

9. МЕТОД ПОДОБИЯ И АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

В теме 8 рассмотрено несколько точных решений уравнений движения вязкой жидкости. Можно было бы указать ещё несколько примеров и тем самым исчерпать весь список имеющихся точных решений.

Однако практика настоятельно требует решения задач, которые в силу математических трудностей не могут быть решены аналитически точно. В этих многочисленных случаях необходимо обращаться непосредственно к эксперименту. Но и экспериментальные данные не всегда возможно получить на тех объектах, для которых решается данная задача. Например, хотелось бы знать силу сопротивления, которую испытывает новая, проектируемая конструкция самолёта при движении его с заданной скоростью на определенной высоте. Зная силу сопротивления можно было бы выбрать двигатель, обеспечивающий заданную скорость. Вообще говоря, можно изготовить полностью такой самолёт, поставить на него некоторый двигатель и, поднявшись на заданную высоту, измерить скорость. Но ведь данный двигатель может и не развить заданную скорость, а в распоряжении конструктора сегодня может и не оказаться подходящего двигателя. В принципе, методом проб и ошибок можно было бы каким-либо компромиссным способом проблему всё же решить, однако такой путь связан с колоссальными материальными и временными затратами. То же самое можно было бы сказать о проблемах проектирования больших турбин, ракет, самолётов и т.д.

Поэтому, конечно, было бы интересно опыты проводить на моделях реальных объектов в условиях полностью подчиняющихся и контролируемых экспериментатором. Однако возникает существенный вопрос, в какой мере, когда и как возможно результаты, полученные на моделях, применять к натурным объектам. На этот вопрос отвечает теория подобия гидродинамических движений.

9.1. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим уравнение Навье - Стокса в поле силы тяжести, которое имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\text{graddiv}\mathbf{v} + \mathbf{g} . \quad (9.1.1)$$

Для неслишком быстрых движений или одноатомных газов, молекулы которых не обладают внутренними степенями свободы, объёмная вязкость не существенна и будем полагать её равной нулю, т.е. $\zeta = 0$. Кроме того, для простоты будем полагать движение изотермическим ($T = const$). Тогда уравнение баланса внутренней энергии можно не рассматривать.

Приведем уравнение движения (9.1.1) к безразмерному виду. Для этого выберем некоторые характерные размерные величины. Пусть L - некоторый характерный размер обтекаемого тела (диаметр шара, трубы, большая ось эллипса, хорда профиля крыла и т.д.). Тогда размерные координаты можно записать в виде

$$x = x_* L, \quad y = y_* L, \quad z = z_* L.$$

Здесь x_* , y_* , z_* - некоторые безразмерные координаты. Очевидно, что переход к безразмерным координатам при помощи данных соотношений просто означает переход к другому масштабу измерений расстояний: все расстояния измеряются в долях расстояния L , которое принято за единицу измерения.

Пусть далее v_∞ есть некоторая характерная скорость движения среды - например, скорость набегающего потока или скорость движения потока в центре трубы. Тогда скорость среды в любой точке потока можно записать:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_* \cdot v_\infty.$$

Для нестационарных задач выберем также некоторое характерное время τ , которое может быть или периодом движения для периодических движений, временем релаксации к стационарному движению или просто временем прохождения выбранного расстояния L с выбранной характерной скоростью v_∞ . Переход к безразмерному времени аналогичен: $t = t_* \tau$.

Принимая за характерное давление и плотность, например, давление и плотность в набегающем потоке, имеем:

$$P = P_* P_\infty, \quad \rho = \rho_* \rho_\infty.$$

Наконец, измеряя ускорение силы тяжести в долях ускорения силы тяжести на поверхности земли g_0 , получим $g = g_* g_0$. Тогда каждое слагаемое уравнения (9.1.1) можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{v_\infty}{\tau} \frac{\partial \mathbf{v}_*}{\partial t_*}, & (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= \frac{v_\infty^2}{L} (\mathbf{v}_* \nabla_*) \mathbf{v}_*, \\ \frac{\nabla P}{\rho} &= \frac{P_\infty}{\rho_\infty L} \frac{\nabla_* P_*}{\rho_*}, & \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} &= \eta \frac{v_\infty}{\rho_\infty L^2} \frac{1}{\rho_*} \Delta_* \mathbf{v}_*, \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{3} \eta \text{grad div} \mathbf{v} &= \frac{1}{3} \eta \frac{v_\infty}{\rho_\infty L^2} \frac{1}{\rho_*} \text{grad}_* \text{div}_* \mathbf{v}_*. \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

Подставляя полученные соотношения в уравнение Навье-Стокса, и деля на коэффициент при конвективном слагаемом, получим:

$$\begin{aligned} \frac{L}{\tau v_{\infty}} \frac{\partial \mathbf{v}_{\bullet}}{\partial t_{\bullet}} + (\mathbf{v}_{\bullet} \cdot \nabla_{\bullet}) \mathbf{v}_{\bullet} = & - \frac{P_{\infty}}{\rho_{\infty} v_{\infty}^2} \frac{1}{\rho_{\bullet}} \nabla_{\bullet} P_{\bullet} + \frac{\eta}{\rho_{\infty} v_{\infty} L} \cdot \frac{1}{\rho_{\bullet}} \times \\ & \times \left(\Delta_{\bullet} \mathbf{v}_{\bullet} + \frac{1}{3} \text{grad}_{\bullet} \text{div}_{\bullet} \mathbf{v}_{\bullet} \right) + \frac{g_0 L}{v_{\infty}^2} \mathbf{g}_{\bullet} . \end{aligned} \quad (9.1.3)$$

