

8. ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

В этом разделе изучим основные закономерности движения вязкой жидкости. Ограничимся рассмотрением лишь ньютоновских жидкостей, для которых модуль сдвига равен нулю, т.е. $\mu = 0$.

8.1. УРАВНЕНИЕ НАВЬЕ-СТОКСА

В разделе 1 (п.6.4.) было получено уравнение сохранения количества движения (импульса единицы массы) - уравнение движения в фундаментальной системе уравнений сохранения (6.9.1). Это уравнение содержит производную по координатам тензора упругих напряжений σ_{ik} . В случае, если в среде имеют место и неупругие напряжения, описываемые тензором неупругих (вязких) напряжений $\tilde{\sigma}_{ik}$, то в уравнении движения (6.9.1) вместо тензора σ_{ik} должен быть подставлен полный тензор напряжений $\sum_{ik} = \sigma_{ik} + \tilde{\sigma}_{ik}$, определяемый согласно (6.11.1). Тогда уравнение движения (6.9.1) принимает форму:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = f_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sum_{ik}}{\partial x_k}. \quad (8.1.1)$$

Для ньютоновских жидкостей ($\mu = 0$), испытывающих только всестороннее сжатие или растяжение, полный тензор напряжений \sum_{ik} в изотермических условиях согласно (5.2.5а) и (6.10.4) равен:

$$\sum_{ik} = -P\delta_{ik} + \tilde{\sigma}_{ik} = -P\delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right) + \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}. \quad (8.1.2)$$

После вычисления производной $\partial \sum_{ik} / \partial x_k$, подстановки её в (8.1.1) и приведения подобных, уравнение движения для i -ой компоненты скорости индивидуальной частицы принимает вид:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} + f_i. \quad (8.1.3)$$

Если вместо коэффициента динамической вязкости η ввести коэффициент кинематической вязкости $\nu = \eta / \rho$, то уравнение движения можно записать в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \text{grad div } \mathbf{v} + \mathbf{f}. \quad (8.1.4)$$

Уравнения (8.1.3) и (8.1.4) называются *уравнениями Навье-Стокса* для вязкой жидкости. Для несжимаемой жидкости $\text{div } \mathbf{v} = 0$ и уравнение Навье-Стокса записывается в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}. \quad (8.1.5)$$

Из уравнений (8.1.3) и (8.1.4) видно, что уравнение Навье-Стокса отличается от уравнения Эйлера (7.1.2) дополнительными слагаемыми в правой части, учитывающими вязкость жидкости.

Замкнутая система уравнений сохранения массы, импульса и внутренней энергии вязкой жидкости включает также уравнение непрерывности движения (6.3.5) и уравнение сохранения внутренней энергии (6.7.10) с заменой в нем σ_{ik} на \sum_{ik} , т.е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{d\varepsilon_{\text{вн}}}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \sum_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (8.1.6)$$

Уравнения (8.1.5), (8.1.6) вместе с термическим и калорическим уравнениями состояния и законом Фурье ($q_i = -\lambda \partial T / \partial x_i$) образуют замкнутую систему уравнений движения вязкой жидкости. Предполагается, что решение этой системы существует и при заданных начальных и граничных условиях оно единственно.

8.1.1. Граничные и начальные условия

Прямыми и косвенными экспериментами показано, что вязкая жидкость “прилипает” к поверхности обтекаемого тела. Силы взаимодействия между поверхностными атомами обтекаемого тела и “прилипающими” к ним молекулами жидкости оказываются достаточными, чтобы последние двигались вместе с поверхностью обтекаемого тела. Поэтому на поверхности тела, обтекаемого вязкой жидкостью, в каждой точке поверхности должны быть равны нулю не только нормальные компоненты скорости жидкости и тела, но также и касательные компоненты. Следовательно, на поверхности обтекаемого тела в каждой точке в общем случае, когда поверхность перемещается со скоростью \mathbf{u} , должно выполняться векторное равенство:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}. \quad (8.1.7)$$

Сила, действующая на единицу поверхности тела в направлении i -ой координатной оси, определяется компонентами полного тензора напряжений, т.е.

$$\sigma_i^{(n)} = \sum_{ik} n_k,$$

где n_k есть проекция на ось k внешнего по отношению к телу нормального единичного вектора,

Рассмотрим движение двух несмешивающихся жидкостей. Очевидно, на поверхности раздела этих жидкостей скорости их в каждой точке поверхности раздела должны быть равны, т.е. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Для любого элемента поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей силы, с которыми жидкости действуют друг на друга, равны по величине и обратные по направлению согласно третьему закону Ньютона. Пусть сила, действующая на жидкость 1 со стороны жидкости 2 на единицу площади в i -ом направлении, равна $\sigma_i^{(1)} = \sum_{ik}^{(1)} n_k^{(1)}$, где $n_k^{(1)}$ есть проекция внешнего по отношению к жидкости 1 нормального единичного вектора на ось

к. Аналогично сила, действующая на жидкость 2 со стороны жидкости 1, равна $\sigma_i^{(2)} = \sum_{ik}^{(2)} n_{ik}^{(2)}$. Очевидно, что $n_k^{(1)} = -n_k^{(2)}$. Тогда третий закон Ньютона можно записать в виде:

$$\sigma_i^{(1)} = -\sigma_i^{(2)},$$

$$\sum_{ik}^{(1)} n_k^{(1)} = -\sum_{ik}^{(2)} n_k^{(2)}, \quad \sum_{ik}^{(1)} = \sum_{ik}^{(2)}.$$

На свободной поверхности жидкости, граничащей с вакуумом, должно выполняться условие

$$\sum_{ik} n_k = 0, \quad (-P\delta_{ik} + \tilde{\sigma}_{ik})n_k = 0.$$

Условие (8.1.7) не имеет места при обтекании тел разреженным газом, когда средняя длина свободного пробега молекул газа сравнима с размерами обтекаемого тела. В этом случае вблизи поверхности можно выделить слой толщиной, равной средней длине свободного пробега газовых частиц, в котором частицы не сталкиваются. Внутри этого слоя можно выделить две группы частиц. Одна из них с отрицательной нормальной составляющей скорости каждой частицы имеет некоторую среднюю переносную скорость u_0 вдоль поверхности. Другая часть частиц, отражённых от границы по закону диффузного (равновероятного) рассеяния - закону косинуса имеет нулевую скорость переноса вдоль поверхности. Усреднённая по обеим группам частиц скорость равна $u_0/2$. Поэтому тангенциальная скорость газа испытывает скачок вблизи поверхности тела, т. е. газ как бы “скользит” вдоль поверхности. При этом на поверхности тела испытывает скачок и температура. Однако рассмотрение этих явлений не входит в компетенцию механики сплошных сред, а является предметом изучения кинетической теории газов.

В граничные условия входит также задание давления и температуры (или потока тепла) на некоторых поверхностях в жидкости.

Начальные условия необходимы лишь при решении нестационарных задач и заключаются в задании в некоторый начальный момент времени пространственных распределений скоростей, давлений и температур.

8.1.2. Вихревое движение вязкой жидкости

Рассмотрим уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости. Пусть массовые силы являются потенциальными, т. е. $\mathbf{f} = -\nabla \varepsilon_{nom}$. Воспользуемся известной формулой векторного анализа для замены $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в (7.1.1), тогда (8.1.5) можно переписать в виде:

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - [\mathbf{v}rot\mathbf{v}],$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - [\mathbf{v}rot\mathbf{v}] = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \varepsilon_{nom} \right) + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

Применяя операцию ротора к обеим частям уравнения и принимая во внимание, что $rot\nabla \equiv 0$, $rot\mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, получим:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \text{rot}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (8.1.8)$$

Это уравнение движения для вихря $\boldsymbol{\omega} = 1/2 \text{rot} \mathbf{v}$. Если $\nu = \eta/\rho = 0$, то из (8.1.8) следует уравнение Громека для баротропного движения идеальной жидкости.

В качестве примера рассмотрим плоский вихрь с компонентами вектора угловой скорости, равными $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \omega_z(r, t)$. Частицы жидкости двигаются по окружностям с центром на оси вихря с линейной скоростью $v_\varphi = v_\varphi(r, t)$. В п.7.4.3 было показано, что для плоского вихря в жидкости $\text{rot} \mathbf{v} = 0$. Поэтому второе слагаемое в левой части уравнения (8.1.8) обращается в нуль, и уравнение (8.1.8) имеет место только для z - компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu \Delta \omega_z. \quad (8.1.9)$$

В цилиндрической системе координат уравнение (8.1.9) можно записать в виде:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) = \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right). \quad (8.1.10)$$

Уравнение (8.1.10) имеет вид уравнения диффузии и как всякое уравнение параболического типа описывает некоторый необратимый процесс (первая производная по времени).

