

## 10. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

В теме 8 рассмотрено несколько точных решений уравнений движения вязкой жидкости. Эти уравнения удавалось получить в том случае, когда из уравнений по тем или иным причинам исключалось нелинейное конвективное слагаемое  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=0$ . По-видимому, существуют точные решения гидродинамических уравнений и с нелинейным конвективным слагаемым (например, задача Стокса).

Однако даже самые точные решения могут не описывать реальных движений среды. Для того чтобы точные решения полностью описывали реальные движения, необходимо, чтобы эти решения были устойчивыми по отношению к бесконечно малым возмущениям. Если бесконечно малое возмущение, возникшее случайно, будет в дальнейшем расти с течением времени, то такое движение будет абсолютно *неустойчивым*.

Таким образом, изучение движений реальных жидкостей включает в себя не только проблему нахождения точных решений уравнений движения, но и проблему исследования устойчивости этих решений к бесконечно малым возмущениям, а также проблему изучения движений жидкости после потери устойчивости.

До сих пор изучалась лишь первая часть проблемы, т.е. получение точных решений гидродинамических уравнений. Рассмотрим её вторую часть - проблему устойчивости полученных точных решений к бесконечно малым возмущениям.

### 10.1. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим лишь принципиальную постановку проблемы устойчивости стационарного движения несжимаемой жидкости. Пусть некоторое движение среды описывается стационарным уравнением Навье-Стокса в отсутствие внешних сил. Пусть  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(x, y, z)$  и  $P_0 = P_0(x, y, z)$  есть точное решение этого стационарного уравнения. Тогда при подстановке решения в уравнение Навье-Стокса оно удовлетворяется тождественно, т.е.

$$(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho}\nabla P_0 + \nu\Delta\mathbf{v}_0, \quad \text{div}\mathbf{v}_0 = 0. \quad (10.1.1)$$

Пусть на полученное точное решение наложено бесконечно малое возмущение

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \quad P = P_0 + P', \quad |\mathbf{v}'| \ll |\mathbf{v}_0|, \quad P' \ll P_0. \quad (10.1.2)$$

Это означает, что в любой момент времени имеют место случайные пульсации скорости движения и давления около их стационарных значений. Тогда, очевидно, возмущенное движение должно быть и нестационарным и должно удовлетворять нестационарному уравнению Навье-Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Подставляя (10.2) в это нестационарное уравнение движения, получим:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}') = -\frac{1}{\rho} \nabla (P_0 + P') + \nu \Delta (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}').$$

Пренебрегая членами второго порядка малости в конвективном слагаемом и учитывая, что  $\mathbf{v}_0$  и  $P_0$  должны удовлетворять стационарному уравнению Навье-Стокса (10.1.1), получим:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho} \nabla P' + \nu \Delta \mathbf{v}', \quad \text{div } \mathbf{v}' = 0. \quad (10.1.3)$$

Очевидно, добавки  $\mathbf{v}'$  к скорости, как и  $P'$  к давлению должны равняться нулю на ограничивающих движение неподвижных поверхностях из-за прилипания жидкости к стенке и отсутствия пульсации давления на ней. Таким образом, для нахождения  $\mathbf{v}'$  имеется линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с параметрами, зависящими только от координат и времени.

Общее решение такого уравнения имеет вид:

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t}. \quad (10.1.4)$$

Здесь частоты  $\omega_k$  в общем случае являются комплексными  $\omega_k = \alpha_k + i\beta_k$  и не произвольны, а определяются решением уравнения Навье-Стокса, условием несжимаемости и граничными условиями.

Очевидно, что, если среди спектра частот  $\omega_k$  окажется хотя бы одна частота, комплексная часть которой положительна ( $\beta_k > 0$ ), то возмущение  $\mathbf{v}'$  будет с течением времени неограниченно расти, и первоначальное стационарное движение будет абсолютно неустойчиво. Для того чтобы стационарное движение было устойчивым к бесконечно малым возмущениям, а, следовательно, и могло существовать в природе, необходимо, чтобы мнимая часть всех частот  $\omega_k$  была бы отрицательной. Тогда бесконечно малые случайные возмущения, возникающие в движущейся жидкости, с течением времени будут затухать.

При исследовании устойчивости плоского движения Пуазейля решение (10.4) ведёт себя следующим образом. При заданной геометрии с увеличением

скорости движения, наконец, достигается такая скорость или число Рейнольдса, при котором в спектре частот  $\omega_k$  появляется одна частота с  $\beta_k = 0$ . Это число Рейнольдса определяет границу устойчивости движения и может быть названо *критическим числом Рейнольдса* -  $Re_{кр}$ . При дальнейшем увеличении скорости (числа Рейнольдса) появляется всё больше и больше частот, мнимая часть которых положительна ( $\beta_k > 0$ ), что указывает на всё увеличивающуюся неустойчивость движения.

Такое описание проблемы устойчивости представляет собой общую схему исследования на устойчивость стационарных движений вязкой несжимаемой среды. Однако в настоящее время по такой схеме исследована устойчивость лишь единственного стационарного движения, для которого результаты исследования удовлетворительно совпадают с опытными данными - это устойчивость стационарного движения вязкой несжимаемой среды между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами. Даже для плоской задачи Пуазейля теоретическое значение  $Re_{кр}$  значительно отличается от экспериментального.

Неудача объясняется, по-видимому, тем обстоятельством, что в опытах имеют дело всегда с каналами конечной длины, тогда как теория рассматривает бесконечно длинные каналы. Влияние концов канала на устойчивость движения среды в нём, по-видимому, является существенным.

## **10.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ**

Рассмотрим качественно проблему устойчивости движения вязкой несжимаемой среды между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  (Релей, 1916 г.)

Идея исследования заключается в следующем. Если какую-либо индивидуальную частицу среды мысленно сдвинуть с её стационарной траектории в некоторое соседнее положение и если при этом возникают силы, стремящиеся вернуть её в исходное положение, то такое движение считается *устойчивым*. В противоположном случае, когда частица стремится уйти с установившейся траектории ещё дальше, движение считается *неустойчивым*.

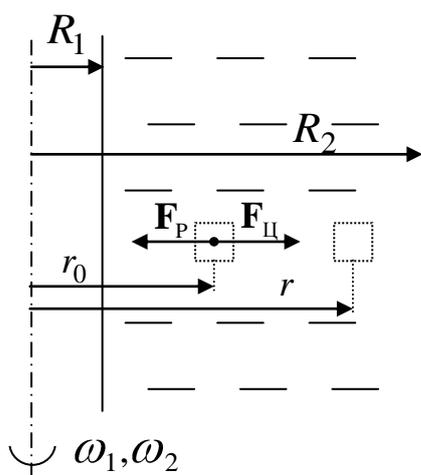


Рис. 10.1

Как было показано в п.8.3.5, распределение скоростей частиц среды между вращающимися цилиндрами не зависит от её вязкости. Поэтому можно рассматривать такое движение как движение идеальной среды. Пусть для определенности  $R_2 > R_1$ . Рассмотрим силы, действующие на некоторую индивидуальную частицу, вращающуюся по окружности с радиусом  $r_0$ . В стационарном состоянии на частицу действует центробежная сила  $F_ц$ , стремящаяся сдвинуть частицу вдоль радиуса дальше от оси вращения, и равная ей, но противоположно направленная сила  $F_п$ , обусловленная градиентом давления в зазоре между цилиндрами. В стационарном движении обе силы равны и противоположны, и, следовательно, частица вращается по некоторой стационарной траектории - окружности с радиусом  $r_0$ . Центробежная сила  $F_ц$ , действующая на частицу, и равная ей, но противоположно направленная сила градиента давлений  $F_п$  могут быть выражены через момент количества движения частицы в виде

$$M_0 = m v_0 r_0 = m \omega_0 r_0^2, \quad F_ц = \frac{m v_0^2}{r_0} = m \omega_0^2 r_0,$$

$$F_п(r_0) = F_ц(r_0) = m \omega_0^2 r_0 \cdot \frac{m r_0^3}{m r_0^3} = \frac{M_0^2}{m r_0^3}.$$