Аналогично можно записать уравнение непрерывности в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \rho_{\bullet}}{\partial t_{\bullet}} + \frac{\tau v_{\infty}}{L} \text{div}_{\bullet} \rho_{\bullet} \mathbf{v}_{\bullet} = 0 . \quad (9.1.4)$$

Обозначим безразмерные коэффициенты в уравнениях (9.1.3) и (9.1.4) следующим образом:

$$\frac{v_{\infty} \tau}{L} = St , \quad \frac{\rho_{\infty} v_{\infty}^2}{P_{\infty}} = M^2 , \quad \frac{\rho_{\infty} v_{\infty} L}{\eta} = Re , \quad \frac{v_{\infty}^2}{gL} = Fr . \quad (9.1.5)$$

Тогда уравнение (9.1.3) и (9.1.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{St} \frac{\partial \mathbf{v}_{\bullet}}{\partial t_{\bullet}} + (\mathbf{v}_{\bullet} \cdot \nabla_{\bullet}) \mathbf{v}_{\bullet} = & - \frac{1}{M^2} \frac{1}{\rho_{\bullet}} \nabla_{\bullet} P_{\bullet} + \frac{1}{Re} \cdot \frac{1}{\rho_{\bullet}} \times \\ & \times \left(\Delta_{\bullet} \mathbf{v}_{\bullet} + \frac{1}{3} \text{grad}_{\bullet} \text{div}_{\bullet} \mathbf{v}_{\bullet} \right) + \frac{1}{Fr} \mathbf{g}_{\bullet} . \end{aligned} \quad (9.1.6a)$$

$$\frac{\partial \rho_{\bullet}}{\partial t_{\bullet}} + \frac{1}{St} \text{div}_{\bullet} \rho_{\bullet} \mathbf{v}_{\bullet} = 0 . \quad (9.1.6b)$$

При неизотермическом движении безразмерное уравнение состояния для идеального газа имеет вид:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu} , \quad \frac{P_{\infty}}{\rho_{\infty}} \frac{P_{\bullet}}{\rho_{\bullet}} = \frac{R T_{\infty} T_{\bullet}}{\mu T_{\infty}} , \quad \frac{P_{\bullet}}{\rho_{\bullet}} = \text{const} \cdot T_{\bullet} . \quad (9.1.6b)$$

Тогда любое решение системы уравнений (9.1.6) независимо от формы движения жидкости в общем случае имеет вид:

$$\mathbf{v}_{i\bullet} = \frac{v_i}{v_{\infty}} = f(St, Re, M, Fr, x_{\bullet}, y_{\bullet}, z_{\bullet}, t_{\bullet}) , \quad (9.1.8)$$

где St - число Струхалия, M - число Майевского, Re - число Рейнольдса, Fr - число Фруда. Аналогичное выражение можно записать и для безразмерного давления P_{\bullet} и плотности ρ_{\bullet} .

9.2. ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ ПОТОКОВ

Из (9.1.6,7) следует, что два изотермических потока будут динамически подобны, если выполняются, прежде всего, следующие равенства:

$$St_1 = St_2, \quad M_1 = M_2, \quad Re_1 = Re_2, \quad Fr_1 = Fr_2.$$

Эти безразмерные коэффициенты называют *безразмерными критериями* или числами динамического подобия потоков.

Очевидно также, что динамически подобными могут быть лишь потоки, обтекающие геометрически подобные тела, которые одинаково расположены к направлению набегающего потока. *Геометрически подобные тела* - это такие тела, для любых сходственных точек поверхности которых их безразмерные координаты одинаковы, если за характерный размер L принят один и тот же сходственный размер (например, большая эллипсоида), за начало координат принята одна и та же сходственная точка. Или иначе, для геометрически подобных тел уравнения их поверхностей в безразмерных координатах полностью совпадают, если за характерный размер принят один и тот же сходственный размер.

Действительно, из граничных условий следует, что на поверхности некоторого неподвижного тела скорость должна быть равна нулю. Следовательно, она будет равна нулю на поверхности другого тела только в том случае согласно (9.1.7), если безразмерные координаты сходственных точек его поверхности будут равны безразмерным координатам тела, т.е. если тела будут геометрически подобными. Требование одинаковости сходственного размера и одинаковости расположения тела по отношению к набегающему потоку также очевидно из необходимости удовлетворения граничных условий.

Таким образом, два изотермических потока жидкости будут *динамически подобными*, если, во-первых, они обтекают геометрически подобные тела; во-вторых, одинаково расположены по отношению к набегающему потоку и, в-третьих, равны их критерии подобия Струхалия, Рейнольдса, Майевского и Фруда. *Динамическое же подобие* означает, что в сходственных точках потоков (одинаковые безразмерные координаты) и в сходственные моменты времени (одинаковые безразмерные времена) безразмерные скорости, плотность и давление одинаковы.

Здесь для простоты рассмотрено динамическое подобие лишь изотермических потоков. В общем случае необходимо было бы рассмотреть так же уравнение баланса внутренней энергии, что привело бы к введению еще некоторых критериев подобия, которые необходимо было бы соблюдать при осуществлении динамически подобных потоков.

9.3. СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ. КОЭФФИЦИЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ.