Пусть в начальный момент времени вихревое движение было стационарным и поддерживалось некоторым постоянным источником (например, вращением тонкого металлического цилиндра). При этом движение в любой точке, кроме оси вихря, как показано в предыдущем разделе (п. 7.4.3), является потенциальным, т.е. $\text{rot} \mathbf{v} = 0$. Траектории частиц представляют собой окружности с центром на оси вихря. Линейные скорости частиц находятся из определения циркуляции:

$$v_\varphi = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}.$$

Если в начальный момент времени интенсивность (циркуляция скорости) вихревого движения определяется величиной Γ_0 , то в последующие моменты времени решение уравнения (8.1.10) даёт временную зависимость в виде:

$$\omega_z(r, t) = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \quad (8.1.11)$$

Правильность решения можно проверить подстановкой (8.1.11) в уравнение (8.1.10).

Из (8.1.11) видно, что интенсивность вихревого движения в центре вихря ($r = 0, t > 0$) убывает обратно пропорционально времени. В некоторой фиксированной точке пространства ($r = a > 0$) z - компонента ротора скорости, а следовательно, и интенсивность увеличиваются с течением времени,

достигают максимума при $t = a^2/4\nu$, а затем уменьшаются до нуля. При $t \rightarrow \infty$ интенсивность вихревого движения в любой точке жидкости стремиться к нулю. Таким образом, в отличие от вихревого движения в идеальной жидкости, которое сохраняется с течением времени, вихревое движение в вязкой жидкости с течением времени захватывает все большие области пространства, занятого жидкостью (диффундирует), и затухает с течением времени вследствие диссипации (рассеяния в пространстве) энергии механического движения из-за вязкости жидкости. В конечном счёте эта энергия механического движения переходит в тепло. После выключения источника вихревого движения в любой точке вязкой жидкости $rotv \neq 0$, т.к. $\omega_z \geq 0$, т. е. движение непотенциально во все последующие моменты движения.

8.2. ДИССИПАЦИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Определим изменение во времени кинетической энергии движения несжимаемой вязкой жидкости за счет ее диссипации в пространстве. Рассмотрим некоторый неподвижный в пространстве объем V , заполненный движущейся жидкостью. Кинетическая энергия жидкости в этом объеме равна

$$E_{кин} = \int_{(V)} \frac{\rho v^2}{2} dV.$$

Найдем изменение кинетической энергии жидкости в этом объеме в единицу времени:

$$\frac{\partial E_{кин}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \frac{\rho v^2}{2} dV = \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) dV. \quad (8.2.1)$$

Произведем необходимые преобразования под знаком интеграла:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) = \frac{v^2}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (8.2.2)$$

Здесь первое слагаемое равно нулю, так как жидкость предполагается несжимаемой, т. е. $\rho = const$.

Воспользуемся далее уравнением движения Навье-Стокса для замены $\partial v_i / \partial t$ в (8.2.2) и, пренебрегая действием массовых сил ($f_i = 0$), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) = -\rho v_i v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - v_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ik}}{\partial x_k}. \quad (8.2.3)$$

Нетрудно видеть, что слагаемые в правой части (8.2.3), используя условие несжимаемости жидкости $div \rho v = 0$, можно записать в виде:

$$\rho v_i v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho v_k \frac{v^2}{2} \right) - \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho v_k \frac{v^2}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} v_i \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho v_k \frac{P}{2} \right) - \frac{P}{2} \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho v_k \frac{P}{2} \right), \\ v_i \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i \tilde{\sigma}_{ik}) - \tilde{\sigma}_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

После подстановки (8.2.4) в (8.2.3) и (8.2.1) имеем:

$$\frac{\partial E_{кин}}{\partial t} = - \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho v_k \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) - v_i \tilde{\sigma}_{ik} \right] dV - \int_{(V)} \tilde{\sigma}_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV. \quad (8.2.5)$$

Первый интеграл в правой части (8.2.5) может быть преобразован в соответствии с теоремой Гаусса-Остроградского в интеграл по поверхности S , ограничивающей рассматриваемый объём. Нетрудно видеть, что выражение в квадратных скобках уравнения (8.2.5) представляет собой k -ю компоненту вектора плотности потока энергии (вектор Умова-Пойтинга) в отсутствие потока тепла и потенциальной энергии ($\varepsilon_{ном} = 0$). Полагая, что на бесконечно удаленной поверхности жидкость покоится ($\mathbf{v} = 0$), очевидно, что первый интеграл в правой части (8.2.5) равен нулю. Тогда второй интеграл в (8.2.5) определяет изменение кинетической энергии жидкости в единицу времени в рассматриваемом объёме:

$$\frac{\partial E_{кин}}{\partial t} = - \int_{(V)} \tilde{\sigma}_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV. \quad (8.2.6)$$

Для несжимаемой жидкости ($div \mathbf{v} = 0$) тензор вязких напряжений имеет вид:

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Поэтому выражение (8.2.6) можно записать с виде:

$$\frac{\partial E_{кин}}{\partial t} = - \frac{\eta}{2} \int_{(V)} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV. \quad (8.2.7)$$

Так как кинетическая энергия вязкой жидкости вследствие необратимой диссипации из-за вязкости может только уменьшаться с течением времени, то из (8.2.7) следует, что коэффициент вязкости η всегда положителен.

8.3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

8.3.1. Основные затруднения при решении уравнения Навье-Стокса

Уравнение Навье-Стокса (8.1.5) по сравнению с уравнением Эйлера содержит наряду с первыми и вторые производные скорости по координатам. Основная трудность решения уравнения движения вязкой жидкости заключается в нелинейности уравнений, обусловленной слагаемым $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, а не в дополнительных слагаемых, учитывающих вязкие силы. В теории движения идеальной жидкости эту трудность обходили, полагая движение потенциальным, т. е. предполагали $\text{rot}\mathbf{v} = 0$. Если для идеальной жидкости предположение о потенциальности движения не противоречило механической модели жидкости, то движение вязкой жидкости в общем случае не является потенциальным. Можно назвать лишь несколько частных случаев, когда движение вязкой жидкости потенциально. Так, например, в предыдущем разделе было показано (п. 7.4.3), что движение в любой точке, кроме оси плоского вихря постоянной интенсивности, является потенциальным вне зависимости от модели жидкости. Поэтому существует очень мало точных решений уравнения Навье-Стокса. Эти точные решения могут быть получены в том случае, когда удастся тем или иным способом избавиться от нелинейного слагаемого $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$.

В чисто математическом смысле краевые задачи теоретической гидродинамики чрезвычайно трудны. Поэтому становление теории шло бы гораздо медленнее, если бы строгая математика не дополнялась различными правдоподобными интуитивными гипотезами. Известный немецкий математик Биркгоф, анализируя в начале прошлого века положение в теоретической гидродинамике, назвал семь таких гипотез. Рассмотрим только две, которые понадобятся в дальнейшем:

1. При определении физических переменных в задачах можно полагаться на интуицию, которая может быть подкреплена оценкой слагаемых в рассматриваемых уравнениях.

2. Топологию течения, т.е. общее представление о поле течения жидкости, можно определить интуитивно, полагая, в частности, что симметричное воздействие вызывает симметричный эффект.

Конечно, с точки зрения чистой математики такие гипотезы не имеют права на существование в строгой теории. Но, как видно будет далее, они позволяют либо получить решение, либо значительно упрощают решение и приводят к результатам, хорошо согласующимися с опытными данными, что и является конечной целью всякого исследования.

Таким образом, решения, полученные на основании таких гипотез, необходимо проверять экспериментально. В случае адекватности предполагаемого на основании гипотез движения действительному, наблюдаемому в опыте, полученные решения можно считать точными.

8.3.2. Течение Куэтта

Рассмотрим вязкую несжимаемую

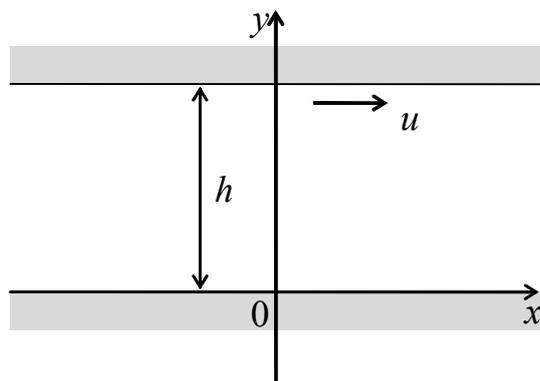


Рис.8.1

жидкость, расположенную между плоскостями, находящимися на расстоянии h друг от друга. Пусть в некоторый момент времени верхняя плоскость (рис. 8.1) начинает двигаться и движется в дальнейшем с постоянной скоростью u , параллельной нижней плоскости. Через некоторое время из-за прилипания жидкости к поверхностям между плоскостями установится некоторое стационарное движение

вязкой жидкости с некоторым распределением скорости вдоль оси y . Определим это установившееся распределение скорости.

