вследствие смещений одних участков среды по отношению к другим, что описывается тензором деформации. Внутренние напряжения могут возникать и вследствие различной скорости смещения соседних элементов среды. Например, представим себе тонкую пластинку, плавающую на поверхности жидкости (рис. 6.1). Если сдвинуть пластинку в новое положение вдоль поверхности жидкости (ось x_1), то она останется неподвижной в новом положении, т. е. сила, возвращающая пластинку в прежнее положение, отсутствует. Однако для того, что бы её сдвинуть, необходимо приложить некоторую силу $F_{дв}$, которая при равномерном движении должна уравниваться некоторой силой

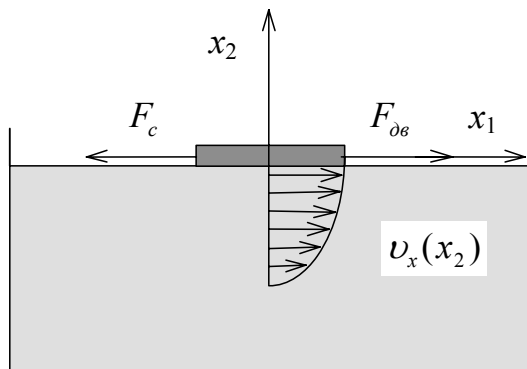


Рис. 6.1

сопротивления жидкости F_c . Причём эта сила сопротивления существует до тех пор, пока движется пластинка, т. е. пока есть разность скоростей пластинки и неподвижной вдали от неё жидкости. Иначе говоря, сила, действующая на пластинку (или на тонкий слой жидкости, прилипающей к пластинке и движущийся с ней как целое), возникает тогда, когда есть градиент скорости частиц жидкости,

нормальный к пластинке. Этот экспериментальный факт Ньютон записал в виде формулы:

$$F_c = -\sigma_{12}S, \quad \sigma_{12} = \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (6.10.1)$$

Здесь σ_{12} – сила, действующая на единицу площади S пластинки, η – некоторый феноменологический коэффициент, v_1 – скорость жидкости вблизи пластинки, направленная вдоль поверхности жидкости; x_2 – координата, перпендикулярная поверхности пластинки. Таким образом, в среде при упругих деформациях возникают напряжения, пропорциональные самой деформации, а при неупругих деформациях возникают напряжения, пропорциональные скорости деформации.

Согласно закону Гука (5.2.3) компоненты тензора упругих напряжений определяются компонентами тензора деформаций, т. е.

$$\sigma_{ik} = k\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right).$$

По аналогии можно записать тензор *неупругих напряжений* в форме

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \zeta\dot{\varepsilon}_{ll}\delta_{ik} + 2\eta\left(\dot{\varepsilon}_{ik} - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{ll}\delta_{ik}\right). \quad (6.10.2)$$

Здесь тензор напряжений $\tilde{\sigma}_{ik}$, зависящий от скоростей деформации, называют *тензором неупругих напряжений*, где $\dot{\varepsilon}_{ik}$ есть тензор скоростей деформаций и равен

$$\dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right), \quad \varepsilon_{ll} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \quad (6.10.3)$$

Тензор неупругих напряжений $\tilde{\sigma}_{ik}$ можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right). \quad (6.10.4)$$

В таком виде тензор $\tilde{\sigma}_{ik}$ называют *тензором вязких напряжений*. В определении (6.10.4) ζ – коэффициент объёмной вязкости; η – коэффициент динамической (или сдвиговой) вязкости.

Очевидно, что тензор вязких напряжений также является симметричным тензором. Второе слагаемое в (6.10.4) представляет собой бездивергентный тензор. Линейную зависимость тензора напряжений σ_{ik} от тензора деформации ε_{ik} называют законом Гука. Линейную же зависимость (6.10.4) тензора вязких напряжений $\tilde{\sigma}_{ik}$ от тензора скоростей деформации $\dot{\varepsilon}_{ik}$ называют *законом Навье-Стокса*. Из (6.10.4) легко получить формулу Ньютона (6.10.1), если полагать, что скорость частиц среды, нормальная пластинке, равна нулю.

6.11. МОДЕЛИ СПЛОШНЫХ СРЕД

В общем случае движения сплошной среды внутренние напряжения, возникающие в ней, должны складываться из упругих и неупругих напряжений, т. е. общий тензор напряжений \sum_{ik} должен иметь вид:

$$\begin{aligned} \sum_{ik} &= \sigma_{ik} + \tilde{\sigma}_{ik}, \\ \sum_{ik} &= k\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right) - 3\alpha k(T - T_0)\delta_{ik} + \\ &+ \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right) + \zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}. \end{aligned} \quad (6.11.1)$$

Таким образом, в самом общем случае среда характеризуется с кинематической точки зрения пятью феноменологическими коэффициентами $(\alpha, k, \mu, \eta, \zeta)$ и при решении фундаментальной системы уравнений необходимо учитывать все слагаемые в общем тензоре напряжений \sum_{ik} (6.11.1). Однако в такой общей постановке ни одна задача ещё не была решена в силу чрезвычайной математической сложности. Для каждой конкретной задачи или класса задач приходится делать разумные упрощающие предположения, которые облегчают их решение.

Опыт подсказывает, что все сплошные среды можно разделить на три существенно отличающихся друг от друга класса: *газы, жидкости и твёрдые тела*. Не касаясь различий в характере молекулярного движения в этих средах, определим эти различия в их феноменологическом поведении.

6.11.1. Твёрдое тело

В подавляющем числе задач, имеющих практическое значение, *твёрдое тело* можно характеризовать как среду, в которой деформации подчиняются закону Гука ($k \neq 0, \mu \neq 0$), а скорости деформации малы ($\dot{\varepsilon}_{ik} \ll 1$), т. е. в этой среде можно пренебречь вязкими напряжениями ($\tilde{\sigma}_{ik} = 0$). Такие задачи составляют предмет *теории упругости* (растяжение, изгиб, кручение стержней, пластинок, оболочек и т. д.). Второй характерной особенностью твёрдого тела в обычном понимании является то, что твёрдое тело может быть подвергнуто как сжатию, так и растяжению ($\sigma_{ll} > 1$ и $\sigma_{ll} < 1$), а относительное изменение объёма при деформации мало ($\varepsilon_{ll} = \Delta V/V \ll 1$). Если при решении задачи возникает необходимость учёта вязкостных свойств твёрдого тела, то требуется учитывать в общем тензоре напряжений слагаемые, зависящие от скоростей деформаций, а это уже предмет новой науки – *реологии* или её разделов – *теории пластичности, ползучести* (деформирование за пределом упругости – прокатка, штамповка).