Рассмотрим обтекание некоторого неподвижного тела. Вычислим силы, действующие со стороны жидкости на обтекаемое тело. Сила, действующая в направлении оси i со стороны ньютоновской жидкости на единичную площадку поверхности тела с нормальным единичным вектором \mathbf{n} , направленным вне тела, равна:

$$\sigma_i^{(n)} = \sigma_{ik} n_k = (-P\delta_{ik} + \tilde{\sigma}_{ik})n_k = \left(-P_\infty P_* \delta_{ik} + \eta \frac{v_\infty}{L} \tilde{\sigma}_{*ik} \right) n_k .$$

Тогда силу, действующую в i -ом направлении на всю поверхность тела S , можно записать в следующем виде:

$$F_i = \oint_{(S)} \left(-P_\infty P_* \delta_{ik} + \eta \frac{v_\infty}{L} \tilde{\sigma}_{*ik} \right) n_k dS .$$

Пусть S есть некоторая характерная площадь обтекаемого тела, это, например, площадь поверхности тела или площадь наибольшего сечения тела плоскостью, перпендикулярной набегающему потоку, - *миделево сечение* и т.п. Умножая и деля полученное выражение на постоянную величину $\rho_\infty v_\infty^2 S/2$, получим:

$$F_i = \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 S \oint_{(S)} \left(-\frac{2}{M^2} P_* \delta_{ik} + 2 \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\sigma}_{*ik} \right) \frac{dS_k}{S} . \quad (9.3.1)$$

Из решения системы уравнений (9.1.6) следует, что безразмерные давление P_* и плотность ρ_* являются как и безразмерная скорость v_* , в (9.1.7) функциями лишь безразмерных критериев подобия, безразмерных координат и безразмерного времени. При вычислении силы, действующей на обтекаемое тело, в (9.3.1) необходимо подставить значения P_* и σ_* на поверхности тела, для каждой точки которой безразмерные координаты есть просто некоторые числа. Поэтому результат интегрирования будет зависеть только от безразмерных критериев подобия и безразмерного времени.

Таким образом, в общем случае имеем

$$F_i = F_i(St, M, \text{Re}, Fr) .$$

Рассмотрим для простоты стационарное движение. Пусть скорость набегающего потока направлена вдоль оси x , а ось y - вертикально вверх. Тогда на основании соотношения (9.3.1) в общем случае для стационарного движения ($St=0$) имеем:

$$\begin{aligned}
 F_x &= \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 S C_x(\text{Re}, M, Fr) , \\
 F_y &= \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 S C_y(\text{Re}, M, Fr) , \\
 F_z &= \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 S C_z(\text{Re}, M, Fr) .
 \end{aligned}
 \tag{9.3.2}$$

Здесь силы F_x, F_y, F_z называют силой лобового сопротивления, подъёмной силы и боковой силы, а безразмерные коэффициенты C_x, C_y, C_z - *коэффициентами лобового сопротивления, подъёмной и боковой силы* соответственно. Из формулы (9.3.1) следует, что коэффициенты сопротивления геометрически подобных тел в динамически подобных потоках равны: $C_{im} = C_{in}$.

9.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Теперь можно перейти к решению задачи, поставленной в начале параграфа, о том, каким образом опыты на моделях могут помочь в решении задачи об обтекании реальных объектов.

Очевидно, что, во-первых, модель реального тела и само тело или натуральный объект должны быть геометрически подобны. Во вторых, модель и натуральный объект одинаково расположены к набегающему потоку. И, в-третьих, критерии подобия в потоках, обтекающих модель и натуральный объект, должны быть одинаковы. Тогда, измеряя распределения скорости, давления и плотности среды, движущейся около модели, а также силу сопротивления (а, следовательно, и коэффициенты сопротивления) модели, можно простым пересчётом определить скорости, давления и плотности в сходственных точках около натурального объекта и силу его сопротивления.

На практике в большинстве случаев нет нужды удовлетворять равенству всех критериев подобия. Так, очевидно, при стационарных движениях нет необходимости рассматривать число Струхала. Во многих случаях влияние силы тяжести на движение жидкости несущественно, и можно игнорировать число Фруда. Однако, если эти ограничения числа необходимых критериев вытекают из самой постановки задачи или условий движения, то имеется более существенное ограничение, заключающееся в том, что требования удовлетворения равенств сразу нескольких критериев часто бывают противоречивыми.

Для примера рассмотрим требования, которые вытекают из необходимости удовлетворить равенства чисел Майевского и Рейнольдса в натуральных (n) и модельных (m) движениях.

Для числа Майевского имеем:

$$M_m = M_n, \quad \left[\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{P_\infty} \right]_m = \left[\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{P_\infty} \right]_n.$$

Если речь идёт о движении одной и той же среды около модели и натурального объекта, то, разделив предыдущее соотношение на показатель адиабаты γ , получим:

$$M_m = M_n, \quad c^2 = \gamma \frac{P}{\rho}, \quad \frac{v_{\infty i}^2}{c_i^2} = \frac{v_{\infty i}^2}{c_i^2},$$

где c_i , c_i - скорости звука в набегающем потоке в модельном и натурном движении, соответственно.