Так как плоскости в направлении оси z неограниченны, то можно рассматривать движение как плоское. Если ускорение силы тяжести направлено по оси y , а расстояние между плоскостями h невелико, то можно пренебречь влиянием силы тяжести на движение жидкости в зазоре. Здесь использована гипотеза 1. Далее интуитивно полагаем, что скорость частиц жидкости в любой точке зазора направлена только вдоль оси x и зависит только от координаты y в силу бесконечности пластин в направлении x . Здесь использована вторая гипотеза об интуитивном определении топологии течения, основанная на предположении о симметрии эффекта при симметричном воздействии. Так как воздействие (движущаяся верхняя плоскость) симметрично относительно оси y , то и эффект (движение частиц жидкости) также будет симметричным относительно оси y , т. е. скорости частиц будут направлены только вдоль оси x . Движение жидкости будем полагать изотермическим. Таким образом, в этом случае нет необходимости рассматривать уравнение сохранения внутренней энергии. Необходимо решить уравнения при следующих условиях:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{f} = 0, \quad v_x = v_x(y), \quad v_y = v_z = 0, \quad (8.3.1)$$

$$\rho = const, \quad T = const, \quad \varepsilon_{\text{вн}} = const.$$

Запишем уравнение движения (8.1.5) для компонент скорости движения в декартовой системе координат и уравнение непрерывности (8.1.5) в форме:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right),$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \quad (8.3.2)$$

$$v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Из системы уравнений (8.3.2) видно, что при заданной топологии движения нелинейное слагаемое $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ из уравнений исчезает. Так будет всегда, когда линии тока рассматриваемого движения параллельны.

Используя условия (8.3.1), полученные интуитивно, из уравнений (8.3.2) получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad 0 \equiv 0. \quad (8.3.3)$$

Из (8.3.3) видно, что при заданной топологии движения жидкости уравнение непрерывности удовлетворяется тождественно. Из 2-го и 3-го уравнений системы (8.3.3) заключаем, что давление не зависит ни от y , ни от z , а может быть функцией только x .

Обратимся к первому уравнению системы (8.3.3). Так как справа в уравнении стоит функция только y , а слева - функция только x , то равенство возможно только тогда, когда правая и левая части равны некоторой постоянной величине, не зависящей от координат. Тогда имеем:

$$\frac{dP}{dx} = const, \quad P = const \cdot x + P_0. \quad (8.3.4)$$

Здесь снова приходится обращаться к правдоподобной гипотезе о симметрии эффекта. Из (8.3.4) следует, что на бесконечности (при $x \rightarrow \pm\infty$) давление является неограниченным. Но это трудно понять физически, т. к. движение жидкости в любой точке начиналось из одного и того же состояния, не зависящего от координаты x . Поэтому постоянную в уравнении (8.3.4) можно считать равной нулю. В соотношении (8.3.4) P_0 есть некоторое постоянное давление, которое можно обозначить как P .

Тогда для нахождения распределения скорости в зазоре имеем уравнение:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = a, \quad v_x = ay + b. \quad (8.3.5)$$

Граничные условия к уравнению (8.3.5) имеют вид:

$$y = 0, \quad v_x = 0, \quad y = h, \quad v_x = u.$$

Используя граничные условия, имеем:

$$v_x(y) = u \frac{y}{h}. \quad (8.3.6)$$

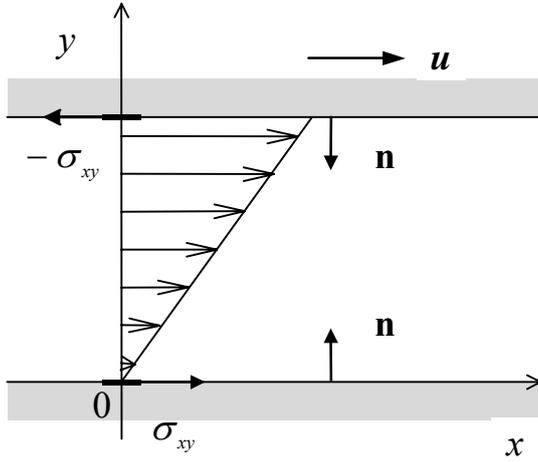


Рис. 8.2

Как видно, скорость не зависит от коэффициента вязкости. На рис.8.2. изображена эпюра скоростей частиц жидкости в зазоре согласно уравнению (8.3.6).

Найдем силы, действующие на единичную площадку на поверхностях. Рассмотрим силу действующую в направлении оси x на единицу площади нижней поверхности.

Переобозначим для краткости

записи тензор напряжений

$$\sum_{ik} = -P\delta_{ik} + \tilde{\sigma}_{ik} \equiv \sigma_{ik} .$$

Согласно определению (п. 5.3.1) сила, действующая на единичную площадку в направлении оси i , равна:

$$\sigma_i^{(n)} = \sigma_{ik} n_k, \quad \sigma_x^{(n)} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z .$$

Для нижней поверхности нормальный единичный вектор имеет компоненты $\mathbf{n} = \mathbf{n}(0, 1, 0)$. Следовательно, для силы $\sigma_x^{(n)}$ получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(n)} &= \sigma_{xy} n_y = -P\delta_{xy} + \tilde{\sigma}_{xy} = \tilde{\sigma}_{xy} = \\ &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_{y=0} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \eta \frac{u}{h} . \end{aligned} \quad (8.3.7)$$

Заметим, что здесь использовано условие несжимаемости жидкости $\partial v_k / \partial x_k = 0$. Сила, действующая на верхнюю поверхность в направлении оси x с $\mathbf{n} = \mathbf{n}(0, -1, 0)$, равна:

$$\sigma_x^{(n)} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z .$$

Поэтому имеем:

$$\sigma_x^{(n)} = -\sigma_{xy} = -\tilde{\sigma}_{xy} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=h} = -\eta \frac{u}{h} .$$

Как и следовало ожидать, силы оказались равными, но противоположно направленными.

Сила, действующая на единицу площади нижней поверхности в направлении оси y , равна

$$\sigma_y^{(n)} = \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z, \quad n_x = 0, \quad n_y = 1, \quad n_z = 0,$$

$$\sigma_y^{(n)} = \sigma_{yy} = -P + \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = -P. \quad (8.3.8)$$

Легко убедиться, что на единицу поверхности верхней плоскости в направлении оси y действует сила, равная P .

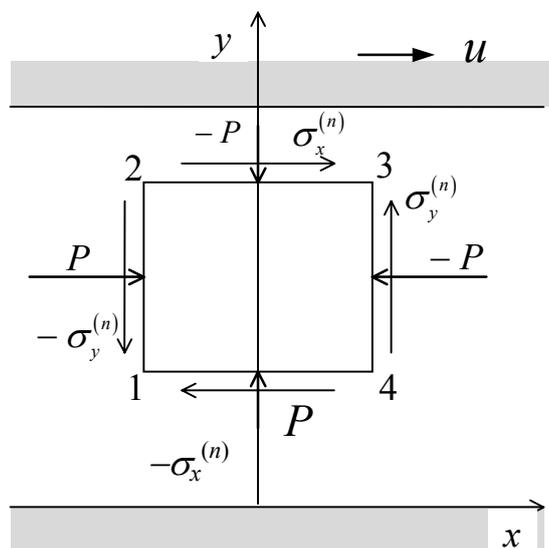


Рис. 8.3

Выделим в зазоре некоторую индивидуальную частицу, имеющую форму квадрата (рис.8.3), и определим силы, действующие на стороны этого квадрата, вызываемые окружающей жидкостью. Силы, действующие на стороны, перпендикулярные оси y , уже определены выше, и так как они не зависят от y , то будут одинаковы во всех сечениях, перпендикулярных оси y . Силы, действующие на сторону 1-2 с $\mathbf{n} = \mathbf{n}(-1, 0, 0)$ в направлении оси y

и x , равны соответственно:

$$\sigma_y^{(n)} = \sigma_{yk} n_k = \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z, \quad \sigma_x^{(n)} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z,$$

Поэтому имеем:

$$\sigma_y^{(n)} = -\sigma_{yx} = -\eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\eta \frac{u}{h}, \quad \sigma_x^{(n)} = \sigma_{xx} n_x = P. \quad (8.3.9)$$

Аналогично можно показать, что силы, действующие на сторону 3-4 индивидуальной частицы (см. рис. 8.3), вследствие обратного направления нормали соответственно равны и противоположны по знаку найденным выше.

На рис.8.3 видно, что выбранная частица подвергается сжатию силами давления P и перекошу тангенциальными силами $\sigma_x^{(n)}$ и $\sigma_y^{(n)}$. Выше специально подробно рассмотрено нахождение всех сил, действующих на частицу, т. к. в данном случае лучше воспользоваться формальными определениями, чем полагаться на интуицию.

Полученное точное решение задачи Куэтта может быть использовано для экспериментального определения феноменологического коэффициента динамической вязкости η . Для этого нужно измерить силу, действующую на единицу площади верхней или нижней поверхности. Тогда, измеряя расстояние между плоскостями и воспользовавшись формулой (8.3.7), можно определить коэффициент вязкости. Однако с точки зрения экспериментальной техники это не самый простой способ измерения коэффициента динамической вязкости жидкости.

8.3.2. Плоское течение Пуазейля

Рассмотрим бесконечные параллельные неподвижные плоскости, расстояние между которыми равно h . Пусть между плоскостями изотермически движется вязкая несжимаемая жидкость под действием постоянного градиента давления, направленного вдоль оси x (рис.8.4).