6.11.2. Жидкость

Наиболее характерное физическое свойство сплошной среды, которую обычно называют *жидкостью*, заключается в чрезвычайно лёгком изменении её формы. Вода, налитая в сосуд, принимает форму сосуда. Если наклонить сосуд, то можно изменить форму жидкости, причём без видимых усилий. Следовательно, можно полагать, что для такой среды модуль сдвига, отвечающий за изменение формы среды, очень мал или вообще равен нулю. Таким образом, для жидкости $k \neq 0, \mu = 0, \tilde{\sigma}_{ik} \neq 0$. Следует отметить, что жидкость, как и твёрдое тело, может быть как сжата, так и растянута, хотя её прочность на растяжение значительно меньше прочности обычных твёрдых тел. Поэтому в большинстве задач предполагается, что $\varepsilon_{||} < 0$, т. е. жидкость может быть только сжата, но не растянута. Относительное изменение объёма при сжатии, как и для твёрдых тел, также невелико – $\varepsilon_{||} \ll 1$.

6.11.3. Газы

Газы, как и жидкости, легко изменяют свою форму. Поэтому их можно рассматривать как среду с исчезающе малым модулем сдвига, т. е. $k \neq 0, \mu = 0, \tilde{\sigma}_{ik} \neq 0$. В отличие от жидкостей газы не могут быть растянуты принципиально, поэтому для газов $\varepsilon_{||} < 0$. В отличие от жидкостей и твёрдых тел газы значительно изменяют свой объём при изменении давления (в соответствии с уравнением состояния $PV_0 = RT$). Твёрдые тела и жидкости в большинстве практических задач можно считать несжимаемыми ($\varepsilon_{||} = 0$), а газы являются сжимаемыми.

Как и для жидкостей, для газов модуль сдвига равен нулю ($\mu = 0$). Поэтому при постоянной температуре тензор напряжений σ_{ik} согласно (5.2.3) равен $\sigma_{ik} = k\varepsilon_{||}\delta_{ik}$. Но в соответствии с (5.2.5) $\varepsilon_{||} = \frac{\Delta V}{V} = -\frac{P}{k}$. Поэтому тензор напряжений σ_{ik} имеет только три одинаковых диагональных элемента, равных P , т. е. $\sigma_{ik} = -P\delta_{ik}$. Из этого соотношения следует, что в жидкостях и газах давление *изотропно*.

6.11.4. Релаксация напряжений

Приведённое выше деление сплошных сред на газы, жидкости и твёрдые тела весьма условно, границы такого деления в существенной мере зависят от соотношения между временем действия τ_f внешних сил, прилагаемых к среде, и временем релаксации τ_p внутренних напряжений в деформируемом теле.

После деформации среды возникающие внутри неё напряжения *релаксируют*, т. е. исчезают с некоторой скоростью. Релаксация сопровождается, как правило, некоторым необратимым изменением в среде

(остаточные деформации, изменение объёма и т. д.). После релаксации внутренних напряжений и снятия внешних сил среда, вообще говоря, не возвратится в исходное недеформированное состояние.

Если время τ_f действия внешних сил много меньше времени τ_p релаксации внутренних напряжений, т.е. $\tau_f \ll \tau_p$, то любая среда ведёт себя как твёрдое тело. Та же самая вода при быстром воздействии на неё внешних сил может рассматриваться как твёрдое тело, обладающее определенным модулем сдвига (например, удар о поверхность воды).

Если же время τ_f воздействия внешних сил много больше времени τ_p релаксации внутренних напряжений $\tau_f \gg \tau_p$, то любая среда может рассматриваться как маловязкая жидкость с модулем сдвига, равным нулю. Изучение движения таких жидкостей составляет предмет гидродинамики. Такие жидкости ещё называют *ньютоновскими жидкостями*.

Например, битум или смола при быстром воздействии внешней силы ведут себя как твёрдое тело (рассыпаются при ударе), а при медленном (постоянном) приложении внешних сил растекаются по поверхности или принимают форму сосуда, в который были положены куски битума, т. е. ведут себя как жидкость. Даже стальной стержень при растяжении силой, вызывающей в нем заведомо только упругие деформации, с течением времени «течет» и необратимо удлиняется, особенно при повышенных температурах (явление ползучести металла).

Таким образом, выбор модели сплошной среды при решении конкретной задачи зависит от соотношения между временами воздействия на неё внешних сил и времени релаксации внутренних напряжений. Одна и та же среда в различных задачах может рассматриваться и как твёрдое тело, и как жидкость.

Учитывая вышесказанное, полный тензор напряжений \sum_{ik} в гидродинамике для *ньютоновских* жидкостей и газов записывают в виде

$$\sum_{ik} = -P\delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right) + \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}. \quad (6.11.2)$$

6.12. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим одну из задач теории упругости – распространение в упругой среде малых возмущений. Если распространение этих возмущений в среде в виде некоторого волнового процесса происходит достаточно быстро, то можно полагать, что деформации в каждом элементе среды совершаются адиабатически без теплообмена с окружающими частицами. Тогда все встречающиеся модули в соответствующих формулах следует полагать

адиабатическими. Пренебрегая действием массовых сил, запишем уравнение движения (6.9.1) в виде

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (6.12.1)$$

Будем считать, что скорости частиц среды, которые возбуждаются волной, малы, и поэтому вторым слагаемым в левой части уравнения можно пренебречь как величиной второго порядка малости. Далее рассмотрим плоскую волну, т. е. волну, при распространении которой деформации \mathbf{u} точек среды зависят только от одной координаты x_1 и времени t , т. е.

$$u_i = u_i(x_1, t), \quad v_i = \frac{du_i}{dt}.$$

В этом случае уравнение движения (6.12.1) принимает вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (6.12.2)$$