Теперь мысленно можно сдвинуть частицу вдоль радиуса в некоторое новое положение на расстоянии  $r$  от оси движения (рис. 10.1). Так как рассматривается движение идеальной жидкости, то при таком перемещении частицы должен сохраняться её момент количества движения. Следовательно, частица, придя в новое положение, будет обладать центробежной силой, равной

$$F'_ц(r) = \frac{M_0^2}{m r^3}.$$

Однако, в стационарном состоянии на расстоянии  $r$  от оси вращения действует определяемая градиентом давления сила, возвращающая её к оси вращения, и равная ей центробежная сила, т.е.

$$F_u(r) = F_p(r) = \frac{M^2}{mr^3}.$$

Тогда можно предположить, что движение будет устойчивым, если

$$F_p(r) > F'_p(r), \quad F_u(r) > F'_u(r),$$

$$\frac{M^2}{mr^3} > \frac{M_0^2}{mr_0^3}, \quad M^2 - M_0^2 > 0.$$

Полагая смещение частицы малым, момент количества движения можно разложить в ряд и, ограничиваясь членами первого порядка малости по  $\Delta r = r - r_0$ , получим  $M \approx M_0 + \left( \frac{\partial M}{\partial r} \right)_{r=r_0} \cdot \Delta r$ . После подстановки данного момента в четвертое неравенство *условие устойчивости* принимает общий вид:

$$(M + M_0) \left( \frac{\partial M}{\partial r} \right)_{r=r_0} \cdot \Delta r > 0, \quad \Delta r > 0, \quad M \left( \frac{\partial M}{\partial r} \right)_{r=r_0} > 0. \quad (10.2.1)$$

Точное решение стационарной задачи (п.8.3.5.) даёт для скорости частиц среды в зазоре следующую формулу:

$$v_\varphi = ar + \frac{b}{r}, \quad M = mv_\varphi r = m(ar^2 + b), \quad \left( \frac{\partial M}{\partial r} \right)_{r=r_0} = 2amr_0, \quad .$$

Подставляя значения  $M$  и  $\partial M / \partial r$  в условие устойчивости (10.2.1), получим:

$$m(ar^2 + b)2amr > 0, \quad 2m^2 ar^3 \left( a + \frac{b}{r^2} \right) > 0. \quad (10.2.2)$$

Но скорость углового вращения равна  $\omega = v_\varphi / r = a + b/r^2$ , поэтому условие устойчивости принимает вид:

$$2m^2 ar^3 \omega > 0, \quad a\omega > 0.$$

Подставляя постоянную  $a$  из точного решения (см. п.8.3.5.), имеем:

$$\frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \omega > 0. \quad (10.2.3)$$

Условие (10.2.3) представляет собой условие устойчивого движения среды между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами. Очевидно, для рассматриваемого случая, когда  $R_2 > R_1$ , движение будет устойчивым, если в любой точке зазора выполняется неравенство

$$(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2) \omega > 0. \quad (10.2.4)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. *Цилиндры вращаются в разные стороны*, т. е.  $\omega_1$  и  $\omega_2$  имеют разные знаки. Внутри зазора скорость вращения среды  $\omega$  изменяет знак, следовательно, неравенство (10.2.4) не может быть выполнено в любой точке зазора. Поэтому движение в этом случае *неустойчиво* при любых значениях  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

2. *Цилиндры вращаются в одну и ту же сторону*. Если это направление вращения цилиндров считать положительным, то  $\omega_1 > 0$ ,  $\omega_2 > 0$  и, следовательно,  $\omega > 0$  в любой точке зазора. Поэтому *условие устойчивости* в этом случае имеет вид:

$$\omega_2 R_2^2 > \omega_1 R_1^2, \quad \omega_1 < \omega_2 \frac{R_2^2}{R_1^2}. \quad (10.2.5)$$

3. *Вращается только внешний цилиндр*, т.е.  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 \neq 0$ , тогда  $\omega_2 > 0$ ,  $\omega > 0$  и, следовательно, движение *устойчиво* при любых скоростях вращения внешнего цилиндра.

4. *Вращается только внутренний цилиндр*, т.е.  $\omega_2 = 0$ . Из (10.2.3) следует, что  $\omega_1 R_1^2 \omega < 0$ . При  $\omega_1 > 0$   $\omega < 0$ , и, следовательно, движение *неустойчиво* при любых скоростях вращения внутреннего цилиндра.

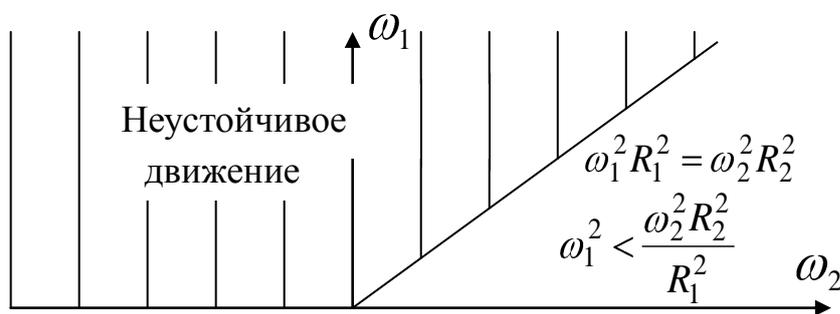


Рис. 10.2

Все сказанное выше можно изобразить графически (рис.10.2). Видно, что график удовлетворяет всем рассмотренным выше случаям. Однако, категоричные утверждения в некоторых

случаях с физической точки зрения кажутся сомнительными. Например, утверждение, что движение будет всегда *неустойчивым*, если вращается только внутренний цилиндр, вряд ли справедливо при очень медленных вращениях внутреннего цилиндра.

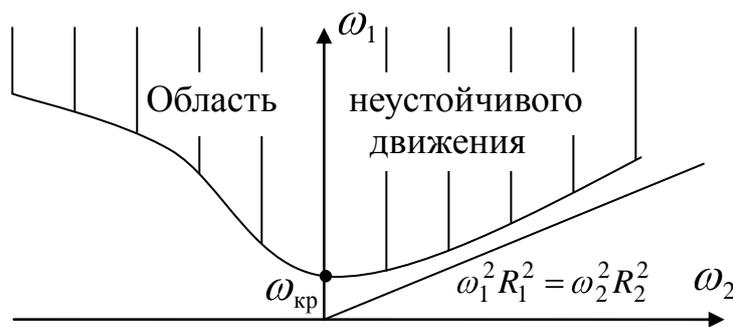


Рис.10.3

Точное решение с учётом вязкости среды, полученное Тэйлором с использованием общего метода исследования проблемы, который описан в начале раздела, приводит к результатам, изображенным на рис. 10.3. Исследование

удалось провести до конца только в случае малых зазоров при выполнении следующего условия:

$$h = R_2 - R_1 \ll \bar{R} = \frac{R_2 + R_1}{2}.$$

На рис. 10.3 видно, что действительно, если вращается только внутренний цилиндр ( $\omega_1 = 0$ ), то существует некоторая критическая скорость его вращения  $\omega_{1кр}$ . Если скорость вращения внутреннего цилиндра меньше  $\omega_{1кр}$ , то движение жидкости в зазоре остается устойчивым, как и подсказывает физическая интуиция. Точное решение для  $\omega_{1кр}$  даёт следующее выражение:

$$\omega_{1кр} = \frac{41,3\nu}{h\sqrt{hR}}.$$

Как видно из предыдущего рассмотрения, оригинальный и простой метод Релея даёт правильную оценку устойчивости некоторых случаев движения в зазоре. Действительно, он правильно определяет асимптоту точного решения  $\omega_1 R_1^2 = \omega_2 R_2^2$  и верно предсказывает устойчивость движения в том случае, если вращается только внешний цилиндр. Можно, по-видимому, сказать, что он даёт необходимые условия устойчивости, но недостаточные.