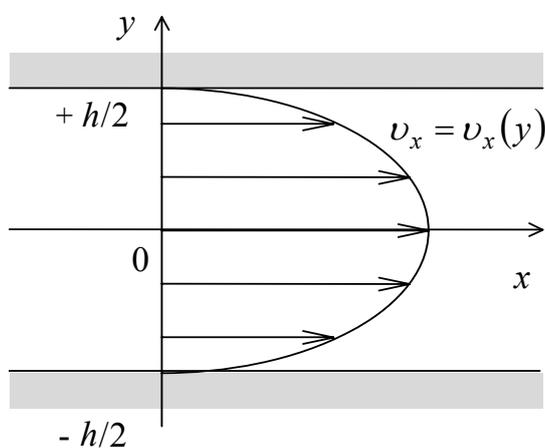


Рис. 8.4

Снова будем предполагать, что если ускорение силы тяжести направлено вдоль оси y , то сила тяжести не должна влиять на движение жидкости в зазоре между плоскостями из-за малости зазора..

Пусть градиент давления создан некоторым внешним источником (насос, компрессор). Будем полагать, что движение плоское, стационарное. Снова используя гипотезу 2, будем полагать, что скорость частиц жидкости в зазоре направлена

только вдоль оси x и зависит только от y . Таким образом, необходимо решить уравнение Навье-Стокса при тех же условиях (8.3.1), что и в задаче Куэтта. Рассматривая систему уравнений (8.3.2) при сделанных предложениях, получим такие же уравнения:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad 0 \equiv 0. \quad (8.3.10)$$

Уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно.

Из второго и третьего уравнений следует, что давление не зависит ни от y , ни от z , а может быть функцией только x .

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = A = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Из последнего соотношения следует, что давление P есть линейная функция x , а скорость определяется следующей формулой:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{A}{\eta} y + a, \quad v_x = \frac{A}{2\eta} y^2 + ay + b.$$

Постоянные a и b могут быть определены из граничных условий:

$$y = \pm \frac{h}{2}, \quad v_x(y) = 0 = \frac{A}{2\eta} \frac{h^2}{4} \pm a \frac{h}{2} + b \rightarrow a = 0, \quad b = -\frac{A}{2\eta} \frac{h^2}{4},$$

Таким образом, зависимость скорости $v_x(y)$ можно записать в следующем виде:

$$v_x(y) = \frac{1}{2\eta} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{dP}{dx} = -\frac{1}{2\eta} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \frac{dP}{dx}. \quad (8.3.11)$$

Согласно (8.3.11) эпюра скоростей (рис.8.4) представляется параболой.

Из формулы (8.3.11) легко получить среднюю \bar{v} и максимальную скорости течения жидкости в зазоре:

$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= \frac{2}{\eta} \int_0^{h/2} v_x dx = -\frac{2}{h \cdot 2\eta} \left(\frac{h^2}{4} y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^{h/2} = -\frac{h^2}{12\eta} \frac{dP}{dx}, \\ v_{\max} &= v_x(y=0) = -\frac{h^2}{8\eta} \frac{dP}{dx}, \quad \frac{v_{\max}}{\bar{v}} = \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (8.3.12)$$

Знак скорости определяется знаком градиента давления. Если давление уменьшается вдоль оси x , то $dP/dx < 0$, а $v_x > 0$, т. е. скорость направлена в сторону уменьшения давления.

Найдем силу, действующую на единицу площади верхней и нижней поверхности в направлении оси x .

$$\sigma_x^{(n)} \Big|_{y=\pm \frac{h}{2}} = \sigma_{xk} \cdot n_k \Big|_{y=\pm \frac{h}{2}} = (\mp 1) \sigma_{xy} \Big|_{y=\pm \frac{h}{2}} = \mp \sigma_{xy} \Big|_{y=\pm \frac{h}{2}} = \mp \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=\pm \frac{h}{2}},$$

Дифференцируя уравнение (8.3.11), получим:

$$\sigma_x^{(n)} \Big|_{y=\pm \frac{h}{2}} = \mp \sigma_{xy} \Big|_{y=\pm \frac{h}{2}} = -\frac{h}{2} \frac{dP}{dx}. \quad (8.3.13)$$

Как и в задаче Куэтта, сила, действующая на единичную площадку на верхней и нижней поверхности, равна $-P$ и $+P$, соответственно.

Объемный и массовый расходы жидкости через любое сечение, перпендикулярное оси x (единичной ширины), равны соответственно:

$$Q_V = S \cdot \bar{v}_x = h \bar{v}_x = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{dP}{dx}, \quad Q_m = \rho h \bar{v}_x = -\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{dP}{dx}. \quad (8.3.14)$$

8.3.4. Цилиндрическое течение Пуазейля

Рассмотрим установившееся изотермическое движение вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической неограниченно длинной трубе, вызываемое постоянным градиентом давления, который направлен вдоль оси трубы. Для решения естественно воспользоваться цилиндрической системой координат. Уравнение Навье-Стокса, уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости, а также компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned}
1. \quad & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \\
& + v \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2} \right) \\
2. \quad & \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \\
& + v \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) , \\
\end{aligned} \tag{8.3.15}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \\
& + v \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) , \\
\end{aligned}$$

$$4. \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_\varphi}{r} = 0 ,$$

$$5. \quad \sigma_{rr} = -P + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma_{r\varphi} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right),$$

$$\sigma_{\varphi z} = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right), \quad \sigma_{zz} = -P + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{zr} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -P + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right).$$

Снова будем полагать, что если труба расположена горизонтально, то сила тяжести не влияет на движение жидкости в трубе. Естественно направить ось z вдоль оси трубы. Будем также полагать, используя гипотезу 2, что скорости частиц жидкости в трубе имеют единственную компоненту, направленную вдоль оси трубы и зависящую только от радиуса r . Следовательно, необходимо решить уравнение Навье-Стокса при следующих условиях:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{f} = 0, \quad v_z = v_z(r), \quad v_r = v_\varphi = 0, \quad T = const, \quad \rho = const. \tag{8.3.16}$$

При условиях (8.3.16) из уравнений (8.3.15) получим:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad 0 \equiv 0. \tag{8.3.17}$$

Из первого и второго уравнения системы (8.3.17) следует, что при заданной топологии течения давление не должно зависеть ни от r , ни от φ , а может быть функцией только z . Поскольку v_z зависит только от r , то имеем:

$$\frac{dP}{dz} = A = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right).$$

После интегрирования получаем:

$$v_z(r) = \frac{A}{4\eta} r^2 + a \ln r + b.$$

Поскольку на оси трубы не может быть бесконечной скорости, то постоянную a следует положить равной нулю. Постоянную b найдем из граничных условий:

$$r = r_0, \quad v_z = 0, \quad b = -\frac{A}{4\eta} r_0^2.$$

Подставляя b в выражение для скорости, имеем:

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\eta} (r_0^2 - r^2) \frac{dP}{dz}. \quad (8.3.18)$$

Теперь нетрудно вычислить максимальную и среднюю скорости движения жидкости по трубе.

$$v_{\max} = v_z(r=0) = -\frac{r_0^2}{4\eta} \frac{dP}{dz},$$

$$\bar{v}_z = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} v_z(r) r dr d\varphi = -\frac{r_0^2}{2\eta} \frac{dP}{dz} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} \frac{r^4}{r_0^2} \right)_0^{r_0} = -\frac{r_0^2}{8\eta} \frac{dP}{dz}, \quad \frac{v_{\max}}{\bar{v}_z} = 2.$$

Направления скоростей определяются направлением градиента давления.

Для объемного и массового расхода жидкости через любое сечение трубы имеем формулу Пуазейля:

$$Q_V = \pi r_0^2 \bar{v}_z = -\frac{\pi r_0^4}{8\eta} \frac{dP}{dz}, \quad Q_m = \rho Q_V = -\frac{\rho \pi r_0^4}{8\eta} \frac{dP}{dz}. \quad (8.3.19)$$

Найдем силу, действующую на единицу площади поверхности трубы в направлении оси z .

$$\sigma_z^{(n)} = \sigma_{zk} n_k = \sigma_{zr} n_r + \sigma_{z\varphi} n_\varphi + \sigma_{zz} n_z, \quad n_z = n_\varphi = 0, \quad n_r = -1.$$

Используя формулы (8.3.15), имеем:

$$\sigma_z^{(n)} = -\sigma_{zr} = -\eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)_{r=r_0} = -\eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_{r=r_0} = -\frac{r_0}{2} \frac{dP}{dz}.$$

Вычислим силу, действующую на кольцевой элемент трубы длиной Δz в направлении оси z . Согласно определению силы сопротивления имеем:

$$\Delta F = 2\pi r_0 \Delta z \sigma_z^{(n)} = 2\pi r_0 \Delta z \left(+\frac{r_0}{2} \frac{\Delta P}{\Delta z} \right) = \pi r_0^2 (P_1 - P_2).$$

Из последнего соотношения видно, что разность сил давлений P_1 и P_2 , действующих на жидкость в двух любых сечениях трубы S_1 и S_2 , разделенных расстоянием Δz , уравнивается вязкой силой, действующей на боковую поверхность рассматриваемого элемента участка трубы. Очевидно, это следует из закона Ньютона, т. к. лишь при равенстве сил рассматриваемый элемент объема жидкости будет находиться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

8.3.4. Определение коэффициента вязкости методом потока

Формула Пуазейля может быть использована для измерения коэффициента динамической вязкости жидкости. Согласно формуле (8.3.19) для вычисления этого коэффициента необходимо измерить массовый или объемный расход жидкости, значения радиуса трубы и градиента давления, поставив опыты следующим образом.