Здесь компоненты тензора напряжений σ_{ik} определяются законом Гука (5.2.3) для адиабатического деформирования. Поскольку компоненты вектора смещения определяются только координатой x_1 , то в законе Гука для компонент тензора напряжений сохраняются только слагаемые, которые содержат компоненты тензора деформаций, зависящие только от координаты x_1 . Ими являются следующие компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}.$$

Поэтому из уравнения (6.12.2) следуют уравнения

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_l^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_t^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = c_t^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}, \quad (6.12.3)$$

$$c_l^2 = \frac{1}{\rho} \left(k_{ad} + \frac{4}{3} \mu \right), \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Уравнения (6.12.3) представляют собой обычные волновые уравнения, описывающие распространение малых деформационных возмущений в виде плоской волны. Из уравнений следует, что плоская волна представляет собой по существу две независимо распространяющиеся волны с различными скоростями c_l и c_t . Причём c_l есть скорость распространения *продольной* волны, в которой смещение точек u_1 происходит вдоль оси x_1 , а c_t есть скорость распространения *поперечной* волны, в которой смещения u_2 и u_3 перпендикулярны оси x_1 .

Используя связь (5.3.8) модулей всестороннего сжатия k и сдвига μ с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона σ , можно скорости c_l и c_t определить соотношениями:

$$c_l^2 = \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad c_t^2 = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}. \quad (6.12.4)$$

Для поперечных волн смещение элементов объёма наблюдается вдоль осей x_2 и x_3 , т. е. $u_2 = u_2(x_1)$, $u_3 = u_3(x_1)$ и $u_1 = 0$. Согласно (2.3.5) относительное изменение объёма в этом случае равно

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii} = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \equiv 0.$$

Таким образом, поперечные волны при прохождении через частицы среды не изменяют их объём. Поэтому их называют *сдвиговыми волнами*.

Для продольной волны $u_1 = u_1(x_1)$, $u_2(x_1) = u_3(x_1) = 0$, тогда

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \neq 0.$$

Прохождение продольной волны через среду сопровождается адиабатическим изменением объёма. Продольные волны называют *волнами сжатия*.

Отношение скоростей распространения продольных и поперечных волн равно

$$\frac{c_l}{c_t} = \sqrt{\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}}.$$

Ранее отмечалось, что коэффициент Пуассона для реальных сред изменяется в интервале $0 < \sigma < 1/2$, поэтому отношение скоростей изменяется в пределах

$$\left(\frac{c_l}{c_t} \right)_{\min} = \sqrt{2}, \quad \left(\frac{c_l}{c_t} \right)_{\max} = \infty.$$

Это свойство распространения упругих возмущений в виде плоской и поперечной волн с различными скоростями используется в сейсмологии и гравитационной разведке. Действительно, пусть две сейсмические станции приняли сигналы прохождения продольной волны, а затем поперечной. Пусть промежуток времени между сигналами на одной станции равен Δt_1 . Тогда его можно определить следующим образом. Если землетрясение или взрыв произошел на расстоянии l_1 от этой станции, то время прибытия на неё продольной и поперечной волн будет равно:

$$t_l = \frac{l_1}{c_l}, \quad t_t = \frac{l_1}{c_t}.$$

Тогда измеряемый промежуток времени между сигналами на первой станции будет равен

$$\Delta t_1 = t_t - t_l = l_1 \left(\frac{1}{c_t} - \frac{1}{c_l} \right).$$

Из этой формулы можно вычислить расстояние от первой станции до места, где произошел взрыв или землетрясение:

$$l_1 = \Delta t_1 \frac{c_l c_t}{c_l - c_t}.$$

Аналогично можно вычислить расстояние l_2 от второй станции:

$$l_2 = \Delta t_2 \frac{c_l c_t}{c_l - c_t}.$$

Проведя на географической карте окружности радиусами l_1 и l_2 вокруг станций, в точках пересечения окружностей можно определить координаты места взрыва или землетрясения. Для того чтобы уточнить, в какой именно одной из двух точек произошел взрыв, необходимы данные, по крайней мере, ещё одной станции.

Очевидно, что для таких расчётов нужно знать упругие свойства земной коры. Эти данные получают в результате специальных геофизических исследований при помощи, например, взрывов, когда расстояния между точками взрыва (их координаты на местности) заведомо известны.

На этом же принципе основаны гравитационные методы разведки. Измеряя скорости прохождения волн, создаваемых искусственными взрывами, можно судить о плотности вещества, в котором они распространяются или от которого они отражаются, а также знать и упругие свойства этой среды, т. е. предположительно судить о физической природе этой среды.

Опыты по измерению скорости распространения продольных и поперечных волн могут также служить способом определения упругих констант различных материалов при различных условиях. Для жидкостей и газов с исчезающе малым модулем сдвига мала и скорость распространения сдвиговых или поперечных волн и в пределе можно полагать, что сдвиговые волны в жидкостях и газах невозможны.

В заключение приведем таблицу примерных значений упругих констант некоторых веществ.

.Модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона и скорости распространения продольных и поперечных волн при температуре 20⁰С для различных материалов

Материал	E	μ	σ	c_l	c_t
Размерность	кг/мм ²	кг/мм ²	-	м/с	м/с
Сталь	21 000	83 000	0.25	5 700	3 300
Алюминий	7 000	2 600	0.34	6 300	3 100
Стекло	5 600	2 200	0.25	5 200	2 900
Каучук	0.8	0	0.47	720	27

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ландау Л.Д. Теория упругости. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М. : Наука, 1965. 204 с.
2. Харрисон У. Теория твердого тела / У. Харрисон. М. : Мир, 1974. 616 с.
3. Давыдов А.С. Теория твердого тела / А.С. Давыдов. М. : Наука, 1979. 640 с.
4. Павлов П.В. Физика твердого тела / П.В. Павлов. А.Ф. Хохлов. М. : Высшая школа, 2000. 494 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ

П 1. ПРЕДМЕТ РЕОЛОГИИ

П 1.1. Вязкоупругость

Реология (от греч. $\rho\acute{\epsilon}\omicron\varsigma$, «течение, поток» и - *логия*) – раздел физики, изучающий деформации и текучесть вещества, которые возникают под действием внешних сил или при изменении температуры, вызывающих в веществе вязкоупругие силы [П 1 – П 4].

