

## 11. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Как упоминалось выше, движение среды при больших числах Рейнольдса можно рассматривать как движение идеальной среды, подчиняющейся уравнениям Эйлера. Однако такое рассмотрение будет заведомо неверным вблизи поверхности обтекаемого тела. При обтекании неподвижного тела с большими скоростями скорость среды (газа) уменьшается до нуля на его поверхности в тонком пристеночном слое, который называют *пограничным слоем*. Пограничный слой характеризуется большими градиентами скоростей, перпендикулярными к поверхности тела, что свидетельствует о больших силах вязкости, определяющих движение среды в этом слое.

Поэтому всю область движения обтекающей тело среды можно разделить на две области: область тонкого пристеночного пограничного слоя, в которой движение в основном определяется вязкостью среды, и вся остальная область движения вне пограничного слоя, в которой среда движется как идеальная. На такую возможность выделения двух областей при обтекании средой тел указывал еще Д. И. Менделеев.

### 11.1. УРАВНЕНИЯ ПРАНДТЛЯ ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

#### 11.1.1. Оценка слагаемых в уравнениях сохранения

Поскольку пограничный слой предполагается тонким, т.е. его толщина  $\delta$  значительно меньше размеров обтекаемого тела  $l$ , то движение среды в пограничном слое можно рассматривать как плоское движение. Рассмотрим стационарное изотермическое движение вязкой несжимаемой среды в пограничном слое. Система уравнений сохранения имеет вид:

$$\begin{aligned}v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned} \tag{11.1.1}$$

Пусть ось  $x$  направлена вдоль поверхности обтекаемого тела (рис.11.1.1). Оценим порядок слагаемых в уравнениях (11.1) в пограничном слое. Очевидно скорость  $v_x$  внутри пограничного слоя порядка скорости набегающего потока  $v_\infty$ , а координата  $x$  порядка характерного размера  $l$ , т.е.

$$v_x \sim v_\infty, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{v_\infty}{l}. \quad (11.1.2)$$

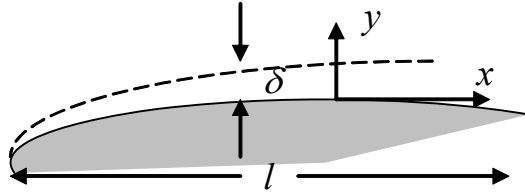


Рис.11.1

Из третьего уравнения системы (11.1.1) - уравнения непрерывности оценка дает

$$\frac{v_\infty}{l} + \frac{v_y}{\delta} \cong 0, \quad v_y \sim v_\infty \frac{\delta}{l}. \quad (11.1.3)$$

Поскольку  $\delta \ll l$ , то из (11.3) следует, что  $v_y \ll v_x$ . Остальные слагаемые уравнений (11.1) имеют порядок:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{v_\infty^2}{l}, \quad v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{v_\infty^2}{l}, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{v_\infty}{l}, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{v_\infty}{\delta^2}.$$

Подставляя эти оценки в уравнения (11.1.1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{v_\infty^2}{l} + \frac{v_\infty^2}{l} &\approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{v_\infty}{l} + \frac{v_\infty}{\delta^2} \right), \\ \frac{v_\infty^2 \delta}{l} + \frac{v_\infty^2 \delta}{l} &\approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{v_\infty \delta}{l^3} + \frac{v_\infty}{\delta^2} \right). \end{aligned} \quad (11.1.4)$$

Прежде всего, сравним слагаемые в скобках в правой части уравнения (11.1.4)

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} / \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx \left( \frac{\delta}{l} \right)^2 \ll 1.$$

Поэтому первым слагаемым в скобках в (11.1.4) можно пренебречь. Если среда не вязкая ( $\nu = 0$ ), то вторыми слагаемыми в этих уравнениях можно пренебречь, и тогда отношение поперечного градиента к продольному равно

$$\frac{\partial P}{\partial y} / \frac{\partial P}{\partial x} \approx \frac{v_\infty^2 \delta}{l^2} \frac{l}{v_\infty^2} \ll 1.$$