Таким образом, необходимо удовлетворить равенствам по числам Майевского и Рейнольдса:

$$M_m = M_n, \quad \text{Re}_m = \text{Re}_n, \quad \frac{v_{\infty i}^2}{c_i^2} = \frac{v_{\infty i}^2}{c_i^2}, \quad \frac{\rho_{\infty i} v_{\infty i}^2 L_i}{\eta_i} = \frac{\rho_{\infty i} v_{\infty i}^2 L_i}{\eta_\infty} \quad (9.4.1)$$

Если модель в десять раз меньше объекта, т.е. $L_n / L_m = 10$, то при скорости обтекания объекта воздухом, равной 100 м/сек, воздух еще можно считать несжимаемым. При одинаковых плотностях ($\rho_{\infty m} = \rho_{\infty n}$) и коэффициентах динамической вязкости ($\eta_i = \eta_i$) согласно равенству (9.4.1) необходимо обдуть модель со скоростью ~ 317 м/сек. Но при такой скорости движения воздух нельзя считать несжимаемым и движение его около тела имеет весьма специфический характер (возникают ударные волны, скачки уплотнения). Но это противоречит и первому равенству в (9.4.1), из которого следует, что скорости набегающих потоков на объект и модель должны быть одинаковыми, если скорости звука в потоках одинаковы. Известно, что скорость звука в газе зависит лишь от его температуры, и, если газ в модельном опыте не подогревать специально, то скорости звука в обоих случаях будут равны. Поэтому имеется лишь два выхода: или осуществить лишь частичное подобие по одному какому-либо критерию, а влияние другого учитывать приближенно при помощи каких-то дополнительных опытов или расчетов, или изменять в модельном эксперименте параметры газа (давление, плотность, температуру) или даже сменить сам газ на газ, обладающий другой вязкостью или скоростью звука. К сожалению, вязкости всех газов отличаются не более чем в 4 раза, и зависят от температуры лишь как корень квадратный от абсолютной температуры. Поэтому более перспективным в этом отношении является изменение давления или плотности газа в модельном эксперименте.

Рассмотрим второй пример. Предположим, что необходимо определить силу лобового сопротивления некоторой новой конструкции самолета при скорости его полета в нижних слоях атмосферы, равной 720 км/час или 200 м/сек. Предположим, что изготовлена точная копия этого самолета - модель, в десять раз меньшая. Если модель обдувается также воздухом при той же самой

температуре ($\eta_i = \eta_i$), то скорость набегающего потока на модель должна быть равна:

$$Re_n = Re_m, \quad Re = \frac{\rho v d}{\eta}, \quad v_{\infty_m} = \frac{\eta_m}{\eta_n} \frac{L_n \rho_{\infty_n}}{L_m \rho_{\infty_m}} v_{\infty_n} = 10 v_{\infty_n} \frac{\rho_{\infty_n}}{\rho_{\infty_m}}.$$

Если плотности газа в набегающих потоках оставить одинаковыми, то моделирование невозможно, т.к. $M_n \neq M_m$. Для обеспечения равенства и чисел Маха необходимо при одинаковых температурах увеличить плотность воздуха в модельном эксперименте также в 10 раз.

Предположим, что удалось увеличить плотность модельного потока по сравнению с натурной плотностью только в 8 раз. Тогда скорость набегающего на модель потока должна быть равной 250 м/сек и можно приближенно считать, что модельный и натурный потоки динамически подобны, т.к. числа Маха будут отличаться незначительно, а скорость набегающего на модель потока остается дозвуковой.

Если каким-либо способом удаётся измерить силу лобового сопротивления модели, то по формуле (9.3.2) можно определить коэффициент лобового сопротивления, который будет одинаковым как у модели, так и у натурального объекта, т.к. в данном случае предполагается, что он зависит только от числа Рейнольдса. Но по условию (9.4.1) они для модельного и натурального движения одинаковы. Тогда нетрудно рассчитать коэффициент и силу лобового сопротивления объекта:

$$c_{xi} = c_{xi} = \frac{F_{xi}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty_i} v_{\infty_i}^2 S_i} = \frac{F_{xi}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty_i} v_{\infty_i}^2 S_i},$$

$$F_{xn} = F_{xm} \frac{\rho_{\infty_n}}{\rho_{\infty_m}} \frac{v_{\infty_n}^2}{v_{\infty_m}^2} \frac{S_n}{S_m} = \frac{1}{8} \left(\frac{20}{25} \right)^2 100 F_{xm}; \quad \frac{S_m}{S_n} = \frac{L_m^2}{L_n^2}; \quad F_{xn} = 8 F_{xm}$$

Зная экспериментальное значение силы лобового сопротивления модели, можно вычислить лобовое сопротивление натурального объекта, а, следовательно, и выбрать двигатель для обеспечения заданной скорости полета создаваемой конструкции самолета - 720 км/час. В действительности, в аэродинамических лабораториях снимают серии зависимостей $c_i = f(Re, M)$, которые позволяют конструкторам оптимизировать данную конструкцию самолета и выбор двигателя.

Если необходимо определить скорость воздуха, например, в какой-либо заданной точке на поверхности крыла самолета, то достаточно измерить её на модели в той же сходственной точке. Тогда из (9.1.5) следует:

$$v_{*n} = v_{*m}, \quad \frac{v_m}{v_{\infty_m}} = \frac{v_n}{v_{\infty_n}}, \quad v_n = v_m \frac{v_{\infty_n}}{v_{\infty_m}} = v_m \frac{20}{25} = v_m \frac{4}{5}.$$

Измеряя скорости движения газа около модели в различных точках, можно определить скорости движения газа во всех сходственных точках натурального объекта.