Теория Тейлора обнаруживает поразительное совпадение с опытом и является классическим примером исследования устойчивости движения вязкой несжимаемой жидкости. Как уже указывалось, аналогичное исследование устойчивости движения жидкости в каналах не привело к удовлетворительным результатам, хотя этой проблемой занимались такие теоретики с мировыми именами как Зоммерфельд, Гейзенберг, Хопф.

После потери устойчивости в зазоре образуются локальные ячеистые вихревые движения, которые затем, по мере углубления в область неустойчивого движения, переходят в беспорядочное *турбулентное* движение.

### 10.3. ОСОБЕННОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ

Перейдём к изучению движения среды после потери устойчивости движения. Рассмотрим движение среды в круглой цилиндрической трубе. Рейнольдс впервые (1883г.) обратил внимание на то, что в трубе могут существовать две резко отличающиеся формы движения жидкости. Опыты Рейнольдса заключались в следующем. В трубку с движущейся жидкостью вводилась тонкая трубочка, из которой в жидкость поступало некоторое красящее вещество (рис.10.4). При малых скоростях движения жидкости в трубке краска распространялась вдоль трубы в виде тонкой прямолинейной

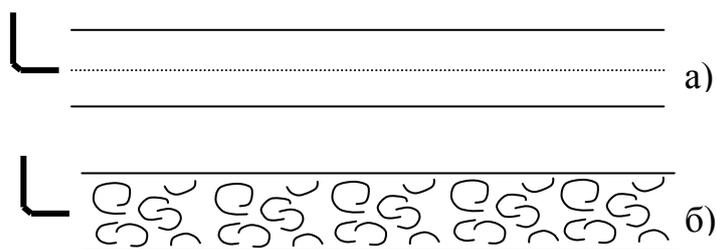


Рис.10.4.

нити с красящим веществом, простирающейся от носика трубки до её конца (рис.10.4а.). При постепенном увеличении скорости движения в трубке, наконец, достигается такая скорость, при которой струйка

красящего вещества начинает произвольно изгибаться, и затем размываться, окрашивая равномерно всю жидкость, движущуюся в трубке. Очевидно, до этого момента все частицы жидкости в трубе двигались параллельно оси трубы, и движение имело слоистый характер. Такое движение Рейнольдс назвал *ламинарным*, т.е. слоистым. Все точные решения уравнения Навье-Стокса получены именно для такого ламинарного движения. После потери устойчивости частицы жидкости, очевидно, приобретают некоторые поперечные составляющие скорости движения, в результате чего и происходит равномерное окрашивание поля течения. Такое движение Томсон назвал *турбулентным*, т.е. вихревым.

Характерные особенности турбулентного движения в трубе:

1. Наличие поперечных составляющих скорости движения частиц жидкости.

2. Если ламинарное движение может быть как установившимся, так и неустановившимся (нестационарным), то турбулентное движение всегда неустановившееся, т.к. мгновенные скорости частиц жидкости в данной точке пространства, занятого жидкостью, всё время изменяются как по направлению, так и по величине.

3. Турбулентное движение можно считать *квазипериодическим*, поскольку через некоторый неопределенный промежуток времени в данной точке пространства скорость снова может принять прежнее мгновенное значение.

Иногда говорят, что турбулентное движение среды в отличие от ламинарного является *вихревым*. Турбулентное движение среды действительно всегда является вихревым. Но и большинство ламинарных течений также являются вихревыми, т.е. движениями, для которых ротор скорости в каждой точке пространства, занятого движущейся средой, не равен нулю (см п 7.4)/

Рейнольдс, проводя опыты с различными жидкостями в трубах различных диаметров, установил, что переход от ламинарного движения к турбулентному наступает тогда, когда безразмерная комбинация величин  $\rho \bar{v} d / \eta$  достигает некоторой определенной величины. Эту безразмерную комбинацию называют

числом Рейнольдса. Следовательно, потеря устойчивости установившегося ламинарного движения жидкости в трубе, а, следовательно, переход ламинарного движения в турбулентное происходит всегда при одном и том же числе Рейнольдса, которое называют *критическим* числом Рейнольдса -  $Re_{кр}$ .

Поэтому число Рейнольдса играет важнейшую роль не только в динамическом подобии потоков вязкой несжимаемой жидкости, но и является критерием устойчивости их движения. Если не принимать специальных мер к сглаживанию условий входа жидкости в трубу, а также к специальному устранению шероховатостей стенок трубы, то  $Re_{кр} = 2300$  для цилиндрической трубы. Поэтому, в случае, если  $Re < Re_{кр}$ , случайные возмущения, возникающие в потоке, будут затухать вниз по потоку, и движение жидкости сохраняет свой ламинарный характер. Если же  $Re > Re_{кр}$ , то возмущения, не передаваясь вверх по потоку, разрастаются вниз по течению жидкости. Вообще сглаживанием условий входа в трубу и устранением шероховатостей стенок трубы можно существенно затянуть переход ламинарного течения в турбулентный. В таких случаях можно наблюдать ламинарное движение при  $Re \approx 50000$  и более. Этот факт подтверждает то обстоятельство, что, по-видимому, истинной неустойчивости движения среды не существует, а наблюдаемая неустойчивость определяется размерами возмущений. Опыт показывает, что  $Re_{кр} \approx 2300$  не является универсальным и оно характерно только для круглой цилиндрической трубы. Так, в расширяющейся трубе  $Re_{кр} < 2300$ , в сужающейся трубе  $Re_{кр} > 2300$ . При обтекании цилиндра  $Re_{кр} \approx 34$ . То есть, для каждой геометрии течения имеется свое критическое число Рейнольдса.

#### 10.4. УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА

Свойства турбулентного движения очень сложны и известны главным образом из экспериментов. Опыты же показывают, что при установившемся турбулентном движении скорость в данной точке пространства всё время изменяется как по величине, так и по направлению. Так же изменяется и давление. Если измерить изменение мгновенной продольной компоненты скорости в данной точке трубы с течением времени высокочувствительным прибором, то можно получить график типа представленного на рис.10.5.

Из рисунка видно, что при установившемся турбулентном движении компонента скорости  $U_x$  вдоль оси  $x$  трубы пульсирует около некоторого среднего значения  $\bar{U}_x$ , определяющего расход среды в трубе. Если бы использовать более чувствительный и менее инерционный прибор, то обнаружили бы, что каждый более или менее прямолинейный участок кривой

рис.10.5 на самом деле представляет собой некоторую ломаную зигзагообразную линию. Очевидно, поперечная составляющая скорости  $\bar{v}_y$  пульсирует около среднего значения, равного нулю.