Вязкоупругость – механическое свойство вещества быть как упругим, так и вязким. Развитие *теории вязкоупругости* связано с широким использованием *полимерных* материалов. Вязкоупругие свойства проявляются, например, в том, что внезапно приложенное и поддерживаемое неизменным напряженное состояние вызывает мгновенную деформацию, сопряженную с упругим откликом, вслед за чем следует процесс вязкого течения, который может быть ограниченным и неограниченным во времени. При этом поведение вещества определяется не только текущим напряженным состоянием, но и всеми прошлыми состояниями, т. е. вещество обладает свойством, которое называют эффектом памяти или *динамической памятью*. Не следует путать это свойство с *эффектом памяти формы*. Превалирование упругих или вязких свойств определяется продолжительностью внешнего воздействия или *числом Деборы*, который является критерием подобия в реологии и показывает степень текучести материала в эксперименте, определяемой коэффициентом вязкости материала.

Число Деборы определяется как

$$De = \frac{t_c}{t_p}, \quad (\text{П. 1})$$

где t_c – характерное время релаксации материала; t_p – характерное время наблюдения или воздействия внешней силы. При временах наблюдения, превышающих характерное время релаксации, материал течет, то есть чем меньше число Деборы, тем текучее материал в рамках проводимого эксперимента. Критерий был введен М. Рейнером [П1.1], он же и придумал название, связанное с цитатой из песни Деворы (Суд 5:5): «горы таяли от лица Господа». Критерий Деборы применим к жидкостям Максвелла (или *неньютоновским*), но не применим к жидкостям Кельвина–Фойгта (или *ньютоновским жидкостям*, у которых модуль сдвига $\mu = 0$).

Для жидкостей Максвелла доказана разрешимость в целом начально-краевой задачи для нестационарной квазилинейной системы, описываемой уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \left(\mathbf{v} + \sum_{l=1}^L \lambda_l \frac{\partial^l \mathbf{v}}{\partial t^l} \right) - \sum_{m=0}^{L-1} \kappa_m \frac{\partial^m \mathbf{v}}{\partial t^m} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{div} = 0, \quad L = 1, 2, \dots \quad (\text{П. 2})$$

Это уравнение описывает течение линейных вязкоупругих жидкостей с конечным числом дискретно распределенных времен релаксации $\{\lambda_l\}$, ($l = 1, 2, \dots, L$) и времен запаздывания $\{\kappa_0^{-1}, \kappa_m^l\}$ ($m = 1, 2, \dots, L - 1$) для обобщенных жидкостей Максвелла [П 5].

П 1.2. ПОЛИМЕРНЫЕ ВЕЩЕСТВА

Как отмечалось выше, теория вязкоупругости связана с широким использованием полимерных материалов, которые в зависимости от величины внешнего силового или температурного воздействия могут быть либо жидкостями, либо твердыми телами различной кристаллической структуры и формы.

Полимеры (греч. *πολύ-* – много; *μέρος* – часть) – неорганические и органические, аморфные и кристаллические вещества, получаемые путём многократного повторения различных групп атомов, называемых «мономерными звеньями», соединённых в длинные макромолекулы химическими или координационными связями. Полимер – это высокомолекулярное соединение: количество мономерных звеньев в полимере (степень полимеризации) должно быть достаточно велико. Во многих случаях количество звеньев может считаться достаточным, чтобы отнести молекулу к полимерам, если при добавлении очередного мономерного звена молекулярные свойства не изменяются. Как правило, полимеры – вещества с молекулярной массой от нескольких тысяч до нескольких миллионов.

Если связь между макромолекулами осуществляется с помощью слабых сил Ван-Дер-Вальса, они называются *термопласты*, если с помощью химических связей – *реактопласты*. К линейным полимерам относится, например, целлюлоза; к разветвленным, например, амилопектин, есть полимеры со сложными пространственными трёхмерными структурами.

В строении полимера можно выделить мономерное звено – повторяющийся структурный фрагмент, включающий несколько атомов. Полимеры состоят из большого числа повторяющихся группировок (звеньев) одинакового строения, например поливинилхлорид $(-\text{CH}_2-\text{CHCl}-)_n$, каучук натуральный и др. Высокомолекулярные соединения, молекулы которых содержат несколько типов повторяющихся группировок, называют

сополимерами или *гетерополимерами*.

Полимер образуется из мономеров в результате реакций полимеризации или поликонденсации. К полимерам относятся многочисленные природные соединения: белки, нуклеиновые кислоты, полисахариды, каучук и другие органические вещества. В большинстве случаев понятие относят к органическим соединениям, однако существует и множество неорганических полимеров. Большое число полимеров получают синтетическим путём на основе простейших соединений элементов природного происхождения путём реакций полимеризации, поликонденсации и химических превращений. Названия полимеров образуются из названия мономера с приставкой *поли-*: *полиэтилен*, *полипропилен*, *поливинилацетат* и т. п.

Благодаря ценным свойствам полимеры применяются в машиностроении, текстильной промышленности, сельском хозяйстве и медицине, автомобиле- и судостроении, авиастроении, в быту (текстильные и кожаные изделия, посуда, клей и лаки, украшения и другие предметы). На основании высокомолекулярных соединений изготавливают резины, волокна, пластмассы, пленки и лакокрасочные покрытия. Все ткани живых организмов представляют высокомолекулярные соединения.

II 1.3. ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ. ДИСЛОКАЦИИ И ВАКАНСИИ

Любой кристалл или агрегат кристаллов, при определённых условиях, может быть *пластически деформирован*. Под действием на кристалл внешней силы в объёме кристалла появляются напряжения, которые снимаются дефектами. Если сила превышает некий порог, то происходит хрупкое разрушение объекта.

Пластическая деформация кристаллов реализуется посредством направленного движения в нём *дислокаций* и *вакансий* [II 6].