9.5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Во всех случаях, когда сила сопротивления может быть вычислена аналитически, предоставляется возможность аналитически вычислить и коэффициенты сопротивления. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Воспользуемся общей формулой (9.3.1) для вычисления коэффициентов сопротивления $c_x(\text{Re})$.

$$F_x = \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2} S c_x(\text{Re}). \quad (9.5.1)$$

В данном случае плотность жидкости постоянная, поэтому $\rho = \rho_\infty$. В качестве характерной скорости v_∞ можно выбрать среднюю скорость движения жидкости по трубе \bar{v} . За характерную площадь S можно принять площадь «трущейся» боковой поверхности трубы радиусом r_0 и длиной l . Как было показано в предыдущем разделе, вязкая сила, действующая на рассматриваемый участок трубы со стороны жидкости, равна разности давлений на этом участке, умноженной на площадь поперечного сечения трубы, т.е.

$$F_x = \pi r_0^2 \Delta P = \frac{\rho \bar{v}^2}{2} 2\pi r_0 l c_x. \quad (9.5.2)$$

Средняя по сечению трубы скорость \bar{v} согласно (8.3.19) равна

$$\bar{v} = -\frac{r_0^2}{8\eta} \frac{dP}{dx} = \frac{r_0^2}{8\eta} \frac{\Delta P}{l},$$

Подставляя ΔP как функцию \bar{v} в формулу для F_x (9.5.2), получим:

$$c_x = \frac{8\eta}{\rho \bar{v} r_0} = \frac{16}{\frac{\rho \bar{v} d}{\eta}} = \frac{16}{\text{Re}}; \quad \text{Re} = \frac{\rho \bar{v} d}{\eta}. \quad (9.5.3)$$

Из последнего соотношения видно, что коэффициент сопротивления является, действительно, функцией только числа Рейнольдса. Тогда, используя формулу для силы сопротивления F_x (9.5.1), можно определить разность давлений ΔP на участке трубы длиной l в следующем виде:

$$\Delta P = \frac{\rho \bar{v}^2}{2} \frac{l}{d} 4C_x; \quad \Delta P = \frac{\rho \bar{v}^2}{2} \frac{l}{d} \lambda; \quad \lambda = 4C_x = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (9.5.4)$$

Принято называть *коэффициентом гидравлического сопротивления* трубы не c_x , а величину λ . Формула (9.5.4) является универсальной и позволяет вычислять сопротивление трубы ΔP на участке длиной l , если известен коэффициент сопротивления λ , при любом характере движения жидкости в

трубе. Коэффициенты сопротивления участков трубы, имеющих некоторые особенности (расширение, сужение, кран, задвижка, поворот и т.д.), измерены экспериментально и вычисляются как функции числа Рейнольдса в трубе по графикам или эмпирическим формулам.

Нетрудно вычислить коэффициент сопротивления шара при медленном его обтекании вязкой несжимаемой жидкостью. В соответствии с формулой Стокса сила сопротивления шара определяется как:

$$F_x = 6\pi\eta r_0 u = \frac{\rho u^2}{2} Sc_x. \quad (9.5.5)$$

Обычно в качестве характерной выбирают площадь максимального поперечного сечения шара плоскостью, перпендикулярной к набегающему потоку. Тогда из (9.5.5) следует:

$$c_x = \frac{24}{Re}. \quad (9.5.6)$$

Аналогично можно вычислить коэффициент сопротивления цилиндра единичной длины и т.д. Следует ещё раз подчеркнуть, что удобство введения некоторых безразмерных коэффициентов сопротивления заключается в том, что они являются функциями только безразмерных критериев подобия в любом режиме движения жидкости как в ламинарном, так и турбулентном. Они могут быть вычислены аналитически только для некоторых простейших ламинарных движений. Во всех других случаях для их определения необходимо обращаться к опыту и тогда их зависимость от безразмерных критериев подобия устанавливаются на основании опытных данных, представляемых в виде таблиц, графиков или эмпирических формул.

9.6. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТРУБЫ. БАССЕЙНЫ.

Опыты на моделях проводят для летательных аппаратов в аэродинамических трубах, а для судов, винтов и других подобных устройств в бассейнах. Современные аэродинамические трубы - это гигантские сооружения, потребляющие мощности в десятки тысяч квт. Увеличение размеров современных аэродинамических труб и соответственно их механической прочности диктуется следующими обстоятельствами.

Во-первых, если бы было возможно создание аэродинамических труб, позволяющих обдувать натурные объекты, то, конечно, точность научных прогнозов значительно увеличилась бы, и тогда моделирование во многих случаях могло быть полным.

Во-вторых, трудно создать очень маленькую модель, являющуюся в точности геометрически подобной натуре вплоть до шероховатостей поверхности модели, заклепок и других тонких, но немаловажных деталей.

В третьих, как мы видно из рассмотренного выше примера, даже для частичного приближенного подобия необходимо плотность, а следовательно,

и давление модельного потока газа увеличить в восемь раз. В этом случае трудно обеспечить механическую прочность трубы. Если бы можно было увеличить модель, то не потребовалось бы сильно увеличивать давление в аэродинамической трубе или вместо воздуха использовать другой дорогостоящий газ.

Эти три обстоятельства и заставляют идти по линии увеличения габаритов современных аэродинамических труб, которые в настоящее время наряду с крупными ускорителями являются уникальными сооружениями наиболее крупных, технически развитых стран.