1. Пусть в сосуде 1 (рис.8.5) налита жидкость, коэффициент динамической вязкости которой необходимо измерить. Эта жидкость может вытекать из сосуда 1 через тонкий капилляр 2 в сосуд 3. Если пренебречь изменением уровня жидкости в сосуде 1, перепад давления на концах

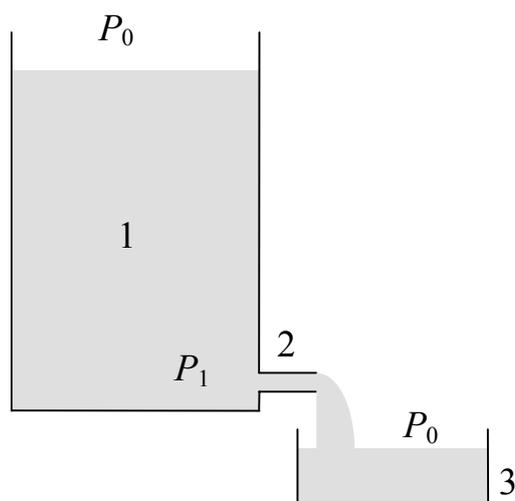


Рис. 8.5

капилляра будет равен гидростатическому давлению жидкости на входе в капилляр, т.е. $P_1 - P_0 = \Delta P$. Если это давление разделить на длину капилляра, то получим $dP/dz = -\Delta P/l$. Далее, зная время (по секундомеру) и объем жидкости, поступающей за это время в сосуд 3, можно найти секундный объемный или массовый расход. Измеряя радиус капилляра и воспользовавшись формулой Пуазейля (8.3.19), можно вычислить коэффициент динамической вязкости жидкости. Следует заметить,

что расход жидкости пропорционален r_0^4 , а, следовательно, ошибка измерения коэффициента η за счёт ошибки измерения радиуса увеличивается в 4 раза. Если объем исследуемой жидкости ограничен, то нетрудно при решении задачи учесть изменение уровня жидкости в сосуде 1.

2. При не слишком точных относительных измерениях вязкости капельных жидкостей сосуды и капилляр располагают по вертикали (вискозиметр Энглера) и определяют расходы эталонной $Q_э$ и исследуемой $Q_ж$ жидкостей. Тогда коэффициенты вязкости эталонной и исследуемой жидкостей будут относиться как их секундные расходы, т. е. $Q_э/Q_ж = \eta_ж/\eta_э$. Зная коэффициент вязкости эталонной жидкости из каких-либо других точных измерений, можно определить коэффициент вязкости исследуемой жидкости.

Этот метод широко используется для экспресс-контроля в различных технологических процессах при получении веществ с заданными свойствами.

3. Коэффициент динамической вязкости газов может быть также измерен следующим образом. Предположим, что имеется два сосуда, содержащих один и тот же газ и соединенных тонким капилляром (рис.8.6). Пусть объемы сосудов равны V_1 и V_2 , температура газа предполагается неизменной. Предположим, что каким-либо способом увеличили давление в сосуде V_1 при закрытом запирающем устройстве. Если капилляр открыть, газ начнет перетекать из сосуда 1 в сосуд 2 до тех пор, пока давления в сосудах не выровняются. Найдем закон изменения разности давлений между сосудами с течением времени.

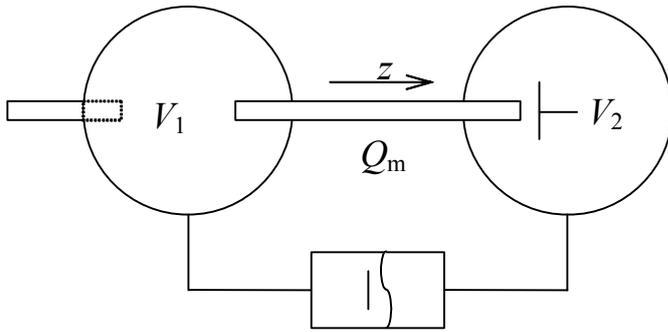


Рис. 8.6

Уравнение состояния для идеального газа можно записать в виде

$$PV = \frac{G}{\mu} RT,$$

где μ - масса моля газа, а G есть масса газа, занимающего объем V при давлении P и температуре T .

В начальный момент времени (до открытия капилляра) масса газа в объемах V_1 и V_2 при давлениях P_1 и P_2 соответственно равна

$$G_1 = \frac{\mu}{RT} P_1 V_1, \quad G_2 = \frac{\mu}{RT} P_2 V_2.$$

Обозначим через Q_m массовый поток газа в единицу времени через сечение капилляра, тогда можно записать следующие уравнения баланса:

$$\frac{dG_1}{dt} = \frac{\mu}{RT} V_1 \frac{dP_1}{dt} = -Q_m, \quad \frac{dG_2}{dt} = \frac{\mu}{RT} V_2 \frac{dP_2}{dt} = +Q_m. \quad (8.3.20)$$

Здесь знаки (-) и (+) означают, что газ из объема V_1 вытекает, а в объем V_2 втекает. После вычитания в (8.3.20) из первого уравнения второго и использования определения (8.3.19) для Q_m можно легко получить:

$$\frac{d(P_1 - P_2)}{dt} = \frac{d\Delta P}{dt} = -\frac{RT}{\mu} \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) Q_m = \frac{RT}{\mu} \frac{\bar{\rho} \pi r_0^4}{8\eta V_{np}} \frac{1}{dz} dP. \quad (8.3.21)$$

Здесь $\bar{\rho} = \frac{\mu}{RT} \bar{P}$ есть средняя плотность газа при среднем давлении $\bar{P} = (P_1 + P_2)/2$; dP/dz есть градиент давления, равный $-\Delta P/l$, где l - длина капилляра, $V_{np} = V_1 V_2 / (V_1 + V_2)$ - приведенный объем.

Решение однородного линейного дифференциального уравнения (8.3.21) дает следующую зависимость для разности давлений:

$$\Delta P = \Delta P_0 e^{-\alpha t}, \quad \alpha = \frac{\pi r_0^4}{8\eta l V_{np}} \bar{P}. \quad (8.3.22)$$

Таким образом, измеряя временную зависимость разности давлений между двумя сосудами, соединенными капилляром, можно по формуле (8.3.22), используя нелинейный метод наименьших квадратов, определить показатель экспоненты α . Зная размеры капилляра, величину объемов и среднее давление, можно вычислить коэффициент динамической вязкости газа.

Вышеописанные идеи экспериментов являются наиболее распространенными в технике измерения вязкости жидкостей и газов.

8.3.5. Движение жидкости между двумя вращающимися цилиндрами

Рассмотрим установившееся движение несжимаемой вязкой изотермической жидкости между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами. Будем считать цилиндры неограниченно длинными настолько, что краевыми эффектами можно пренебречь. Пренебрегаем также действием силы тяжести. Пусть цилиндры радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) вращаются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 , соответственно (рис. 8.7). При решении задачи естественно воспользоваться цилиндрической системой координат. Используя интуитивные гипотезы, будем полагать:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{f} = 0, \quad v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = v_\varphi(r), \quad P = P(r), \quad \rho = const. \quad (8.3.23)$$

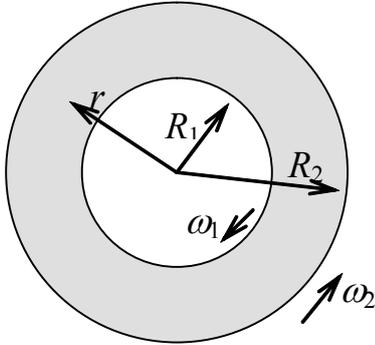


Рис. 8.7

Рассматривая уравнение движения в цилиндрических координатах (8.3.15) при заданной топологии течения, получим

$$\begin{aligned} 1. \quad & -\frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \\ 2. \quad & \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} = 0, \\ 3. \quad & 0 \equiv 0, \\ 4. \quad & 0 \equiv 0. \end{aligned} \quad (8.3.24)$$

Следует заметить, что как первое, так и второе уравнение для определения скорости не содержат коэффициента динамической вязкости η .

Решение второго уравнения в (8.3.24) имеет следующий вид:

$$v_\varphi = ar + \frac{b}{r}. \quad (8.3.25)$$

Граничные условия для определения постоянных можно записать следующим образом:

$$r = R_1, \quad v_\varphi = \omega_1 R_1; \quad r = R_2, \quad v_\varphi = \omega_2 R_2.$$

Постоянные a и b в (8.3.25) могут быть найдены из системы уравнений:

$$\omega_1 R_1 = aR_1 + \frac{b}{R_1}, \quad \omega_2 R_2 = aR_2 + \frac{b}{R_2}.$$

Решение этой системы уравнений приводит к результату:

$$a = \frac{\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}, \quad b = \frac{(\omega_2 - \omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}. \quad (8.3.26)$$

Так как распределение скорости v_φ в зазоре между цилиндрами не зависит от коэффициента динамической вязкости, то такое распределение может иметь и идеальная жидкость, не обладающая вязкостью по определению. Проанализируем полученное решение.