Дислокация – это линейный дефект кристаллической структуры твёрдых тел. Основная геометрическая характеристика дислокаций – *вектор Бюргерса*. Если в идеальном кристалле провести замкнутый контур, а затем попытаться провести такой же контур вокруг области с дислокацией, то контур будет разорван. Вектор, который нужно провести для замыкания этого контура, и есть вектор Бюргерса дислокации. Он характеризует величину и направление сдвига атомных плоскостей, приводящего к образованию дислокации. В зависимости от угла φ между вектором Бюргерса и линией дислокации различают дислокации *винтовые* ($\varphi = 0$), *краевые* ($\varphi = 90^\circ$) и смешанные (произвольный угол – φ). Смешанные дислокации могут быть *разложены* на краевую и винтовую компоненты. Образование краевой дислокации можно представить

как результат удаления из кристалла одной кристаллической полуплоскости. Линия, отделяющая дефектную область кристалла от бездефектной, называется линией дислокации. Простейшая наглядная модель краевой дислокации — книга, у которой от одной из внутренних страниц оторвана часть (рис. П. 1, 2). Если страницы книги уподобить атомным плоскостям, то край оторванной части страницы моделирует линию дислокации (рис. П. 1).

Точечный дефект кристаллической решётки представляет собой отсутствие атома в узле решётки. Выделяется два механизма его образования в кристалле:

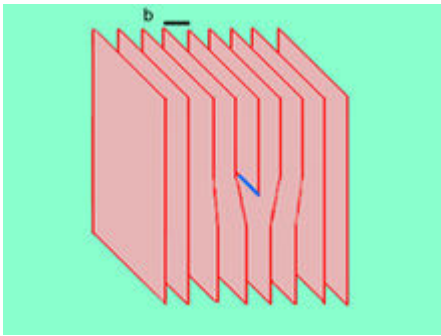


Рис. П. 1. Схематическое изображение краевой дислокации. Вектор Бюргера обозначен чёрным цветом

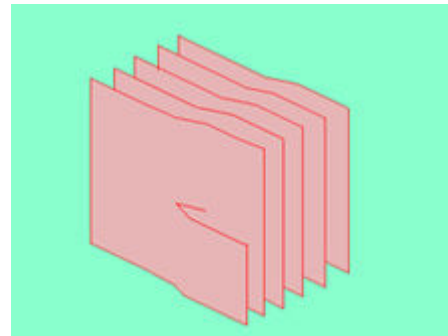


Рис. П. 2. Схематическое изображение винтовой дислокации

а) по Шоттки – образование вакансии в поверхностном слое атомов, когда атом из узла решётки выходит на слой выше поверхностного, после чего вакансия может уйти вглубь кристалла;

б) по Френкелю – одновременное образование вакансии и междоузельного атома, когда атом, вследствие теплового движения, покидает своё место в решётке и оказывается в междоузлии.

П 1.4. ЭФФЕКТ ПАМЯТИ ФОРМЫ

С пластическими деформациями связан известный *эффект памяти формы* – явление возврата к первоначальной форме при нагреве, наблюдающееся у некоторых материалов после предварительной деформации.

Одно из базовых восприятий людьми явлений внешнего мира – это стойкость и надежность металлических изделий и конструкций, стабильно сохраняющих свою функциональную форму продолжительное

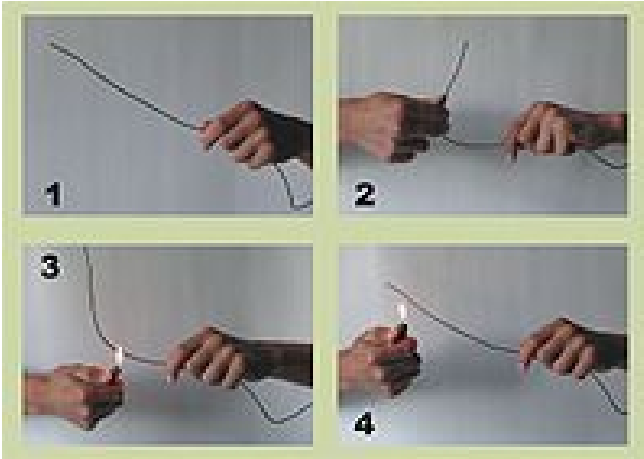


Рис. П. 3. Эффект памяти формы

свойством, позволяющим им проявлять *своеобразную память*.

Проявление эффекта памяти формы заключается в следующем. Если прямую проволоку (П. 3.1) вначале изогнуть (П. 3.2), затем нагреть (П. 3.3), то после нагревания она станет прямой (П. 3.4). После остывания она примет прежнюю изогнутую форму (П. 3.2). Почему так происходит?



Рис. П. 4. Физическая уцность эффекта памяти формы

время, если, конечно, они не подвергаются закритическим воздействиям. Однако, казалось бы, вопреки здравому смыслу, существует ряд материалов, металлических сплавов, которые при нагреве, после предварительной деформации, демонстрируют явление возврата к первоначальной форме, т. е. эти металлы, не являясь живыми существами, обладают особым

Физическая сущность эффекта памяти формы заключается в следующем. В исходном состоянии в материале существует определенная структура. На рис. П. 4.1 она обозначена правильными квадратами. При деформации (в данном случае изгибе на рис. П. 4.2) внешние слои материала вытягиваются, а внутренние сжимаются (средние остаются без изменения). Эти вытянутые структуры – мартенситные пластины, что не является необычным для металлических сплавов. *Необычным* является то, что в материалах с памятью формы *мартенсит термоупругий*.

При нагреве начинает проявляться термоупругость мартенситных пластин, т.е. в них возникают внутренние напряжения, которые стремятся вернуть структуру в

исходное состояние (П. 4.3), т.е. сжать вытянутые пластины и растянуть

сплюснутые. Поскольку внешние вытянутые пластины сжимаются, а внутренние сплюснутые растягиваются, материал в целом проводит *автодеформацию* в обратную сторону и восстанавливает свою исходную структуру, а вместе с ней и форму (рис. П. 4.4).