Такого же порядка  $\delta/l$  отношение любых соответствующих слагаемых в уравнениях (11.1.4). Поэтому можно не рассматривать второе уравнение (11.1.4), вообще полагая  $\partial P / \partial y = 0$ , свидетельствующее о том, что давление поперек пограничного слоя постоянно и не зависит от  $y$ . С такими оценками система уравнений (11.1.4) принимает вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (11.1.5)$$

Обозначим скорость вне пограничного слоя через  $u = u(x, y)$ . Рассмотрим линию тока, ограничивающую пограничный слой. Можно полагать, что с внешней стороны эта линия находится в идеальной среде и для нее справедливо уравнение Бернулли

$$\frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} = const, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -u \frac{du}{dx}. \quad (11.1.6)$$

С учетом этих соотношений уравнения движения вязкой несжимаемой среды в пограничном слое имеют вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = u \frac{du}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (11.1.7)$$

### 11.1.2. Уравнения Прандтля в безразмерном виде

Систему уравнений (11.1.7) называют *уравнениями Прандтля* для пограничного слоя. Таким образом, задача об обтекании тела идеальной вязкой несжимаемой средой при больших числах Рейнольдса распадается на две задачи. Прежде всего, необходимо решить задачу об обтекании тела несжимаемой средой, т.е. найти распределение скорости в поле течения около тела. Причем, так как пограничный слой тонок ( $\delta \ll l$ ), то можно и не увеличивать толщину тела на толщину пограничного слоя, а рассматривать обтекание реального тела. Если первая задача решена, то известна скорость  $u = u(x, y)$ .

Граничными являются условия:  $v_x = v_y = 0$  при  $y = 0$ ,  $v_x = u$  при  $y = \delta$ . Подставляя  $u(x, y)$  на поверхности тела в уравнения (11.1.7), можно найти компоненты скорости  $v_x$  и  $v_y$  в пограничном слое как функции координат, а, следовательно, и силы вязкости, действующие на поверхность тела со стороны движущейся среды.

Приведем уравнения Прандтля к безразмерному виду. Для этого воспользуемся следующими масштабами измерения пространственных координат и компонент скоростей:

$$x = lx_*, \quad y = \frac{l}{\sqrt{Re}} y_*, \quad v_x = v_\infty v_{x*}, \quad v_y = \frac{v_\infty}{\sqrt{Re}} v_{y*}, \quad u = v_\infty u_*, \quad Re = \frac{v_\infty l}{\nu}. \quad (11.1.8)$$

Здесь  $l$  – характерный размер обтекаемого тела,  $v_\infty$  – характерная скорость – например, скорость набегающего потока.

Подставляя соотношения (11.1.8) в уравнения Прандтля (11.1.7) получим:

$$\begin{aligned} \frac{v_\infty^2}{l} v_{*x} \frac{\partial v_{*x}}{\partial x_*} + \frac{v_\infty \sqrt{\text{Re}}}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{v_\infty}{l} v_{*y} \frac{\partial v_{*x}}{\partial y_*} &= \frac{v_\infty^2}{l} u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + v \frac{v_\infty \text{Re}}{l^2} \frac{\partial^2 v_{*x}}{\partial y_*^2}, \\ \frac{v_\infty}{l} \frac{\partial v_{*x}}{\partial x_*} + \frac{v_\infty \sqrt{\text{Re}}}{\sqrt{\text{Re}l}} \frac{\partial v_{*y}}{\partial y_*} &= 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (11.1.9)$$

Деля первое уравнение (11.1.9) на  $v_\infty^2/l$ , а второе на  $v_\infty/l$ , получим следующие уравнения Прандтля для безразмерных величин

$$v_{*x} \frac{\partial v_{*x}}{\partial x_*} + v_{*y} \frac{\partial v_{*x}}{\partial y_*} = u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial^2 v_{*x}}{\partial y_*^2}, \quad \frac{\partial v_{*x}}{\partial x_*} + \frac{\partial v_{*y}}{\partial y_*} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \quad (11.1.10)$$

Из уравнений (11.1.10) видно, что безразмерные уравнения не содержат коэффициента вязкости среды. Не содержат коэффициента вязкости и граничные условия: при  $y = 0$ ,  $v_x = 0$  ( $v_{*x} = 0$ );  $y = \delta$   $v_x = u_*$ .