Среднее значение некоторой компоненты скорости и давления могут быть получены следующим образом:

$$\bar{v}_i = \frac{1}{T} \int_0^T v_i dt, \quad \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt.$$

Здесь  $T$  - промежуток времени, достаточно большой по сравнению с характерным временем основных пульсаций скорости, но в то же время достаточно малый по сравнению со временем релаксации нестационарного

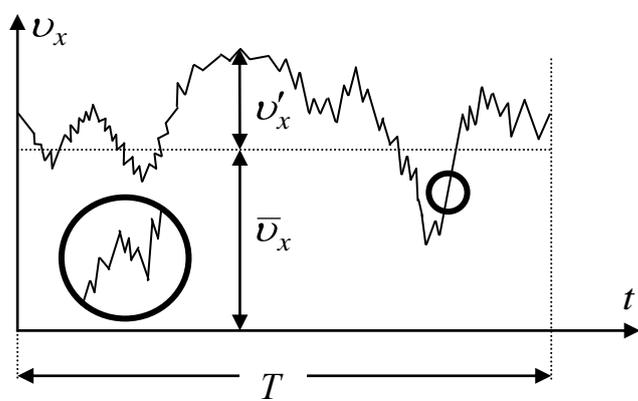


Рис.10.5.

движения (осреднённое движение может быть и нестационарным). Начало отсчёта промежутка времени  $T$  произвольно и может быть принято за нуль. Тогда мгновенное значение скорости или давления в любой момент времени можно представить следующим образом:

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i, \quad P = \bar{P} + P',$$

Здесь  $v'_i$  и  $P'$  - пульсационная составляющая скорости и давления. Будем полагать, что турбулентное движение может быть описано точными решениями уравнения Навье-Стокса для осреднённых величин.

Проведём осреднение каждого слагаемого уравнения движения по следующим *правилам осреднения*. Пусть  $f = f(x, y, z)$  есть некоторая характеристика движения, мгновенное значение которой в данной точке пространства можно в любой момент времени представить в виде

$$f = \bar{f} + f', \quad \bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f dt, \quad .$$

Предполагается, что  $T$  выбрано так, что проведённое осреднение даёт величину, при повторном осреднении неизменяющуюся. По определению  $\bar{f}' = 0$ .

1. Среднее значение *суммы величин* равно сумме средних:

$$\overline{f_1 + f_2} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2.$$

2. Среднее значение *произведения двух величин*, из которых лишь одна испытывает пульсации, определяется произведением средних:

$$\overline{f_1 \cdot f_2} = \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2, \quad \overline{f_1 \cdot f_2'} = \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2' = 0., \quad .$$

3. Среднее значение *произведения двух пульсирующих величин* не равно произведению средних:

$$\overline{f_1 \cdot f_2} = \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 + \overline{f_1' \cdot f_2'}, \quad \overline{f_1' \cdot f_2'} \neq 0.$$

4. Среднее значение *производной от пульсирующей характеристики* определяется производной от её среднего значения:

$$\frac{\overline{\partial f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}, \quad \frac{\overline{\partial f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}, \quad .$$

Следует заметить, что невозможно осреднить все характеристики движения одинаковым образом, не нарушая вида основных физических законов сохранения. Например, если в уравнении состояния идеального газа одинаковым образом осреднить  $P$ ,  $\rho$  и  $T$ , то в соответствии с вышеприведенными правилами получим:

$$\bar{P} = \overline{\rho T R} = \overline{\rho T} R + \overline{\rho' T'} \cdot \frac{R}{M}.$$

Но тогда закон Менделеева-Клапейрона не будет справедлив для средних величин, что, по-видимому, физически некорректно. Поэтому в различных теориях турбулентности применяют различные правила для осреднения различных величин, характеризующих движение среды.

По вышеприведенным правилам проведем осреднение уравнений Навье-Стокса для несжимаемой среды:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}, \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0.$$

Осреднение каждого слагаемого в этих уравнениях даёт:

$$\frac{\overline{\partial v_i}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t}, \quad \frac{\overline{\partial v_k}}{\partial x_k} = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k}, \quad \frac{\overline{1 \frac{\partial P}{\partial x_i}}}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}, \quad \overline{\nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}} = \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2}.$$

$$\overline{v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v_i v_k} - \overline{v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v_i v_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{v}_i \bar{v}_k + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v_i' v_k'} = \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v_i' v_k'}.$$

Осреднённые уравнения Навье-Стокса имеют вид:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2} - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v_i' v_k'}, \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0. \quad (10.4.2)$$

Первые два слагаемых в правой части (10.4.2) можно записать в виде:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k}, \quad \bar{\sigma}_{ik} = -\bar{P} \delta_{ik} + \tilde{\sigma}_{ik} = -\bar{P} \delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right), \quad (10.4.3)$$

Теперь *осредненное уравнение Навье-Стокса* (10.4.1) с учетом (10.4.3) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\rho v'_i v'_k} - \rho \overline{v'_i v'_k} \right), \quad \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} = 0. \quad (10.4.4)$$

Из последнего уравнения видно, что уравнения движения для осредненных величин имеют тот же самый вид, что и для мгновенных, но при этом возникает слагаемое  $\overline{\rho v'_i v'_k}$ , учитывающее дополнительные напряжения. Это слагаемое называют *тензором турбулентных напряжений*, который является симметричным тензором, и его обозначают:

$$T_{ik} = -\overline{\rho v'_i v'_k}. \quad (10.4.5)$$

При турбулентном движении общий тензор напряжений можно записать в виде:

$$\overline{\Sigma_{ik}} = -\bar{P} \delta_{ik} + \tilde{\sigma}_{ik} + T_{ik}. \quad (10.4.6)$$

Уравнения (10.4.2) называют *уравнениями Рейнольдса для осредненного (турбулентного) движения* вязкой несжимаемой среды.

Происхождение дополнительных напряжений при турбулентном движении физически очевидно. Вязкие напряжения возникают вследствие направленного переноса импульса молекулами из слоя среды, движущегося с большей макроскопической скоростью, к соседнему, движущемуся с меньшей скоростью. При турбулентном движении же перенос импульса от одного слоя к другому, соседнему происходит не молекулами, а малыми макроскопическими частицами среды, движущимися с макроскопическими пульсационными скоростями. Поэтому по аналогии с обычной вязкой средой турбулентно движущуюся рассматривают как среду, обладающую некоторой дополнительной *турбулентной вязкостью*, и записывают по аналогии с тензором  $\tilde{\sigma}_{ik}$  вязких напряжений *тензор  $T_{ik}$  турбулентных напряжений* в осреднённом виде:

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{kk}}{\partial x_i} \right), \quad T_{ik} = \eta_T \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right), \quad (10.4.7)$$

В этом случае центр тяжести исследования турбулентного движения переносится на изучение турбулентной вязкости  $\eta_T$ , и уравнения Рейнольдса принимает форму:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} (\eta + \eta_T) \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2}, \quad \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} = 0. \quad (10.4.8)$$

Однако упрощение проблемы, очевидно, только кажущееся, т.к. коэффициент турбулентной вязкости  $\eta_T$  в отличие от коэффициента динамической вязкости  $\eta$  не является достаточно консервативным параметром, характеризующим только саму среду, а зависит от свойств движения, в частности, от числа Рейнольдса. Причем, при турбулентном движении коэффициент турбулентной вязкости значительно больше коэффициента динамической вязкости  $\eta_T \gg \eta$ .