Мартенситное превращение (или *полиморфное превращение*), при котором изменение взаимного расположения составляющих кристалл атомов (или молекул) происходит путём их упорядоченного перемещения, причем относительные смещения соседних атомов малы по сравнению с междуатомным расстоянием. Перестройка кристаллической решётки в микрообластях обычно сводится к деформации её ячейки, и конечная фаза мартенситного превращения может рассматриваться как однородно деформированная исходная фаза. Величина деформации мала (порядка 1 – 10 %) и соответственно мал, по сравнению с энергией связи в кристалле, энергетический барьер, препятствующий однородному переходу исходной фазы в конечную. *Необходимое условие* мартенситного превращения, которое развивается путем образования и роста областей более стабильной фазы в метастабильной, – сохранение упорядоченного контакта между фазами. Упорядоченное строение межфазных границ при малости барьера для однородного фазового перехода обеспечивает их малую энергию и высокую подвижность. Как следствие, избыточная энергия, необходимая для зарождения кристаллов новой фазы (мартенситных кристаллов), мала и при некотором отклонении от равновесия фаз становится сопоставимой с энергией дефектов, присутствующих в исходной фазе. Поэтому зарождение мартенситных кристаллов происходит с большой скоростью и может не требовать тепловых флуктуаций. Вследствие воздействия образовавшейся фазы на исходную фазу энергетический барьер для перемещения границы фаз существенно меньше, чем для однородного перехода; при небольших отклонениях от равновесия он исчезает, поэтому кристалл растёт со скоростью порядка звуковой и без тепловой активации (превращение возможно при температурах, близких к абсолютному нулю).

Мартенситные превращения обнаружены во многих кристаллических материалах: чистых металлах, многочисленных сплавах, ионных, ковалентных и молекулярных кристаллах. Наиболее полно изучены мартенситные превращения в сплавах на основе железа, в частности в связи с закалкой стали. Большие перспективы практического применения имеют возможность большого обратимого формоизменения при мартенситных превращениях (например, создание «сверхупругих» сплавов и изделий, восстанавливающих первоначальную форму при нагреве после пластической деформации – «эффект памяти»), а также связь мартенситных превращений с появлением сверхпроводящих свойств в некоторых металлах. Мартенситные превращения (часто в сочетании с диффузионным перераспределением компонентов и изменением атомного порядка) составляют основу многочисленных структурных превращений, благодаря которым с помощью термической и механической обработки осуществляется направленное изменение свойств

кристаллических материалов. Значительный вклад в изучение мартенситных превращений внесли работы советских учёных (Г.В. Курдюмов и его школа) [П 7].

П 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭФФЕКТА ПАМЯТИ ФОРМЫ

Эффект памяти формы характеризуется двумя величинами:

- маркой сплава со строго выдержанным химическим составом;
- температурами мартенситных превращений.

В процессе проявления *эффекта памяти формы* участвуют мартенситные превращения двух видов – прямое и обратное. Соответственно каждое из них проявляется в своем температурном интервале: M_H и M_K – начало и конец прямого мартенситного превращения при деформации; A_H и A_K – начало и конец обратного мартенситного превращения при нагреве (рис. П. 5).

Температуры мартенситных превращений являются функцией как марки сплава (системы сплава), так и его химического состава. Небольшие изменения химического состава сплава (намеренные или как результат брака) ведут к сдвигу этих температур (см . рис. П. 6). Отсюда следует необходимость



Рис. П. 5. Прямое и обратное мартенситное превращение для сплава TiNi(50%)

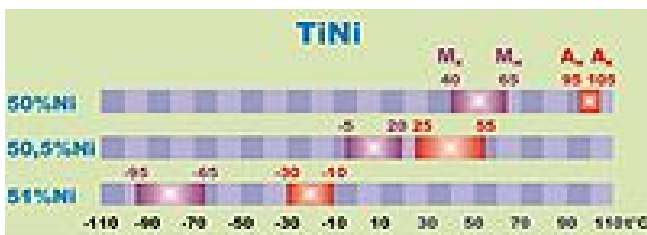


Рис. П. 6. Изменение зоны температур мартенситных превращений для различных сплавов TiNi

строгой выдержки химического состава сплава для однозначного функционального проявления эффекта памяти формы, что переводит металлургическое производство в сферу высоких технологий.

Эффект памяти формы проявляется несколько миллионов циклов; его можно усиливать предварительными различного времени термообработками.

Возможны реверсивные эффекты памяти формы, когда материал при одной температуре «вспоминает» одну форму, а при другой температуре – другую. Чем выше температура обратного мартенситного превращения, тем в меньшей степени выражен эффект памяти формы. Например, слабый эффект памяти формы наблюдается в сплавах системы Fe-Ni (5–20 %Ni),

у которых температуры обратного мартенситного превращения 200–400°С.

Другим явлением, тесно связанным с эффектом памяти формы, является *сверхупругость* – это свойство материала, подвергнутого нагружению до напряжения, значительно превышающего предел текучести, полностью восстанавливать первоначальную форму после снятия нагрузки.

Сверхупругое поведение на порядок выше упругого. Сверхупругость наблюдается в области температур между началом прямого мартенситного превращения и концом обратного.

П 3. МАТЕРИАЛЫ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ

Лидером среди материалов с памятью формы по применению и по изученности является *никелид титана* – это интерметаллид эквиатомного состава с 55 мас.%Ni. Температура плавления 1240–1310°С, плотность 6,45 г/см³. Исходная структура никелида титана – стабильная объемно-центрированная кубическая решетка типа CsCl, при деформации претерпевает термоупругое мартенситное превращение с образованием фазы низкой симметрии.

Другое название этого сплава, принятое за рубежом, – *нитинол*, происходит от аббревиатуры NiTiNOL, где NOL – это сокращенное название Лаборатории морской артиллерии США, где этот материал был разработан в 1962 году. Элемент из никелида титана может исполнять функции как датчика, так и исполнительного механизма.

Никелид титана обладает:

1. Превосходной коррозионной стойкостью.
2. Высокой прочностью.
3. Хорошими характеристиками формозапоминания. Высокий коэффициент восстановления формы и высокая восстанавливающая сила. Деформация до 8 % может полностью восстанавливаться. Напряжение восстановления при этом может достигать 800 МПа.
4. Хорошая совместимость с живыми организмами.
5. Высокая демпфирующая способность материала.

Недостатки никелида титана:

1. Из-за наличия титана сплав легко присоединяет азот и кислород. Чтобы предотвратить реакции с этими элементами при производстве, надо использовать вакуумное оборудование.
2. Затруднена обработка при изготовлении деталей, особенно резанием (оборотная сторона высокой прочности).
3. Высокая цена. В конце XX века он стоил чуть дешевле серебра.

При современном уровне промышленного производства изделия из *никелида титана* (наряду со сплавами системы Cu-Zn-Al) нашли широкое

практическое применение и рыночный сбыт.