В заключение отметим, что вышеуказанные соображения о динамическом подобии справедливы и для турбулентных потоков, чисто математического, достаточно точного анализа которых не существует в настоящее время. В этом случае их моделирование является единственным способом решения практических задач.

9.7. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим ещё один метод исследования движений вязкой жидкости, позволяющий в простейших случаях установить вид функциональной зависимости характеристик движения от параметров, определяющих движение, и способствующего, тем самым, рациональной постановке эксперимента. Этот метод называют *методом анализа размерностей физических величин*.

9.7.1. Основные и производные величины

Между всеми физическими величинами существует качественное (сила, скорость, длина и т.д.) и количественное различие (две различных длины, скорости и т.д.). Подразумевается, что каждая физическая величина может быть измерена. *Мерой* физической величины определяют некоторое число, которое характеризует её в количественном отношении в сравнении с аналогичной величиной, принятой за единицу измерения.

Все физические величины можно разбить на две категории - основные и производные. Величины, для которых единицы измерения вводятся при помощи эталонов или специальных опытов, называют *основными*. Величины, единицы измерения которых зависят от единиц измерения основных величин, называют *производными*.

Так, в механике за основные величины принимаются - масса, длина, время. Их единицы измерения в системе *СИ* - килограмм (*кг*), метр (*м*), секунда (*с*). Все остальные производные единицы могут быть выражены через них. Число основных единиц может быть и больше трёх. Так, в задачах гидродинамики, связанных с теплообменом, используются градус ($^{\circ}K$) и калория (*кал*). В магнитной гидродинамике можно ввести ещё некоторые основные единицы.

Для простоты рассмотрим лишь три основные величины: массу, длину и время. Обозначим их размерность как M , L , и T , соответственно.

Рассмотрим размерность некоторой производной физической величины P , которая может быть выражена через размерность основных величин. Очевидно, размерность любой произвольной физической величины P может быть записана всегда в виде степенного одночлена:

$$[P] = M^m L^l T^t . \quad (9.7.1)$$

Здесь m , l , t - показатели размерностей – это некоторые целые или дробные вещественные числа.

Если увеличить единицу измерения массы в α раз, длины - в β раз и времени - в γ раз, то единица измерения величины P будет больше первоначальной в $\alpha^m, \beta^l, \gamma^t$ раз. Физическую величину нулевой размерности называют *безразмерной величиной*. Безразмерная величина инвариантна по отношению к изменениям масштаба измерения основных величин.

9.7.2. Определяющие параметры

Пусть некоторая физическая величина A является функцией ряда определяющих параметров

$$A = f(a_1, a_2, \dots, a_n) . \quad (9.7.2)$$

Определяющие параметры a_1, a_2, \dots, a_n - это некоторые размерные физические величины, от которых может зависеть величина A , в том числе, и основные величины. Среди определяющих параметров a_1, a_2, \dots, a_n могут быть параметры с независимыми и зависимыми размерностями. Размерность определяющего параметра является *независимой* в данном наборе, если она не может быть представлена в виде степенного одночлена размерностей остальных определяющих параметров. Например, размерности L, LT^{-1} и ML^2T^{-2} - независимы, а размерности L, LT^{-1} и LT^{-2} - *зависимы*, так как $LT^{-2} = (LT^{-1})^2 / (LT^{-2})$. Очевидно, что число параметров с независимыми размерностями не может быть больше числа основных величин (в рассматриваемом случае оно не может быть больше трёх).

Равенство(9.7.2), выражающее некоторый физический закон, должно быть справедливо для любых масштабов измерения основных величин. Следовательно, размерность величины A должна быть равна размерности функции f .

$$[A] = [f]$$

Рассмотрим сначала простейший пример. Пусть определяющими параметрами являются основные величины, причем их число равно числу основных величин:

$$[a_1] = M, [a_2] = L, [a_3] = T$$

Размерность величины A известна:

$$[A] = M^m L^l T^t. \quad (9.7.3)$$

Тогда функциональная зависимость величины A должна иметь единственный вид:

$$A = a_1^m a_2^l a_3^t \cdot K, \quad (9.7.4)$$

так как только таким образом можно соблюсти размерность величины A . Здесь K - некоторый постоянный *безразмерный коэффициент*. Очевидно, что можно поступить аналогично и в том случае, когда в качестве определяющих параметров выступают три параметра, имеющие произвольные, но зависимые размерности. В этом случае уравнение размерностей имеет вид:

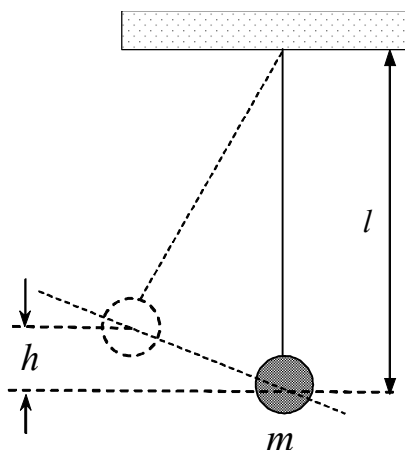
$$[A] = [a_1]^\alpha [a_2]^\beta [a_3]^\gamma \quad (9.7.5)$$