Таким образом, для определения осредненных характеристик турбулентного движения несжимаемой жидкости имеется четыре уравнения (10.4.6). Однако к числу неизвестных добавилось еще шесть неизвестных компонент симметричного тензора турбулентных напряжений. Для замыкания системы уравнений имеется два пути. Необходимо или каким-то образом выразить компоненты тензора турбулентных напряжений через осредненные скорости и их производные (как предлагают в теории Прандтль и Карман) или дополнить систему уравнений какими-либо уравнениями, устанавливающими связь между средними и пульсационными скоростями или их моментами (Фридман). К сожалению, ни тот, ни другой путь сегодня не привел к созданию удовлетворительной количественной теории турбулентного движения.

### 10.5. ТЕОРИЯ ПРАНДТЛЯ

Теория турбулентного движения Прандтля основывается на аналогии с молекулярным движением в газе. Рассмотрим плоское турбулентное движение несжимаемой жидкости вдоль бесконечной стенки (рис.10.6). Выберем два слоя, параллельных оси  $x$ . Среднюю скорость движения частиц жидкости в них обозначим через  $u$  и  $u+du$ . Будем считать, что скорость  $u$  определяется средней пульсационной скоростью  $\bar{v}_x$ , которая является функцией  $y$ , а средняя пульсационная составляющая скорости в  $y$ -направлении равна нулю, т.е.

$$u = \bar{v}_x = f(y), \quad \bar{v}_y = 0.$$

Пусть расстояние между слоями равно  $l'$ . Прандтль по аналогии с кинетической теорией газов предполагает, что  $l'$  - это некоторый аналог средней длины свободного пробега молекул в газе. На этом расстоянии частицы жидкости могут переходить из слоя в слой лишь благодаря своим пульсационным скоростям  $v'_y$ . Причем, импульсы таких частиц сохраняются при прохождении длины  $l'$ . Частица жидкости, попадающая из нижнего слоя в верхний, имеет среднюю скорость  $\bar{v}_x = u$ , отличающуюся от средней скорости верхнего слоя на  $du$ . Очевидно, "сталкиваясь" в верхнем слое с его частицами,

скорость последних так же может изменяться на величину порядка  $du$ . Это изменение создает пульсацию  $v'_x$  порядка  $du$ . Таким образом, имеем:

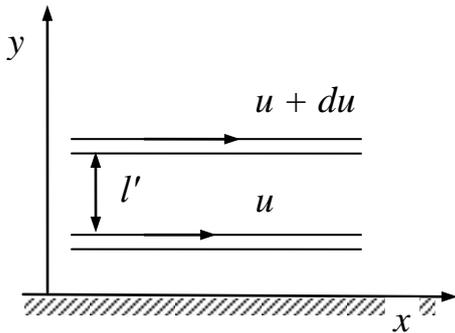


Рис. 10.6

$$v'_x \cong du = l' \frac{du}{dy}, \quad l' \approx dy. \quad (10.5.1 \ 13)$$

Предполагая турбулентность изотропной (по крайней мере, вдали от стенки), получим:

$$|\overline{v'_x}| \approx |\overline{v'_y}|, \quad \overline{v}_y \approx l' \frac{du}{dy}.$$

Тогда тензор турбулентных напряжений можно определить:

$$|T_{xy}| = \rho \cdot \overline{v'_x v'_y} = \rho \cdot k \cdot \overline{v'^2} \left( \frac{du}{dy} \right)^2 = \rho \cdot l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2, \quad k \cdot \overline{v'^2} = l. \quad (10.5.2)$$

Величину  $l$  называют *длиной пути перемешивания*, которая может зависеть от  $y$ . Далее Прандтль предполагает, что длина пути перемешивания прямо пропорциональна расстоянию от стенки:

$$l = \kappa \cdot y. \quad (10.5.3 \ 14)$$

Здесь  $\kappa$  - некоторый безразмерный коэффициент пропорциональности. Предположение (10.5.3 14) можно подкрепить рассуждением о том, что стенка препятствует развитию поперечных пульсационных скоростей и, очевидно, на самой стенке длина пути перемешивания или пропорциональная ей "длина свободного пробега" должна быть равна нулю. Как и при ламинарном режиме течения, также предполагается, что тензор турбулентных напряжений не изменяется вдоль направления, перпендикулярного стенке и равен его значению  $\tau_0$  на стенке, т.е.

$$T_{xy} = \tau_0 = const.$$

Для определения средней скорости  $u$ , используя (10.5.2,3), получаем уравнение:

$$\tau_0 = \rho \cdot \kappa^2 \cdot y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2, \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot \frac{1}{y}.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$u = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot \ln y + c. \quad (10.5.4 \ 15)$$

Таким образом, из (10.5.4) следует, что средняя скорость турбулентного движения вязкой несжимаемой жидкости вдоль бесконечной стенки распределена по логарифмическому закону.

Величина  $\epsilon_0/\rho \nu^2$  в (10.5.4 15) имеет размерность скорости и её обычно обозначают через  $u_*$ . Формулу (10.5.4 15) удобно записать в безразмерной виде. Для этого составим безразмерную комбинацию из величин  $(y, \nu, u_*)$ . Такой комбинацией является выражение  $y \cdot u_* / \nu$ . Тогда формулу (10.4. 15) можно записать для безразмерной скорости  $u_*$  в виде:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_*}{\nu} + c, \quad u_* = \frac{1}{\kappa} \ln y_* . \quad (10.5.5 16)$$

Очевидно, что и при турбулентном движении жидкости на поверхности обтекаемого тела вследствие условий прилипания всегда существует тонкий слой, в котором жидкость движется ламинарно. Этот слой называют *вязким подслоем*. Ясно, что формула (10.5.4 16) справедлива лишь вне вязкого подслоя. Постоянная  $c_1$  должна быть определена экспериментально.

## 10.6. ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Движение жидкости в трубах, как очень важное для практики, интенсивно изучалось экспериментально многими исследователями, начиная с Пуазейля (1840-42 г) и Рейнольдса (1876-83 г.). Более ранние опыты создавали, как в настоящее время сказали бы, экспериментальную базу данных для развития науки. Исследователи зачастую представляли только опытные зависимости от некоторых отдельных параметров, характеризующих движение (диаметр трубы, плотность жидкости, скорость движения и т.п.), а не имея представления о подобии движений, не могли провести их обобщение.

Возможность правильной постановки опытов и обобщения их результатов появилась лишь после введения в теорию критерия динамического подобия потоков - числа Рейнольдса.

### 10.6.1. Движение жидкости в трубе с гладкими стенками

Шведский учёный Блазиус в 1911 г. в основу обобщения экспериментальных результатов ввел число Рейнольдса, что позволило ему эмпирически найти формулу для коэффициента сопротивления труб при турбулентном движении, пригодную для любых жидкостей в широком диапазоне скорости движения жидкости и диаметров труб.

Ранее было показано, что для расчета гидравлического сопротивления  $\Delta P$  гладких, круглых цилиндрических труб используется формула вида

$$\Delta P = \frac{\rho \bar{v}^2 l}{2 d} \lambda, \quad \lambda = \lambda(\text{Re}), \quad \text{Re} = \frac{\rho \bar{v} d}{\eta} ., \quad (10.6.1 17)$$

Здесь  $\bar{v}$  - средняя по сечению трубы скорость движения жидкости.