1. Если $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ (вращение цилиндров в одну сторону), то $v_\varphi = \omega r$, т.е. жидкость в зазоре вращается как абсолютно твердое тело с постоянной угловой скоростью, равной скорости вращения цилиндров. Как показано выше, такое вращение жидкости является непотенциальным, вихревым движением.

2. Если $\omega_2 = 0, R_2 \rightarrow \infty$, то $v_\varphi = \omega_1 R_1^2 / r$. Как было установлено выше, циркуляция скорости по любому контуру, не охватывающему цилиндр, равна нулю. Циркуляция скорости по любому контуру, охватывающему цилиндр, равна: $\Gamma = 2\pi r v_\varphi = 2\pi R_1^2 \omega_1$. Очевидно, во всех плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра, движение жидкости одинаково и может считаться плоским. Как было определено выше, такое движение называют плоским вихрем, и движение в нём безвихревое, потенциальное. Таким образом, движение вязкой несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, является потенциальным во всех точках объема вне цилиндра.

При неслишком больших скоростях набегающего потока и угловой скорости цилиндра подъемная сила, возникающая при обтекании цилиндра с циркуляцией, может быть определена следующим образом:

$$F_y = -\rho v_\infty \Gamma = -2\pi \rho v_\infty R_1^2 \omega_1.$$

Направление подъемной силы и её величина определяются значениями как скорости набегающего потока, так и направлением угловой скорости вращения цилиндра. При прочих равных условиях величина подъемной силы пропорциональна квадрату радиуса цилиндра.

Распределение давления в зазоре между цилиндрами можно определить из первого уравнения системы (8.3.24)

$$P = \int \frac{\rho v_\varphi^2}{r} dr = \rho \int \frac{1}{r} \left(ar + \frac{b}{r} \right)^2 dr = \rho \left(\frac{1}{2} a^2 r^2 + 2ab \ln r - \frac{1}{2} \frac{b^2}{r^2} \right) + c.$$

Постоянная c может быть определена из граничных условий: при $r = R_1, P = P_1$ или при $r = R_2, P = P_2$.

Если $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ и жидкость несжимаемая, то $v_\varphi = \omega r$ и распределение давления в зазоре имеет вид:

$$r = r_1, P = P_1, \quad P(r) = P_1 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 (r^2 - R_1^2). \quad (8.3.26a)$$

Для сжимаемого газа, вращающегося в цилиндре радиуса r_0 , массовая плотность зависит от радиуса $\rho = \rho(r)$. Поэтому в первом уравнении системы (8.3.24) плотность ρ необходимо определить через давление и температуру из термического уравнения состояния $P/\rho = RT$. Решение этого уравнения даёт следующее распределение давления:

$$\int_{P(r)}^{P_0} \frac{dP}{P} = \int_r^{r_0} \frac{\omega^2}{RT} r dr, \quad P(r) = P_0 \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2RT}(r_0^2 - r^2)}. \quad (8.3.26b)$$

Определим момент M_1 сил трения, действующих на единицу длины внутреннего цилиндра,

$$M_1 = F_\varphi R_1 = S \sigma_\varphi^{(n)} R_1 = 2\pi R_1 \sigma_{\varphi r} R_1, \quad \sigma_{\varphi r} = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)_{r=R_1}.$$

Подставляя значение v_φ (8.3.25) и дифференцируя, получим

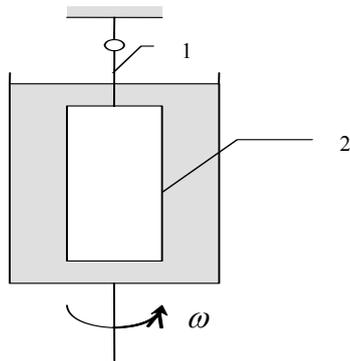
$$\sigma_{\varphi r} \Big|_{r=R_1} = -\eta \frac{2b}{R_1^2} = -\eta \frac{2(\omega_2 - \omega_1)R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}.$$

Тогда момент сил трения определяется по формуле

$$M_1 = -\frac{4\pi\eta(\omega_2 - \omega_1)R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}. \quad (8.3.27)$$

Очевидно, на единицу длины внешнего цилиндра действует такой же момент сил трения, но с обратным знаком.

На основе полученного точного решения можно организовать опыт, позволяющий определить коэффициент вязкости жидкости (рис. 8.8). Определяя момент сил трения по углу закручивания нити 1, на которой



Р и с . 8 . 8

подвешен неподвижный внутренний цилиндр 2, по формуле (8.3.27) можно определить коэффициент вязкости жидкости. При этом геометрические размеры цилиндров и угловая скорость вращения внешнего цилиндра должны быть известны. Существенную конструктивную трудность такой установки представляет устранение влияния торцов цилиндров, т. к. точное решение, полученное выше, справедливо лишь для бесконечных цилиндров.

8.4. МЕДЛЕННОЕ ОБТЕКАНИЕ ШАРА ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ, НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

8.4.1. Решение уравнения Навье-Стокса

Пусть неподвижный шар радиусом r_0 обтекается вязкой несжимаемой жидкостью со скоростью \mathbf{u} на бесконечности в отсутствие внешних сил. Движение будем считать изотермическим и стационарным, тогда уравнение движения имеет вид:

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{v}. \quad (8.4.1)$$

Оценим порядок слагаемых этого уравнения. Скорость набегающего потока u уменьшается до нуля на поверхности шара на расстоянии, равном приблизительно диаметру шара. Поэтому имеем:

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \approx \frac{u^2}{d}, \quad \nu\Delta\mathbf{v} \approx \frac{\eta}{\rho} \frac{u}{d^2}, \quad \frac{(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}}{\nu\Delta\mathbf{v}} \approx \frac{\rho u d}{\eta} = \text{Re}.$$

Если безразмерное отношение $\rho u d / \eta = \text{Re}$ будет значительно меньше единицы, то в уравнении движения слагаемым $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ можно пренебречь по сравнению с остальными слагаемыми. Это безразмерное отношение называют *числом Рейнольдса* (Re). Очевидно, число Рейнольдса показывает во сколько раз инерциальные силы в жидкости больше вязких сил.

Таким образом, если $\text{Re} \ll 1$, то уравнение движения (8.4.1) имеет вид:

$$\eta\Delta\mathbf{v} - \nabla P = 0. \quad (8.4.2)$$

Применяя операцию *rot* к уравнению (8.4.2), получим:

$$\Delta \text{rot}\mathbf{v} = 0, \quad \text{т. к. } \text{rot}\nabla \equiv 0. \quad (8.4.3)$$

Представим скорость движения частицы жидкости в виде суммы двух составляющих, т. е. $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}'$, имея в виду, что добавка \mathbf{v}' обращается в нуль на бесконечности. Из условия несжимаемости жидкости имеем:

$$\text{div}\mathbf{v} = 0, \quad \text{div}(\mathbf{u} + \mathbf{v}') = 0, \quad \text{div}\mathbf{v}' = 0, \quad \text{т. к. } \text{div}\mathbf{u} = 0.$$

Поэтому добавка \mathbf{v}' может быть представлена в виде $\mathbf{v}' = \text{rot}\mathbf{A}$ т. к. $\text{div}\text{rot}\mathbf{A} \equiv 0$. Уравнение (8.4.3) преобразуется к виду:

$$\Delta \text{rot}\text{rot}\mathbf{A} = 0. \quad (8.4.4)$$

По условию задачи (рис. 8.9) имеется два полярных вектора: радиус-вектор \mathbf{r} точки наблюдения на линии тока и вектор \mathbf{u} скорости набегающего потока. Добавка \mathbf{v}' является также полярным вектором. Поэтому вектор \mathbf{A} должен быть аксиальным вектором, т. к. ротор аксиального вектора является полярным.

Аксиальный вектор \mathbf{A} будем искать в виде

$$\mathbf{A} = f_1(r) \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{u}], \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (8.4.5)$$

Здесь $f_1(r)$ есть произвольная функция модуля радиуса-вектора \mathbf{r} , \mathbf{n} - единичный вектор направления радиуса-вектора \mathbf{r} .