Общее решение системы (11.10) имеет вид:

$$v_{*x} = f_1(x_*, y_*), \quad v_{*y} = f_2(x_*, y_*). \quad (11.1.11)$$

Очевидно, где-то в пограничном слое безразмерная координата  $y_*$  будет порядка единицы, т.е.  $y_* \sim 1$ . Тогда при помощи соотношений (11.1.8) можно оценить порядок толщины пограничного слоя:

$$y_* = \frac{y\sqrt{\text{Re}}}{l}, \quad y \sim \delta, \quad y_* \sim 1, \quad \delta \sim \frac{l}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (11.1.12)$$

### 11.1.3. Обтекание полубесконечной пластинки

В качестве примера рассмотрим стационарное обтекание вязкой несжимаемой средой тонкой полубесконечной пластинки (рис.11.2).

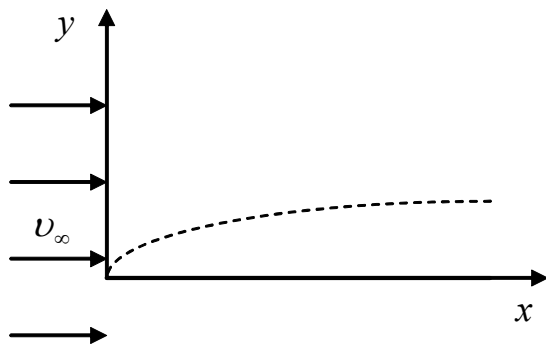


Рис.11.2

Пусть пластинка расположена вдоль набегающего потока. Решение первой части задачи известно: при обтекании пластинки идеальной средой она вообще не оказывает никакого влияния на набегающий поток, т.е. однородный поток остается однородным около и после

пластинки. Следовательно  $u(x, y) = v_\infty = const$ ,  $du/dx = 0$ . В этом случае для определения безразмерных компонент скорости движения среды внутри пограничного слоя из (11.1.10) получаем следующие уравнения Прандтля:

$$v_{*x} \frac{\partial v_{*x}}{\partial x} + v_{*y} \frac{\partial v_{*x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_{*x}}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_{*x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{*y}}{\partial x} = 0. \quad (11.1.13)$$

Граничные условия имеют вид:

$$y_* = 0, \quad x_* \geq 0, \quad v_{*x} = v_{*y} = 0; \quad y = \delta, \quad v_{*x} = 1.$$

Из безразмерных уравнений Прандтля (11.1.13) следует, что решение системы можно записать в следующем общем виде:

$$v_{*x} = \frac{v_x}{v_\infty} f_1(x_*, y_*), \quad v_{*y} = v_y \frac{\sqrt{Re}}{v_\infty} = f_2(x_*, y_*). \quad (11.1.14)$$

Однако в силу бесконечности пластинки это решение не должно зависеть от характерного размера  $l$ . Это значит, что функции  $f_1$  и  $f_2$  должны зависеть от таких комбинаций  $x_*$  и  $y_*$ , которые бы не содержали размер  $l$ . Такой комбинацией является

$$\frac{y_*}{\sqrt{x_*}} = \frac{y\sqrt{Re}}{l\sqrt{x/l}} = y\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}. \quad (11.1.15)$$

Точно так же должен отсутствовать размер  $l$  и в определении  $v_y$ . Это возможно только тогда, когда множитель перед функцией  $f_2$  имеет следующее значение:

$$v_y = \frac{v_\infty}{\sqrt{Re}} v_{*y} = \frac{v_\infty \sqrt{x_*}}{\sqrt{Re} \sqrt{x_*}} f_2(x_*, y_*) = \sqrt{\frac{\nu v_\infty}{x}} f_2\left(\frac{y_*}{\sqrt{x_*}}\right). \quad (11.1.16)$$