Для ламинарного движения коэффициент гидравлического сопротивления  $\lambda$  равен:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}, \quad \Delta P \sim \bar{v}, \quad \text{Re} < 2300. \quad (10.6.2 \ 18)$$

Для турбулентного движения Блазиус получил формулу

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}}, \quad \Delta P \sim v^{7/4} \approx \bar{v}^2, \quad \Delta P \sim v^{7/4} \approx \bar{v}^2, \quad 2,3 \cdot 10^3 \leq \text{Re} \leq 10^5. \quad (10.6.3 \ 19)$$

Из предыдущих формул видно, что сопротивление труб  $\Delta P$  при ламинарном движении пропорционально первой степени средней скорости, тогда как при турбулентном движении  $\Delta P$  пропорционально  $\bar{v}^{7/4}$  или приблизительно квадрату скорости.

Предположим, что при турбулентном движении жидкости в трубе обеспечивается кинематическое подобие при изменении скорости и радиуса трубы. Это означает, что, если в какой-то точке трубы скорость изменилась в некоторое число раз, то во всех других точках она изменится во столько же раз. Если за характерную выбрать скорость на оси трубы  $v_{\text{макс}}$ , то это условие кинематического подобия можно записать следующим образом:

$$v = v_{\text{макс}} f\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (10.6.4 \ 20)$$

Здесь  $r$  - расстояние от оси,  $r_0$  - радиус трубы.

Из закона сопротивления трубы при турбулентном течении при некоторых предположениях можно вывести закон распределения скорости по сечению трубы. Можно показать, используя формулу (10.6.3) для  $\lambda$ , что этот закон имеет вид:

$$v(r) = v_{\text{макс}} \left(-r/r_0\right)^{7/4}, \quad \bar{v} = \frac{98}{120} v_{\text{макс}}. \quad (10.6.5 \ 21)$$

Таким образом, при турбулентном движении средняя скорость движения жидкости по трубе мало отличается от максимальной в отличие от ламинарного движения, при котором она равна  $\bar{v} = (1/2)v_{\text{макс}}$ . На рис.10.7 представлены примерные эпюры скоростей при ламинарном и турбулентном движении жидкости в трубе (для ламинарного движения  $v(r) = v_{\text{макс}} \left(-r^2/r_0^2\right)$ ). Как видно, основное изменение скорости турбулентного движения наблюдается вблизи поверхности, вблизи же оси это изменение мало.

В последствии турбулентное движение жидкости в трубах изучалось многими исследователями. Для коэффициента сопротивления трубы в

настоящее время существует более десятка различных эмпирических формул. Так, в 1932 г. Никурадзе, обработав свои экспериментальные результаты согласно теории турбулентности Прандтля, получил для распределения скоростей эмпирическую формулу:

$$\frac{v}{v_*} = 2,5 \ln \frac{v_* y}{\nu} + 5,5. \quad (10.6.6 \ 22)$$

Здесь  $y$  - расстояние от стенки трубы. Характерная скорость  $v_*$  по экспериментально измеряемым величинам может быть определена следующим образом

$$v_*^2 = \frac{\tau_0}{\rho}, \quad 2\pi \cdot r_0 l \tau_0 = \pi \cdot r_0^2 \Delta P, \quad , \quad ,$$

$$\tau_0 = \frac{r_0 \Delta P}{2 \cdot l}, \quad v_*^2 = \frac{r_0 \Delta P}{2 \cdot l \rho} \cdot , \quad .$$

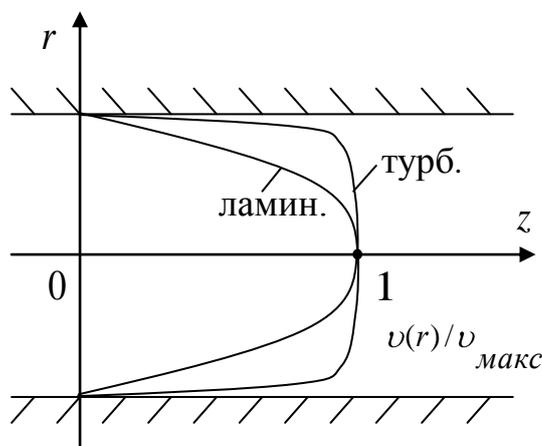


Рис.10.7

Формула (10.6.6) хорошо описывает экспериментальные результаты во всех точках сечения трубы, кроме, конечно, тонкого ламинарного подслоя, примыкающего непосредственно к стенке. Из формулы (10.6.6) можно получить уравнение для определения коэффициента  $\lambda$  гидравлического сопротивления трубы:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0,88 \ln(\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 1,1, \quad \text{Re} = \frac{\rho \bar{v} d}{\eta}, \quad 4 \cdot 10^3 < \text{Re} < 3,2 \cdot 10^6. \quad (10.6.7 \ 23)$$

Формула Никурадзе (10.6.7) справедлива в более широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса, но более сложна для практического использования, чем формула Блазиуса (10.6.3).

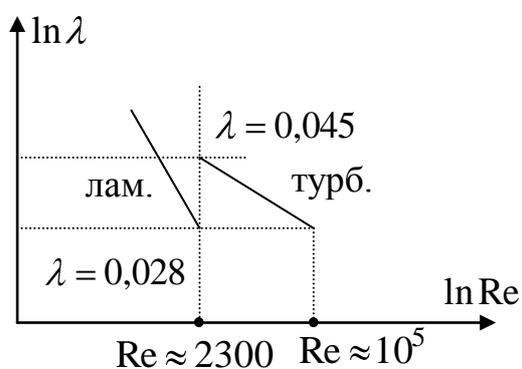


Рис. 10.8

График зависимости коэффициента сопротивления гладких труб от числа Рейнольдса изображен на рис.10.8. Как видно из рисунка, при переходе от ламинарного режима течения к турбулентному коэффициент сопротивления трубы возрастает скачком. Тщательные опыты Никурадзе показывают, что показатель степени в степенной формуле (10.6.5) для распределения скорости по сечению трубы непрерывно убывает от  $1/7$  при  $\text{Re} = 4 \cdot 10^3$  до  $1/10$  при  $\text{Re} = 3,2 \cdot 10^6$ . Это соответствует тому, что сопротивление трубы  $\Delta P$  с увеличением

сечению трубы непрерывно убывает от  $1/7$  при  $\text{Re} = 4 \cdot 10^3$  до  $1/10$  при  $\text{Re} = 3,2 \cdot 10^6$ . Это соответствует тому, что сопротивление трубы  $\Delta P$  с увеличением

числа Рейнольдса приближается к квадратичному закону в зависимости от средней по сечению скорости движения.

### 10.6.2. Турбулентное движение в трубах с шероховатыми стенками

Выше было рассмотрено турбулентное движение жидкости в гладких трубах. Опыт показывает, что степень чистоты внутренней поверхности трубы существенным образом сказывается на её сопротивлении, причем тем сильнее, чем больше число Рейнольдса. Так трубы после длительной эксплуатации (вследствие коррозии) увеличивают коэффициент сопротивления более, чем в два раза. Очевидно, формулы для распределения скоростей и для коэффициента сопротивления каким-то образом должны учитывать шероховатость труб. Это тем более очевидно, поскольку шероховатость труб является геометрическим параметром, необходимым для динамического подобия потоков.

Обозначим среднюю высоту бугорков шероховатостей на стенках через

$h$ . В опытах Никурадзе шероховатость создавалась искусственно при помощи приклеивания к стенкам трубы песчинок, имеющих некоторый средний размер зерен  $h$ .