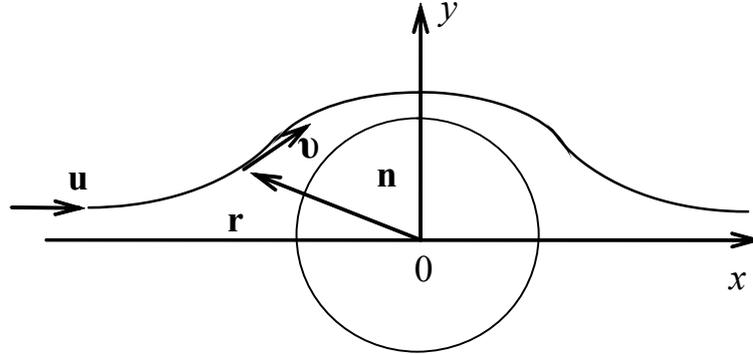


Рис. 8.9

Будем искать функцию $f_1(r)$ в форме производной по r некоторой функции $f(r)$, т. е.

$$f_1(r) = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \nabla f. \quad (8.4.6)$$

Из векторной алгебры известно, что

$$\text{rot}(\mathbf{f}\mathbf{u}) = f \cdot \text{rot}\mathbf{u} + [\nabla f \cdot \mathbf{u}].$$

Вектор скорости набегающего потока \mathbf{u} постоянный, поэтому

$$\text{rot}\mathbf{u} = 0, \quad \text{rot}(\mathbf{f}\mathbf{u}) = [\nabla f \cdot \mathbf{u}]. \quad (8.4.7)$$

Учитывая (8.4.6), (8.4.7), вектор \mathbf{A} (8.4.5) можно записать в виде:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial r} [\mathbf{n} \times \mathbf{u}] = [\nabla f \cdot \mathbf{u}] = \text{rot}(\mathbf{f}\mathbf{u}). \quad (8.4.8)$$

После подстановки (8.4.8) в (8.4.4) имеем:

$$\Delta \text{rot} \text{rot}(\mathbf{f}\mathbf{u}) = 0. \quad (8.4.9)$$

Если воспользоваться известным соотношением из векторной алгебры вида

$$\text{rot} \text{rot} = \nabla \text{div} - \Delta, \quad \text{div} \text{rot} \equiv 0,$$

то из (8.4.9) с использованием (8.4.8) следует

$$\Delta \Delta \text{rot}(\mathbf{f}\mathbf{u}) = \Delta \Delta [\nabla f \cdot \mathbf{u}] = 0. \quad (8.4.10)$$

Применим операцию двойного лапласиана к i -ой компоненте вектора в (8.4.10) и запишем это уравнение в тензорном виде:

$$\begin{aligned}\Delta\Delta[\nabla f \cdot \mathbf{u}]_i &= \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} \varepsilon_{ikl} \frac{\partial f}{\partial x_k} u_l = \\ &= \varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} (f u_l) = [\nabla(\Delta\Delta f) \cdot \mathbf{u}]_i.\end{aligned}\quad (8.4.11)$$

Так как $\mathbf{u} = const$, то уравнение (8.4.10) можно записать в виде

$$\Delta\Delta\nabla f = \nabla\Delta\Delta f = 0, \quad \Delta\Delta f = const. \quad (8.4.12)$$

Очевидно, постоянную в правой части последнего уравнения необходимо положить равной нулю. Действительно, конечной целью решения является определение скорости \mathbf{v}' как функции координат. Но согласно определения $\mathbf{v}' = rot\mathbf{A}$ и (8.4.8) \mathbf{v}' определяется только вторыми производными f по координатам, тогда как для нахождения f согласно уравнения (8.4.12) предстоит проинтегрировать f по координатам четыре раза, т. е. f будет пропорционально r^4 . Поэтому, если постоянную в (8.4.12) не полагать равной нулю, то скорость \mathbf{v}' стремиться к ∞ при $r \rightarrow \infty$, что противоречит её определению.

Тогда в сферических координатах уравнение (8.4.12) имеет вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \Delta f \right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$\frac{d}{dr} \Delta f = -\frac{2a}{r^2}, \quad \Delta f = \frac{2a}{r} + c. \quad (8.4.13)$$

Здесь знак (-) и коэффициент 2 в константе интегрирования выбраны для удобства. По приведенным выше соображениям постоянную c также следует положить равной нулю. Следующее интегрирование приводит к результату:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) f &= \frac{2a}{r}, \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) f = 2ar, \\ r^2 \frac{df}{dr} &= ar^2 - b, \quad f = ar + \frac{b}{r}.\end{aligned}\quad (8.4.14)$$

При последнем интегрировании постоянная d интегрирования опущена, т. к. скорость \mathbf{v}' определяется производными по координатам, поэтому постоянная интегрирования несущественна.

8.4.2. Распределение скорости в поле течения около шара

Используя определение скорости движения частиц жидкости, имеем:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + rot[\nabla f \times \mathbf{u}] = \mathbf{u} + rotrot(f\mathbf{u}) = \mathbf{u} + (\nabla div - \Delta)(f\mathbf{u}). \quad (8.4.15)$$

Поскольку \mathbf{u} - постоянный вектор, то, используя (8.4.14), третье слагаемое в (8.4.15) преобразуем к виду:

$$\Delta(f\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \Delta f = \mathbf{u} \frac{2a}{r},$$

$$\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \mathbf{u}\nabla f + f\operatorname{div}\mathbf{u} = \mathbf{u}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + 0 = \mathbf{u}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{n} = \left(a - \frac{b}{r^2}\right)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}).$$

Аналогично преобразуем второе слагаемое в (8.4.15):

$$\begin{aligned}\nabla\operatorname{div}(f\mathbf{u}) &= \nabla\left[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\left(a - \frac{b}{r^2}\right)\right] = \nabla\left[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\left(\frac{a}{r} - \frac{b}{r^3}\right)\right] = \left(\frac{a}{r} - \frac{b}{r^3}\right)\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}) + \\ &+ (\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\nabla\left(\frac{a}{r} - \frac{b}{r^3}\right) = \left(\frac{a}{r} - \frac{b}{r^3}\right)\cdot\mathbf{u} + \left(-\frac{a}{r^2} + \frac{3b}{r^4}\right)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}\end{aligned}$$

После подстановки полученных выражений в (8.4.15) и группировки соответствующих слагаемых вектор скорости потока в точке \mathbf{r} поля течения равен:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a\frac{\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}}{r} + b\frac{3(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{u}}{r^3}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (8.4.16)$$

Постоянные a и b должны быть определены из граничных условий на поверхности шара: при $r = r_0$, $\mathbf{v} = 0$.

Так как вектор скорости жидкости должен быть равен нулю в любой точке на поверхности шара, т. е. при любой ориентации единичного нормального вектора \mathbf{n} , то, следовательно, должны обращаться в нуль в отдельности коэффициенты при векторах \mathbf{u} и $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ в выражении (8.4.16):

$$1. \text{ при } \mathbf{u}: \quad 1 - \frac{a}{r_0} - \frac{b}{r_0^3} = 0, \quad 2. \text{ при } (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}: \quad -\frac{a}{r_0} + \frac{3b}{r_0^3} = 0.$$

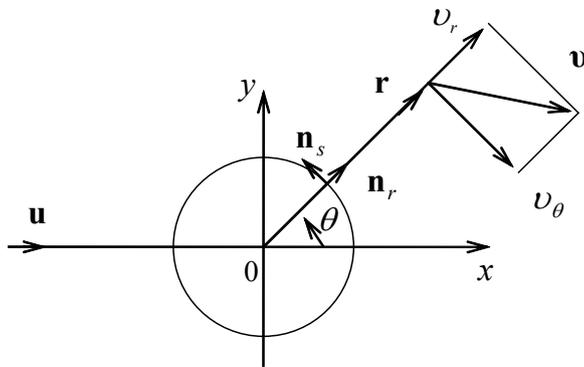


Рис. 8.10

Решение этой системы уравнений приводит к результату:

$$a = \frac{3}{4}r_0, \quad b = \frac{r_0^3}{4}. \quad (8.4.17)$$

Очевидно, что картина обтекания шара (рис. 8.10) имеет сферическую симметрию, поэтому $v_\varphi = 0$. Компоненты скорости v_r и v_θ могут быть найдены из (8.4.16) и (8.4.17) в виде:

$$\begin{aligned}v_r &= u \cos \theta - \frac{3}{4}r_0 \frac{u \cos \theta + u \cos \theta}{r} + \frac{1}{4}r_0^3 \frac{3u \cos \theta - u \cos \theta}{r^3}, \\ v_\theta &= -\left[u \sin \theta - \frac{3}{4}r_0 \frac{u \sin \theta}{r} + \frac{1}{4}r_0^3 \frac{(-u \sin \theta)}{r^3} \right].\end{aligned}$$

Таким образом, компоненты v_r и v_θ скорости движения индивидуальной частицы при медленном обтекания шара потоком вязкой несжимаемой жидкости определяются соотношениями:

$$v_r = \left(1 - \frac{3r_0}{2r} + \frac{1}{2} \frac{r_0^3}{r^3}\right) \cdot u \cos \theta, \quad v_\theta = -\left(1 - \frac{3r_0}{4r} - \frac{1}{4} \frac{r_0^3}{r^3}\right) \cdot u \sin \theta. \quad (8.4.18)$$

На поверхности шара в любой точке $v_r = v_\theta = 0$, а, следовательно, и $\mathbf{v} = 0$ в соответствии с граничными условиями.