На конец XX века *эффект памяти формы* был обнаружен более чем у 20-ти сплавов. Кроме *никелида титана* эффект памяти формы обнаружен в системах:

- **Au-Cd.** Разработан в 1951 году в Иллинойском университете, США. Один из пионеров материалов с памятью формы.

- **Cu-Zn-Al.** Наряду с никелидом титана имеет практическое применение. Температуры мартенситных превращений в интервале от -170 до 100°C . *Преимущества* (по сравнению с никелидом титана): можно выплавлять в обычной атмосфере. легко обрабатывается резанием, цена – в пять раз дешевле. *Недостатки*: хуже по характеристикам формозапоминания, а также по механическим и коррозионным свойствам. При термообработке легко происходит укрупнение зерна, что приводит к снижению механических свойств; проблемы стабилизации зерна в порошковой металлургии.

- **Cu-Al-Ni.** Разработан в университете города Осака, Япония. Температуры мартенситных превращений в интервале от 100 до 200°C .

- **Fe-Mn-Si.** Сплавы этой системы наиболее дешевые.

- **Fe-Ni, Cu-Al, Cu-Mn, Co-Ni, Ni-Al** и др.

Некоторые исследователи полагают, что *эффект памяти формы* принципиально возможен у любых материалов, претерпевающих мартенситные превращения, в том числе и у таких чистых металлов, как титан, цирконий и кобальт.

Производство никелида титана. Плавка происходит в вакуумно-гарнисажной печи или в электродуговой печи с расходуемым электродом в защитной атмосфере (гелий или аргон). Шихтой в обоих случаях служит йодидный титан или титановая губка, спрессованная в брикеты, и никель марки Н-0 или Н-1. Для получения равномерного химического состава по сечению и высоте слитка рекомендуется двойной или тройной переплав. При выплавке в дуговой печи рекомендуется сила тока $1,2$ кА, напряжение 40 В, давление гелия 53 МПа.

Оптимальный режим остывания слитков с целью предотвращения растрескивания – охлаждение с печью (не больше 10° в секунду). Удаление поверхностных дефектов – обдирка наждачным кругом. Для более полного выравнивания химического состава по объёму слитка проводят гомогенизацию при температуре 950 – 1000°C в инертной атмосфере.

Применение материалов с эффектом памяти формы.

На рис. П. 7 представлен внешний вид соединительной втулки, впервые разработанной и внедренной фирмой «Рейхем Корпорейшен», США, для соединения труб гидравлической системы военных самолетов. В истребителе более 300 тысяч таких соединений, но ни разу не поступило сообщений об их поломках. Её функциональными элементами являются внутренние выступы.



Рис. П. 7. Соединительные втулки из никелида титана

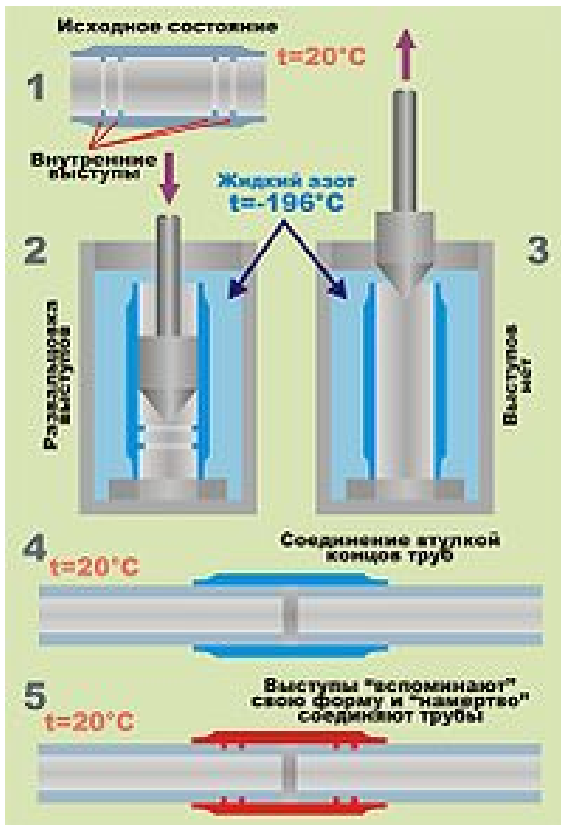


Рис. П. 8. Этапы соединения двух труб втулкой

Применение таких втулок заключается в следующем (см. рис. П. 8):

1. Втулка в исходном состоянии при температуре 20°C имеет форму П. 8.1.

2. Втулка помещается в криостат, где при температуре -196°C плунжером развальцовываются внутренние выступы (рис. П. 8.2).

3. Холодная втулка становится изнутри гладкой (рис. П. 8.3).

4. Специальными клещами втулку вынимают из криостата и надевают на концы соединяемых труб (рис. П. 8.4).

5. Комнатная температура является температурой нагрева для данного состава сплава.

Дальше все происходит «автоматически». Внутренние выступы «вспоминают» свою исходную форму, выпрямляются и врезаются во внешнюю поверхность соединяемых труб (рис. П. 8.5.).

Получается прочное вакуумно-плотное соединение, выдерживающее давление до 800 атм. По сути дела этот тип соединения заменяет сварку, и предотвращает такие недостатки сварного шва, как неизбежное разупрочнение металла и накопление дефектов в переходной зоне между металлом и сварным швом. Кроме того, этот метод соединения хорош для финального соединения при сборке конструкции, когда сварка из-за переплетения узлов и трубопроводов становится трудно доступной.

Эти втулки используются в авиационной, космической, автотехнике.

Этот метод также используется для соединения и ремонта труб подводных кабелей.

Использование эффекта памяти формы в медицине:

- Перчатки, применяемые в процессе реабилитации и предназначенные для реактивации групп активных мышц с функциональной

недостаточностью, могут быть использованы в межзапястных, локтевых, плечевых, голеностопных и коленных суставах.

- Противозачаточные спиральки, которые после введения приобретают функциональную форму под воздействием температуры тела.

- Фильтры для введения в сосуды кровеносной системы. Вводятся в виде прямой проволоки с помощью катетера, после чего они приобретают форму фильтров, имеющих заданную локацию.

- Зажимы для заземления слабых вен.

- Искусственные мышцы, которые приводятся в действие электрическим током.