Очевидно, что трубы будут геометрически, а потоки - динамически подобными, если для них сохраняется отношение  $h/r_0$ . Следовательно, формулы для распределения скоростей и коэффициента сопротивления

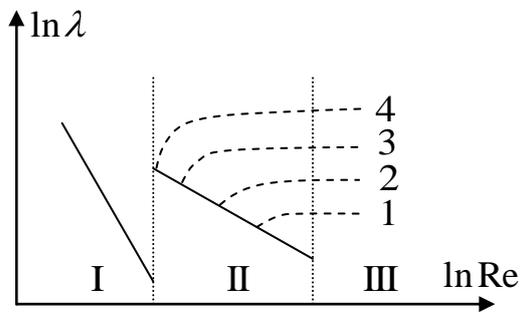


Рис.10.9

шероховатых труб должны быть некоторыми функциями от относительной шероховатости  $h/r_0$ .

Обработывая многочисленные экспериментальные данные, Никурадзе получил результаты, которые качественно иллюстрируют зависимость  $\lambda(\text{Re})$  на рис.10.9. Всю область чисел Рейнольдса можно разбить на три области: область I ламинарного движения, переходную область II и область III, в которой  $\lambda$  не зависит от числа Рейнольдса. Как видно, трудно экспериментальные кривые описать некоторой единой формулой. Однако для больших чисел Рейнольдса (область III), когда коэффициент сопротивления не зависит от числа Рейнольдса, а зависит лишь от относительной шероховатости, Никурадзе приводит следующие эмпирические формулы:

$$\frac{v}{v_*} = 2,5 \ln \frac{r}{h} + 8,48, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0,87 \ln \frac{r_0}{h} + 1,74, \quad \ln \frac{v_* h}{\nu} > 4,25. \quad (10.6.8 \ 24)$$

Вышеприведенное условие применимости формул (10.6.8.24) на практике почти всегда выполняется. Конечно, можно и не пользоваться формулами (10.6.8. 24), а для практических расчетов брать данные прямо с графика на рис.10.9.

Сложный характер кривых на рис.10.9 можно объяснить физически. При ламинарном движении (область I), если шероховатости не загромождают сечения трубы, их влияние никак не сказывается на сопротивлении трубы. При этом, очевидно, бугорки шероховатостей погружены в неподвижную между ними жидкость, играющую роль смазки (рис.10.10а).

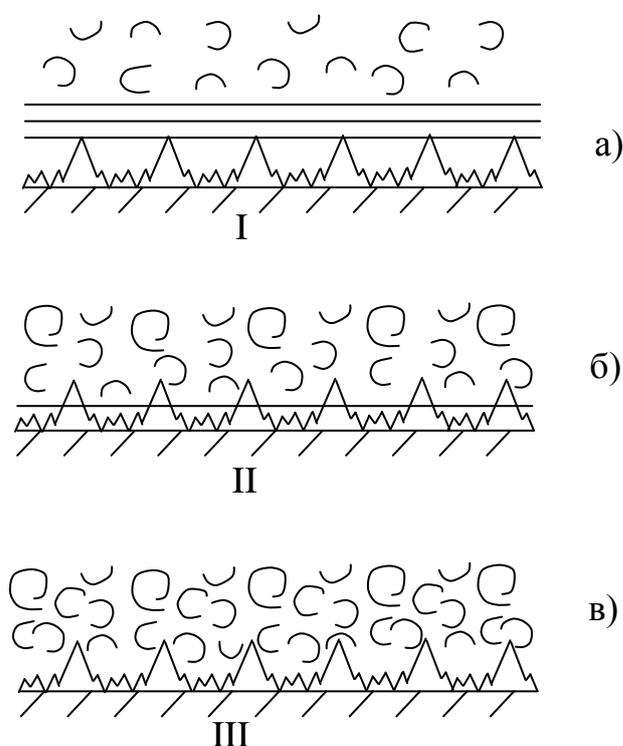


Рис.10.10.

Даже при турбулентном движении в основном потоке около стенки всегда существует ламинарный подслой, который прикрывает бугорки шероховатостей. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса (область II) вершины бугорков начинают обнажаться и с них срываются вихри, что создает дополнительную турбулизацию потока, а, следовательно, увеличение коэффициента сопротивления (рис. 10б). Причем, это произойдет при тем больших числах Рейнольдса, чем меньше относительная шероховатость трубы. Наконец, при больших числах Рейнольдса (область III) бугорки шероховатостей полностью обнажаются (рис.10.10в), и степень

турбулизации потока полностью определяется вихрями, срывающимися с их вершин, и, следовательно, коэффициент сопротивления не зависит от числа Рейнольдса, характеризующего основное движение в трубе.

Очевидно, что чем больше относительная шероховатость стенки  $h/r_0$ , тем при меньших числах Рейнольдса наблюдается отклонение коэффициента  $\lambda$  от рассчитанного по формуле Блазиуса для гладких труб, и тем большее его значение наблюдается в области III (см. рис. 10.9).

### 10.7. РАЗВИТАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Рассмотрим свойства турбулентного движения, пользуясь *методом анализа размерностей физических величин* (см тема 9)

После потери устойчивости движения в среде сначала появляются крупные вихри, создающие крупные нерегулярные пульсации скорости: частицы среды двигаются по сравнительно плавным траекториям, хотя их траектории сильно перепутаны. По мере дальнейшего увеличения числа

Рейнольдса траектории частиц становятся менее плавными, появляются более *мелкие вихри*. На фоне плавных траекторий появляются более мелкие их искривления, а скорость частиц приобретает более мелкие нерегулярные пульсации. При больших числах Рейнольдса турбулентное движение содержит вихри от самых крупных до самых мелких, в которых частицы среды перемещаются как целое с одинаковыми скоростями – такое движение называют *развитым турбулентным движением*.

Очевидно, турбулентное движение можно рассматривать как результат наложения движений различных масштабов. Под *масштабом* движения понимают порядок тех расстояний, на которых скорость частиц среды изменяется существенно. При  $Re \geq Re_{кр}$  появляются сначала *крупномасштабные* пульсации. Масштаб крупномасштабных движений порядка размеров самой области движения  $l$  (для трубы порядка её диаметра  $d$ ). На меньших расстояниях изменение скорости незначительно. Крупномасштабные движения обладают и наибольшей амплитудой пульсаций, т.е. разность скоростей  $\Delta u$  на концах отрезка  $l$  велика и может быть сравнимой со средней скоростью  $\bar{v}$  движения на расстоянии  $l$ , т.е.  $\Delta u \sim \bar{v}$ .

При увеличении числа Рейнольдса появляются всё более и более *мелкомасштабные* пульсации вплоть до пульсаций самого мелкого масштаба  $\lambda_0$ . Области среды размером  $\lambda_0$  двигаются при заданном числе Рейнольдса как целое: внутри них *частицы движутся с одинаковыми скоростями*. На больших расстояниях порядка  $l$  изменение скорости определяется, как отмечалось выше, в основном крупномасштабными пульсациями, и по порядку величины оно равно  $\Delta u$ . На малых же расстояниях изменение скорости определяется мелкомасштабными пульсациями.