8.4.3. Распределение давления в поле течения около шара и на его поверхности

Для определения силы, действующей на шар со стороны движущейся жидкости, возвратимся к исходному уравнению (8.4.2)

$$\nabla P = \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (8.4.19)$$

Согласно определению скорости \mathbf{v} она равна

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{u} + \text{rot} [\nabla f \mathbf{u}] = \mathbf{u} + \text{rot rot} (f \mathbf{u}).$$

После подстановки этого определения в (8.4.19) имеем

$$\nabla P = \eta \Delta \text{rot rot} (f \mathbf{u}) = \eta \Delta (\nabla \text{div} - \Delta) (f \mathbf{u}). \quad (8.4.20)$$

Поскольку в соответствии с (8.4.12) $\Delta \Delta f = 0$, то из (8.4.20) следует

$$\nabla P = \eta \Delta \nabla \text{div} (f \mathbf{u}) = \nabla \eta \Delta \text{div} (f \mathbf{u}). \quad (8.4.21)$$

После интегрирования данного уравнения по r и выбора в качестве произвольной постоянной интегрирования давления жидкости P_∞ в набегающем потоке вдали от шара, находим давление P :

$$P = P_\infty + \eta \Delta \text{div} (f \mathbf{u}), \quad (8.4.22)$$

но $\text{div} (f \mathbf{u}) = \mathbf{u} \nabla f + f \text{div} \mathbf{u} = \mathbf{u} \nabla f$, т. к. $\text{div} \mathbf{u} = 0$.

Поэтому имеем

$$P = P_\infty + \eta \mathbf{u} \Delta (\nabla f) = P_\infty + \eta \mathbf{u} \nabla (\Delta f).$$

Принимая во внимание (8.4.13) для Δf и (8.4.17) для коэффициента a , получим

$$P = P_\infty + \eta \mathbf{u} \nabla \left(\frac{2}{r} \cdot \frac{3}{4} r_0 \right) = P_\infty + \eta \mathbf{u} \frac{3}{2} r_0 \nabla \left(\frac{1}{r} \right),$$

$$P = P_\infty - \eta \frac{3}{2} \frac{r_0}{r^2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}). \quad (8.4.23)$$

Формула (8.4.23) позволяет определить давление P в любой точке \mathbf{r} поля течения вязкой несжимаемой жидкости вблизи шара.

На поверхности шара ($r = r_0$) в плоскости наибольшего его поперечного сечения распределение давления имеет вид:

$$P = P_\infty - \frac{3}{2} \cdot \frac{\eta u}{r_0} \cdot \cos \theta. \quad (8.4.24)$$

Для сравнения ниже приведены распределения по поверхности давления $P_{\text{неподв}}$ при обтекании неподвижного цилиндра потоком идеальной

несжимаемой жидкости (7.6.12) и $P_{\text{движ}}$ длядвигающегося цилиндра в неподвижной идеальной жидкости (7.6.39):

$$P_{\text{неподв}} = P_{\infty} + \frac{\rho v_{\infty}^2}{2}(1 - 4\sin^2 \theta), \quad P_{\text{движ}} = P_{\infty} + \frac{\rho u^2}{2}(1 - 4\cos^2 \theta).$$

Сила \mathbf{F} , действующая на шар со стороны движущейся вязкой жидкости в общем виде и в направлении радиуса-вектора \mathbf{r} , определяется следующими интегральными соотношениями:

$$\mathbf{F} = \oint_{(S)} \boldsymbol{\sigma}^{(n)} dS, \\ F_r = \oint_{(S)} \sigma_r^{(n)} dS = \oint_{(S)} \sigma_{rk} n_k dS = \oint_{(S)} (\sigma_{rr} n_r + \sigma_{r\theta} n_{\theta} + \sigma_{r\varphi} n_{\varphi}) dS. \quad (8.4.25)$$

В качестве произвольного направления действия вязкой силы удобно выбирать направление, совпадающее с направлением скорости набегающего потока \mathbf{u} . В этом случае проекции компонент $n_r, n_{\theta}, n_{\varphi}$ нормального единичного вектора \mathbf{n} к произвольному элементу поверхности шара dS в (8.4.25) на направление скорости набегающего потока \mathbf{u} равны (см. рис. 8.10)

$$n_r = \cos \theta, \quad n_{\theta} = \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta, \quad n_{\varphi} = 0. \quad (8.4.26)$$

Проекция силы F_r на направление скорости \mathbf{u} определяет силу сопротивления шара F_u в потоке вязкой несжимаемой жидкости и в соответствии с (8.4.25, 26) она равна

$$F_u = \oint_{(S)} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) dS = \oint_{(S)} [(-P\delta_{rr} + \tilde{\sigma}_{rr}) \cos \theta - (-P\delta_{r\theta} + \tilde{\sigma}_{r\theta} \sin \theta)] dS. \quad (8.4.27)$$

Вычислим значение компонент тензора вязких напряжений $\tilde{\sigma}_{rr}$ и $\tilde{\sigma}_{r\theta}$ на поверхности шара ($r = r_0$) в сферической системе координат (8.3.14), используя соответствующие компоненты скорости v_r и v_{θ} (8.4.18):

$$\tilde{\sigma}_{rr} \Big|_{r=r_0} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 2\eta \left(\frac{3 r_0}{2 r^2} - \frac{3 r_0^3 r^2}{2 r^6} \right) \Big|_{r=r_0} u \cos \Theta = 0.$$

Принимая во внимание, что на поверхности шара ($r = r_0$) $v_r = 0$ и $v_{\theta} = 0$, из (8.3.14) и (8.4.18) для $\tilde{\sigma}_{r\theta}(r = r_0)$ имеем:

$$\tilde{\sigma}_{r\theta}(r = r_0) = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} \right) \Big|_{r=r_0} = -\frac{3 \eta u}{2 r_0} \sin \Theta.$$

После подстановки распределения давления P по поверхности шара (8.4.24) и значений $\tilde{\sigma}_{rr}$ и $\tilde{\sigma}_{r\theta}$ в (8.4.27) получим для F_u формулу:

$$F_u = \oint_{(S)} \left(-P_0 \cos \theta + \frac{3 \eta u}{2 r_0} \cos^2 \theta + \frac{3 \eta u}{2 r_0} \sin^2 \theta \right) dS = \frac{3 \eta u}{2 r_0} \oint_{(S)} dS = \frac{3 \eta u}{2 r_0} \cdot 4\pi r_0^2.$$

Таким образом, при медленном ($Re \ll 1$) обтекании шара вязкой несжимаемой жидкостью сила сопротивления равна:

$$F_u = 6\pi r_0 \eta u. \quad (8.4.28)$$

Формулу (8.4.28) называют *формулой Стокса*. Формула Стокса имеет широкое применение. Она используется для измерения коэффициентов вязкости жидкостей по методу падающего шарика, использовалась Милликеном при определении величины заряда электрона. Эта формула часто используется при изучении движения мелких пылинок или капель жидкости в атмосфере и т. д.

Более точное решение задачи Стокса с учетом нелинейного слагаемого $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в уравнении движения Навье-Стокса в области чисел Рейнольдса $Re < 1$ было получено Осееном:

$$F_u = 6\pi r_0 \eta u \left(1 + \frac{3}{8} Re \right), \quad Re = \frac{\rho r_0 u}{\eta} \quad (8.4.29)$$

Как показывает опыт, формула Осеена справедлива до чисел Рейнольдса порядка единицы. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса картина обтекания шара существенно изменяется (наблюдается отрыв потока с поверхности с образованием застойной зоны за шаром) и вышеприведенное рассмотрение не справедливо.

При малых числах Рейнольдса аналогичную задачу можно решить для произвольного эллипсоида и даже диска. Так для тонкого диска, расположенного перпендикулярно и параллельно набегающему потоку, сила сопротивления равна ($Re \ll 1$):

$$F_u^\perp = 16r_0 \eta u, \quad F_u^\parallel = \frac{32}{3} r_0 \eta u.$$

В системе CGS коэффициент динамической вязкости η определяют в пуазах. Один *пуаз* есть динамическая вязкость такой среды, в которой площадка в 1 см^2 одного слоя испытывает со стороны другого слоя силу в 1 дину при градиенте скорости между слоями в 1 см/с на 1 см длины.

В системе СИ коэффициент η определяют в единицах, определяемых соотношением

$$1 \text{ пуаз} = 1 \frac{\text{дина} \cdot \text{с}}{\text{см}^2} = 0,1 \frac{\text{НЬЮТОН} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}.$$

Коэффициент кинематической вязкости $\nu = \eta/\rho$ определяется в *стоксах* соотношением

$$1 \text{ стокс} = 1 \frac{\text{см}^2}{\text{с}} = 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Для сведения в таблице 3.1 приведены значения коэффициентов динамической η и кинематической ν вязкости для некоторых сред при температуре 300К.

Следует отметить, что коэффициент динамической вязкости как газов, так и жидкостей не зависит от давления в диапазоне $P < 10$ атм.

Таблица 3.1

Вещество	$\eta, \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$	$\nu, \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$
Вода	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$
Воздух	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$
Спирт	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$
Глицерин	0.85	$6.8 \cdot 10^{-4}$
Ртуть	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$

Динамическая вязкость *газов* с увеличением температуры *увеличивается* в соответствии с законом

$$\eta = AT^n, \quad (0.5 < n < 1.5).$$

Динамическая же вязкость *жидкостей* с увеличением температуры *уменьшается*. Экспериментальные данные по температурной зависимости коэффициентов динамической вязкости жидкостей хорошо описываются формулой

$$\eta = C \cdot \exp\left(\frac{B}{T}\right).$$

Здесь A , B и C - некоторые эмпирические константы.