- Крепежные штифты, предназначенные для фиксации протезов на костях.

- Искусственное удлинительное приспособление для так называемых растущих протезов у детей.

- Замещение хрящей головки бедренной кости. Заменяющий материал становится самозажимным под действием сферической формы (головки бедренной кости).

- Стержни для коррекции позвоночника при сколиозе.

- Временные зажимные фиксирующие элементы при имплантации искусственного хрусталика.

- Оправа для очков. В нижней части, где стекла крепятся проволокой. Пластиковые линзы не выскальзывают при охлаждении. Оправа не растягивается при протирке линз и длительном использовании. Используется *эффект сверхупругости*.

- Ортопедические имплантаты.

- Проволока (ортодонтическая дуга) для исправления зубного ряда.

- Имплантаты дентальные (самофиксация расходящихся элементов в кости).

Использование эффекта памяти формы в тепловой сигнализации:

- Пожарная сигнализация.

- Противопожарные заслонки.

- Сигнальные устройства для ванн.

- Сетевой предохранитель (защита электрических цепей).

- Устройство автоматического открывания/закрывания окон в теплицах.

- Бойлерные баки тепловой регенерации.

- Пепельница с автоматическим стряхиванием пепла.

- Электронный контактор.

- Система для предотвращения выхлопа газов, содержащих пары топлива (в автомобилях).

- Устройство для удаления тепла из радиатора.

- Устройство для включения противотуманных фар.

- Регулятор температуры в инкубаторе.

- Ёмкость для мытья теплой водой.

- Регулирующие клапаны охлаждающих и нагревательных устройств, тепловых машин.

Другие применения эффекта памяти формы

- Фирма «Фокус Боро», Япония, использует никелид титана в приводных устройствах самописцев. Входной сигнал самописца преобразуется в электрический ток, которым нагревается проволока из никелида титана. За счет удлинения и сокращения проволоки приводится в движение перо самописца. С 1972 года изготовлено несколько миллионов таких узлов (данные на конец XX века). Так как механизм привода очень прост, поломки случаются крайне редко.

- Электронная кухонная плита конвекционного типа. Для переключения вентиляции при микроволновом нагреве и нагреве циркуляционным горячим воздухом используется датчик из никелида титана.

- Чувствительный клапан комнатного кондиционера. Регулирует направление ветра в продувочном отверстии кондиционера, предназначенного для охлаждения и отопления.

- Кофеварка. Определение температуры кипения, а также для включения-выключения клапанов и переключателей.

- Электромагнитный кухонный комбайн. Нагрев производится вихревыми токами, возникающими на дне кастрюли под действием магнитных силовых полей. Чтобы не обжечься, появляется сигнал, который приводится в действие элементом в виде катушки из никелида титана.

- Электронная сушилка-хранилище. Приводит в движение заслонки при регенерации обезвоживающего вещества.

- В начале 1985 года формозапоминающие сплавы, используемые для изготовления каркасов бюстгальтеров, стали с успехом завоевывать рынок. Металлический каркас в нижней части чашечек состоит из проволоки из никелида титана. Здесь используется свойство сверхупругости. При этом нет ощущения присутствия проволоки, впечатление мягкости и гибкости. При деформации (при стирке) легко восстанавливает форму. Сбыт – 1 млн штук в год. Это одно из первых практических применений материалов с памятью формы.

- Изготовление разнообразного зажимного инструмента.

- Герметизация корпусов микросхем.

- Высокая эффективность превращения работы в тепло при мартенситных превращениях (в никелиде титана) предполагает использование таких материалов не только как высокодемпфирующих, но и в качестве рабочего тела холодильников и тепловых насосов.

- Свойство сверхупругости используется для создания высокоэффективных пружин и аккумуляторов механической энергии.

- Также используется «эффект памяти» в изготовлении ювелирных изделий. Например, украшение в виде цветка. При надевании его на шею на

цепочке лепестки цветка, прислоняясь к телу, раскрываются, обнажая спрятанный внутри драгоценный камень.

- *Эффект памяти* используется и иллюзионистами – например, в фокусе, в котором изогнутый гвоздь сам выпрямляется в руках фокусника или одного из зрителей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК П

- П 1. Рейнер М. Реология / М. Рейнер. Пер. с англ. М. : Наука, 1965. 224 с.
- П 2. Малкин А. Я. Реология. Концепции, методы, приложения / А.Я. Малкин, А.И. Исаев. М. : Профессия, 2007. 560 с.
- П 3. Астарита Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Дж. Астарита, Дж. Маруччи. М. : Мир, 1978. 312 с.
- П 4. Виноградов Г.В. Реология полимеров / Г.В. Виноградов. М. : Химия, 1977. 440 с.
- П 5. Осколков А.П. К теории жидкостей Максвелла / А.П. Осколков. // Л. : Наука, Ленинград. отд., 1981/ С. 119–127.
- П 6. Виноградов Г.В. Реология полимеров / Г.В. Виноградов. М. : Химия, 1977. 440 с.
- П 7. Курдюмов Г.В. Явления закалки и отпуска стали / Г.В. Курдюмов М., 1960.
- П 8. Хачин В.Н. Память формы / В.Н. Хачин. М. : Знание, 1984. 64 с.
- П 9. Лихачев В.А. Эффект памяти формы / В.А. Лихачев, С.Л. Кузьмин, З.П. Каменцева. Л. : Изд-во ЛГУ, 1987.
- П 10. Шишкин С.В. Расчёт и проектирование силовых конструкций на сплавах с эффектом памяти формы / С.В. Шишкин, Н.А. Махутов. Ижевск : Науч.-изд. центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 412 с.
- П 11. Харт Дж. Теория дислокаций / Дж. Харт, И. Роте. М. : Атомиздат, 1972. 600 с.

Учебное издание

Породнов Борис Трифионович

**МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД.
Часть 1. Теория упругости**

Редактор *Н. В. Рощина*

Компьютерный набор *В. А. Дублёных, Д. В. Румянцев*

Подписано в печать 30.12.2010		Формат 60×84 1/16
Бумага писчая	Плоская печать	Усл. печ. л. 4,9
Уч. изд. л. 4,1	Тираж 100 экз.	Заказ

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
rio@mail.ustu.ru

Ризография НИЧ УрФУ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19