Снова, приравнявая показатели трёх основных величин правой и левой части уравнения (9.7.5), можно из трёх уравнений определить неизвестные показатели α, β, γ . Тогда функциональная зависимость величины A от определяющих параметров a_1, a_2 и a_3 будет иметь вид:

$$A = a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma \quad (9.7.6)$$

9.7.3. Период колебаний маятника

Определим функциональную зависимость периода колебаний τ математического маятника от определяющих параметров. Предполагается, что определяющими параметрами в данном случае являются l - длина маятника,



m - его масса и g - ускорение силы тяжести. Поэтому функциональную зависимость периода колебаний маятника от трёх определяющих параметров с их независимыми размерностями можно записать в виде:

$$\tau = f(a_1, a_2, a_3), \quad a_2 = l, \quad a_1 = m, \quad a_3 = g,$$

$$[m] = M, [l] = L, [g] = LT^{-2}$$

Следуя формуле (9.7.5) имеем

$$[\tau] = [m]^\alpha [l]^\beta [g]^\gamma M^0 L^0 T = M^\alpha L^\beta (LT^{-2})^\gamma$$

Рис. 9.1

Приравнявая показатели степени при одинаковых размерностях M, L , и T имеем соответственно:-

$$\alpha = 0, \quad \beta + \gamma = 0, \quad 1 = -2\gamma.$$

Из полученных уравнений следует:

$$\alpha = 0, \quad \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

Тогда функциональная искомая зависимость периода колебаний маятника от определяющих параметров согласно уравнению (9.7.6) имеет вид:

$$\tau = K \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (9.7.7)$$

Безразмерная постоянная K в (9.7.7), конечно, не может быть определена этим методом. Аналитическое решение задачи дает $K = 2\pi$.

9.7.4. Сила сопротивления шара

Если число определяющих параметров больше трёх, то можно выбрать из них три с независимыми размерностями. Тогда размерности остальных определяющих параметров могут быть выражены через независимые размерности выбранных трёх параметров в виде степенных одночленов. Ясно, что в этом случае система уравнений для показателей размерностей становится неопределённой, а, следовательно, исключена возможность установления однозначной искомой функции вида (9.7.6). Очевидно, что в случае трёх определяющих параметров с независимыми размерностями из них невозможно организовать ни одной безразмерной комбинации.

Если число определяющих параметров равно четырём, причем, из них только три имеют независимые размерности, то нетрудно видеть, что из имеющихся четырёх параметров можно составить лишь одну одночленную степенную комбинацию, не имеющую размерности. Если имеется пять определяющих параметров, то таких безразмерных комбинаций можно составить только две, если предыдущая безразмерная комбинация рассматривается как некоторый четвертый определяющий параметр и т.д. В этом случае функциональная зависимость физической величины (9.7.5) может быть записана в следующем виде:

$$A = a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma \dots a_n^\varepsilon f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-3}) \cdot K \quad (9.7.7)$$

Здесь произвольная функция f от независимых безразмерных комбинаций $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-3})$ остается неопределенной. Показатели степеней должны выбираться при помощи каких-то дополнительных соображений. Сказанное выше лучше всего иллюстрировать примером.

Найдём функциональную зависимость силы сопротивления обтекаемого вязкой несжимаемой жидкостью шара от определяющих параметров. Очевидно, определяющими параметрами будут: ρ -плотность жидкости, v -скорость набегающего потока, r_0 -радиус шара, ν -коэффициент

кинематическая вязкость. Запишем размерности определяемой величины и параметров

$$[F] = MLT^{-2}, [\rho] = ML^{-3}, [v] = LT^{-1}, [r_0] = L, [\eta] = L^2T^{-1}. \quad (9.7.8)$$

В данной задаче число определяющих параметров равно четырём. Из них первые три могут быть приняты за основные, т.к. они имеют независимые размерности. Найдем безразмерную комбинацию параметров. Очевидно, для этого достаточно составить следующее уравнение размерностей:

$$[A]^0 = (ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma (L^2T^{-1})^\varepsilon. \quad (9.7.9)$$

Приравнявая в этом уравнении степени одинаковых основных величин, получим уравнения для показателей степени:

$$0 = \alpha, \quad 0 = -3\alpha + \beta + \gamma + 2\varepsilon, \quad 0 = -\beta - \varepsilon.$$

Решение системы уравнений имеет вид:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \gamma = -\varepsilon.$$

Следовательно, показатели β , γ , ε могут быть любыми одинаковыми целыми или дробными вещественными числами. Безразмерная комбинация параметров имеет вид:

$$\delta = \left(\frac{vr_0}{\nu} \right)^\beta = (\text{Re})^\beta = f(\text{Re}).$$

В последней формуле показатель степени β остается неопределённым, поэтому можно заменить степенную формулу некоторой функцией от числа Рейнольдса.

Тогда общий вид формулы для силы сопротивления шара будет иметь вид:

$$F = \rho^\alpha \nu^\beta r_0^\gamma \nu^\varepsilon K \cdot f(\text{Re}). \quad (9.7.10)$$

Однако, поскольку, приравнявая показатели степеней правой и левой части уравнения размерности (9.7.2), получено лишь три уравнения для четырёх показателей, то задача определения показателей становится неопределённой. Можно их определить лишь в двух предельных случаях движения жидкости.