Наряду с числом Рейнольдса  $Re = (l\rho\bar{v})/\eta$ , характеризующим турбулентное движение в целом, а так же крупномасштабное движение, можно ввести понятие о числе Рейнольдса  $Re_\lambda$ , характеризующим движение в любом масштабе  $\lambda$  от самого мелкого до самого крупного:

$$Re_\lambda = \frac{\lambda\rho v_\lambda}{\eta}. \quad (10.7.1 \ 25)$$

В (10.7.1)  $\lambda$  определяет масштаб движения, а  $v_\lambda$  – порядок величины скорости пульсационного движения этого масштаба.

При больших числах Рейнольдса скорости движения в целом велики, велики и числа Рейнольдса крупномасштабных движений. Однако движение среды при больших числах Рейнольдса можно рассматривать как движение маловязкой (в пределе идеальной) среды. Поэтому крупномасштабное движение, которое определяет и движение в целом, можно рассматривать как движение идеальной среды, описываемое уравнением Эйлера. Отсюда следует,

что в крупномасштабных движениях не должно происходить заметной диссипации энергии движения ( $\eta = 0$ ).

С уменьшением масштаба движения  $\lambda$  уменьшается и скорость  $v_\lambda$ , а, тем более,  $Re_\lambda$ . Поэтому при уменьшении масштаба движения вязкость играет всё большую роль вплоть до самого мелкого масштаба  $\lambda_0$ . Именно в наиболее мелкомасштабных движениях масштаба  $\lambda_0$  происходит основная диссипация энергии турбулентного движения.

Таким образом, можно представить следующую схему диссипации энергии механического движения среды при турбулентном движении. Почти вся энергия турбулентного движения содержится в крупномасштабных движениях. Эта энергия передается в движения самых мелких масштабов порядка  $\lambda_0$ , в которых и происходит её диссипация в тепло. То-есть, существует направленный поток энергии от крупномасштабных к мелкомасштабным движениям, причем этот поток, проходя промежуточные масштабы, остается почти неизменным.

Определим порядок величины диссипируемой энергии  $\varepsilon_T$  в единицу времени в единице массы среды. Как установлено, эта энергия определяется крупномасштабным движением, хотя её диссипация происходит в самых мелких масштабах. Поскольку крупномасштабное движение можно рассматривать как движение идеальной среды ( $\eta = 0$ ), то параметрами, определяющими это движение, являются  $\rho, \Delta u, l$ . Из этих определяющих параметров можно образовать единственную комбинацию, имеющую размерность  $\varepsilon_T$ :

$$\varepsilon_T \sim \frac{\rho \Delta u^3}{l}. \quad (10.7.2 \ 26)$$

Формула (10.7.2) определяет порядок величины диссипируемой энергии при турбулентном движении в единице массы.

Как уже отмечалось, турбулентно движущуюся среду можно рассматривать как среду, обладающую некоторой турбулентной вязкостью  $\eta_T$ . Очевидно, что турбулентная вязкость также должна определяться крупномасштабным движением, т.е. теми же определяющими параметрами  $\rho, \Delta u, l$ , поскольку характер осредненного движения, очевидно, в основном определяется крупномасштабными пульсациями. Из них можно образовать лишь одну комбинацию, имеющую размерность коэффициента турбулентной вязкости  $\eta_T$ , порядок величины которой определяется выражением

$$\eta_T \sim \rho \cdot \Delta u \cdot l. \quad (10.7.3 \ 27)$$

Разделив правую и левую часть (10.7.3) на коэффициент динамической вязкости  $\eta$  получим:

$$\frac{\eta_T}{\eta} \sim \frac{\rho \cdot \Delta u \cdot l}{\eta} = \text{Re}. \quad (10.7.4 \ 28)$$

В формулах (10.7.3,4), вообще говоря, может стоять значительный безразмерный численный коэффициент. Очевидно, что в формуле (10.7.4) этот численный коэффициент значительно ближе к единице, если поделить правую часть (10.7.4) на  $\text{Re}_{\text{кр}}$ . Тогда при  $\text{Re} \approx \text{Re}_{\text{кр}}$   $\eta_T \approx \eta$ , что и следует из физических соображений:

$$\frac{\eta_T}{\eta} \approx \frac{\text{Re}}{\text{Re}_{\text{кр}}}. \quad (10.7.5 \ 29)$$

Тогда величина диссипируемой энергии может быть определена из (10.7.3,4) следующим образом:

$$\varepsilon_T \sim \frac{\eta_{\text{турб}}}{\rho} \left( \frac{\Delta u}{l} \right)^2. \quad (10.7.6 \ 30)$$

Интересно сравнить полученное выражение с аналогичным выражением для  $\varepsilon$  при ламинарном движении. Как показано в теме 8, энергия диссипации в единице массы в единицу времени ламинарно движущейся несжимаемой среды определяется по формуле:

$$\varepsilon \sim \frac{dE}{dt \rho dV} = -\frac{\eta}{2\rho} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \approx \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\Delta u}{l} \right)^2. \quad (10.7.7 \ 31)$$

Из (10.7.6, 7) видно, что формулы, определяющие порядок величины диссипируемой энергии при турбулентном и ламинарном движениях совершенно идентичны при замене  $\eta$  на  $\eta_T$ .

Рассмотрим движение в *промежуточных* масштабах  $\lambda$  ( $l > \lambda > \lambda_0$ ). Очевидно, в качестве параметров, определяющих движение в промежуточных масштабах можно выбрать  $\rho$ ,  $\lambda$  и  $\varepsilon$  - поток энергии, “переходящий” от крупномасштабных движений к движению самых мелких масштабов, в которых он диссипируется в тепло. По-видимому, вязкость для движений в промежуточных масштабах еще не играет заметной роли.

Оценим порядок  $v_\lambda$ , т.е. величину изменения скорости на концах отрезка порядка  $\lambda$ . Из вышеуказанных параметров можно образовать лишь одну величину с размерностью скорости -  $\propto \lambda^{1/3}$ . Таким образом, имеем:

$$v_\lambda \sim \epsilon \cdot \lambda^{2/3} \sim \Delta u \left( \frac{\lambda}{l} \right)^{1/3}. \quad (10.7.8 \text{ 32})$$

Из (10.7.8) видно, что изменение скорости на расстояниях порядка  $\lambda$  пропорционально кубическому корню из этого расстояния. Соотношение (10.7.8) называют *законом Колмогорова-Обухова* для турбулентного движения.

Перейдем, наконец, к рассмотрению самых мелких масштабов движения  $\lambda_0$ , в которых и происходит диссипация энергии турбулентного движения вследствие вязкости среды. Определим порядок величины самых мелких масштабов движения  $\lambda_0$ . Рассмотрим число Рейнольдса масштаба  $\lambda$ .

$$\text{Re}_\lambda = \frac{v_\lambda \cdot \lambda}{\nu} \sim \frac{\Delta u \cdot l}{\nu} \left( \frac{\lambda}{l} \right)^{4/3}. \quad (10.7.9 \text{ 33})$$

Очевидно, для самых мелких масштабов движения, когда вязкость играет определяющую роль,  $\text{Re}_{\lambda_0} \approx 1$ . Тогда из (10.7.9) следует:

$$\lambda_0 \sim \frac{l}{\text{Re}^{3/4}}. \quad (10.7.10 \text{ 34})$$

Формулу (10.7.10) можно получить, рассматривая в качестве определяющих параметров движения в масштабах  $\lambda_0$  параметры  $\rho$ ,  $\epsilon$  и  $\eta$ . Формулой (10.7.10) определяется размер областей среды, которые при заданном числе Рейнольдса движутся как целое. Чем больше число Рейнольдса, тем меньше размер этих областей.