Таким образом, искомые компоненты скорости  $v_x$  и  $v_y$  равны:

$$v_x = v_\infty f_1\left(y\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}\right), \quad v_y = \sqrt{\frac{\nu v_\infty}{x}} f_2\left(y\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}\right). \quad (11.1.17)$$

При помощи уравнения непрерывности в (11.1.13) можно выразить производную  $f_1'$  через  $f_2'$  или наоборот. Тогда, используя первое уравнение Прандтля в (11.1.13), можно получить нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка для неизвестной производной  $f_2'$ . Это уравнение с использованием граничных условий может быть решено только численно и приводит к следующим результатам. Например, сила вязкого трения  $\sigma_{xy}$  на единицу площади поверхности пластины равна

$$\sigma_{xy} = \eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \eta v_\infty \sqrt{\frac{\rho v_\infty}{\eta x}} \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=0} = 0,332 \sqrt{\frac{\eta \rho v_\infty^3}{x}}. \quad (11.1.18)$$

Интегрируя вдоль пограничного слоя по  $x$  от 0 до  $l$ , получим силу вязкого трения  $F_x$ , действующую на обе стороны пластинки единичной ширины

$$F_x = 2 \int_0^l \sigma_{xy} dx = 1,328 \sqrt{\eta \rho l v_\infty^3}. \quad (11.1.19)$$

Толщину пограничного слоя на пластинке можно оценить следующим образом. На границе пограничного слоя  $y = \delta$ , а  $v_x = v_\infty$ . Тогда  $f_1$  должна быть порядка единицы при любых  $x$ . Это, в свою очередь, может быть тогда, когда безразмерный аргумент функции  $f_1$  на границе пограничного слоя ( $y = \delta$ ) будет равен некоторому числу, постоянному для всего пограничного слоя. Тогда имеем:

$$\delta \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = const, \quad \delta = const \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}. \quad (11.1.20)$$

Из (11.1.20) видно, что толщина пограничного слоя увеличивается вдоль пластинки пропорционально корню квадратному из расстояния от передней кромки пластинки и коэффициента кинематической вязкости. С увеличением же скорости набегающего потока толщина пограничного слоя уменьшается.

#### 11.1.4. Толщина вытеснения

Вообще толщина пограничного слоя есть величина неопределенная. Скорость среды в пограничном слое плавно переходит в скорость вне пограничного слоя. Никакой резкой разницы между двумя областями

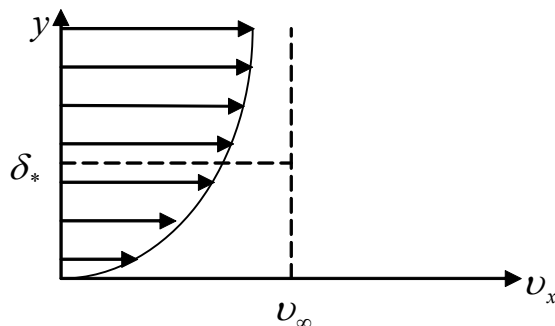


Рис. 11.3

движения в действительности, конечно, не существует. Для определенности при сравнении результатов различных методов расчета пользуются понятием *толщины вытеснения*  $\delta_*$ .