Рассмотрим сначала случай движения при малых числах Рейнольдса. Движение жидкости при малых числах Рейнольдса можно рассматривать как движение жидкости, обладающей очень большой вязкостью. В этом случае, очевидно, плотность жидкости не должна играть существенной роли и её можно исключить из числа определяющих параметров. Тогда определяющими параметрами будут ν , r_0 , η , имеющие независимые размерности:

$$[F] = MLT^{-2}, [v] = LT^{-1}, [r_0] = L, [\eta] = ML^{-1}T^{-1}.$$

Уравнение размерностей имеет вид:

$$MLT^{-2} = (LT^{-1})^\alpha L^\beta (ML^{-1}T^{-1})^\gamma \quad (9.7.11)$$

Естественно, что никаких безразмерных комбинаций из этих трёх параметров составить нельзя. Для нахождения показателей степеней имеем уравнения:

$$1 = \gamma \quad 1 = \alpha + \beta - \gamma \quad -2 = -\alpha - \gamma .$$

Из этой системы уравнений находим: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$.

Следовательно, функциональная зависимость (9.7.3) имеет вид:

$$F = r_0 \eta v \cdot K . \quad (9.7.12)$$

Таким образом, получена формула Стокса для силы сопротивления шара с неопределенным безразмерным численным коэффициентом K . Аналитическое решение, как показано ранее, дает $K = 6\pi$.

Рассмотрим другой предельный случай обтекания шара - обтекание его при очень больших числах Рейнольдса ($Re \rightarrow \infty$). Движение жидкости при очень больших числах Рейнольдса можно рассматривать как движение маловязкой жидкости. Тогда из определяющих параметров можно исключить коэффициент вязкости η . Размерности остальных определяющих параметров ρ , v , r_0 независимы и из них нельзя образовать некоторую безразмерную комбинацию. Уравнение размерностей имеет вид

$$MLT^{-2} = (ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma . \quad (9.7.13)$$

Для показателей степени имеем уравнения:

$$1 = \alpha , \quad 1 = -3\alpha + \beta - \gamma , \quad -2 = -\beta .$$

Решение полученной системы уравнений даёт: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$. Тогда сила сопротивления зависит от определяющих параметров следующим образом:

$$F = \rho v r_0^2 K . \quad (9.7.14)$$

Таким образом, сила сопротивления шара при больших числах Рейнольдса (в том числе, и при турбулентном движении) должна быть пропорциональна квадрату скорости, а не первой степени, как в предыдущем случае ($Re \rightarrow \infty$). Единственный неизвестный безразмерный коэффициент K может быть определен из одного единственного опыта.

При промежуточных числах Рейнольдса метод размерностей не может однозначно определить функциональную зависимость силы сопротивления от всех определяющих параметров. Однако, и в этом случае метод размерностей может быть весьма полезен. Действительно при любых числах Рейнольдса уравнение размерностей имеет вид:

$$MLT^{-2} = (ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma (L^2 T^{-1})^\epsilon \quad (9.7.15)$$

Система уравнений для нахождения показателей степеней содержит три уравнения для нахождения четырех неизвестных:

$$1 = \alpha, \quad 1 = -3\alpha + \beta + \gamma - 2\varepsilon, \quad -2 = -\beta - \varepsilon.$$

Решение системы неоднозначно. Если положить $\beta = 1$, то имеем:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \varepsilon = 1.$$

Тогда функциональная зависимость силы сопротивления от определяющих параметров имеет вид:

$$F = \rho v r_0 v f(\text{Re}) K_1. \quad (9.7.16)$$

Если положить $\beta = 2$, то $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0$, $\gamma = 2$ и аналогичное выражение нужно записать в следующем виде:

$$F = \rho v^2 r_0^2 v f(\text{Re}) K_2. \quad (9.7.17)$$

К сожалению, теория размерностей не может указать, какая из этих формул является правильной. Но во всяком случае имеем дело в данном случае лишь с двумя функциональными зависимостями, и дело экспериментатора определить неизвестные коэффициенты, функциональную зависимость от безразмерных комбинаций определяющих параметров, а также пределы применимости той или иной формулы.

Это обстоятельство значительно сокращает объём необходимой экспериментальной работы и является направляющей идеей для рационального планирования эксперимента.

9.7.5. Выбор определяющих параметров и основных величин

Если известна математическая постановка задачи, то выбор определяющих параметров следует из уравнений движения и граничных условий. В этом случае определяющие параметры - это все данные, которые необходимо задавать для вычисления искомых физических величин. Если же уравнения, описывающие данное явление, неизвестны, то остается, полагаясь на физическую интуицию и предварительные экспериментальные данные, испытать несколько гипотез о предполагаемой системе определяющих параметров.

Здесь были рассмотрены лишь три основных физических величины: масса, длина и время. Поэтому для нахождения показателей степеней имелось всегда только три уравнения и, если число определяющих параметров было больше трёх, это ставило исследователя всегда в затруднительное, хотя и не всегда безвыходное положение. Введение некоторых дополнительных основных единиц измерения могло бы помочь в некоторых случаях решать задачу однозначно, хотя вряд ли это будет полезно в методологическом отношении.

В заключение отметим, что полезность теории размерности заключается: во-первых, в определении точного вида функциональной зависимости (если число независимых определяющих параметров меньше или равно числу основных величин) и, во-вторых, в определении функциональных

альтернативных зависимостей (если число определяющих параметров больше, чем число основных величин). Тем самым, она помогает, не решая уравнений движения, правильно установить вид функциональных зависимостей и целенаправленно поставить эксперимент, значительно сокращая объём экспериментальной работы.