Определение толщины вытеснения очевидно из рис.11.3. Приравнивая площадь  $\delta_* v_\infty$  и площадь, заключенную между

асимптотой  $u_x = u_\infty$  и кривой  $u_x = u_x(y)$ , получим:

$$\delta_* = \frac{1}{u_\infty} \int_0^\infty (u_\infty - u_x) dy. \quad (11.1.21)$$

В рассматриваемой выше задаче толщина вытеснения равна:

$$\delta_* = 1,72 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}. \quad (11.1.22)$$

### 11.1.5. Разгонный участок

Применим понятие о пограничном слое к оценке длины разгонного участка в трубе. Пусть из некоторого резервуара среда поступает в плоскую трубу, имея на входе почти однородное по сечению трубы распределение скорости. По мере продвижения вдоль трубы профиль скорости становится все более вытянутым и, наконец, после прохождения некоторого участка трубы  $L_{\text{разг}}$  профиль скорости становится параболическим, соответствующим точному решению задачи об установившемся ламинарном движении среды в трубе (рис.11.4)

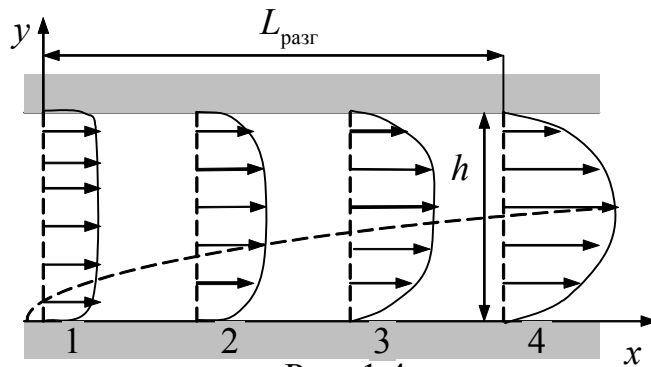


Рис. 1.4

Можно рассматривать такую задачу следующим образом. Очевидно, в начале трубы (участок 1 на рис.11.4) на ее стенке только начинает формироваться пограничный слой, тогда как внутри трубы среда движется с одинаковой по высоте трубы скоростью. По мере продвижения вдоль трубы толщина пограничного слоя растет (участок 2 и 3), и после того, как она становится равной высоте трубы (на участке 4, рис.11.4), можно полагать, что профиль скорости становится параболическим, определяемым формулой Пуазейля. Тогда, используя (11.1.22), получим формулу для определения длины разгонного участка:

$$\delta_* = \frac{h}{2} = 1,72 \sqrt{\frac{\nu L_{\text{разг}}}{\bar{v}}}, \quad L_{\text{разг}} \cong \frac{h_0^2 \bar{v}}{4 \cdot 3,0 \nu} \approx \frac{1}{12} h \text{Re}, \quad \text{Re} = \frac{\bar{v} h}{\nu}. \quad (11.1.23)$$

Так при числе Рейнольдса, равным 600, длина разгонного участка равна  $\sim 50h$ . Это означает, что только на расстоянии пятидесяти высот от входного сечения плоского канала движение в трубе будет подчиняться теоретическим формулам, полученным для ламинарного движения. Более точное аналитическое решение задачи о длине разгонного участка для цилиндрической трубы с диаметром  $d$  приводит к результату:

$$L_{\text{разг}} = \frac{1}{8} d \cdot \text{Re}. \quad (11.1.24)$$

Из сравнения (11.1.23 и 24) следует, что длина разгонного участка в цилиндрической трубе в 1.5 раза больше, чем в плоской трубе единичной ширины. Это связано с тем, что при одинаковом расходе среды профиль скорости в цилиндрической трубе более вытянут за счет сужения потока стенками. В плоской трубе сужение потока осуществляется только нижней и верхней параллельными стенками.

## 11.2 ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КАРМАНА

### 11.2.1. Решение системы уравнений Прандтля методом Кармана

От дифференциальных уравнений Прандтля (11.1.7) для пограничного слоя можно перейти к одному интегральному уравнению. Для этого проинтегрируем уравнения Прандтля (11.1.7) по толщине пограничного слоя. Воспользуемся следующей известной формулой дифференцирования интеграла с переменными пределами:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy + f(x, b) \frac{db}{dx} - f(x, a) \frac{da}{dx}. \quad (11.2.1)$$

Проинтегрируем первое уравнение системы (11.1.7) по  $y$  от 0 до  $\delta(x)$ . Воспользовавшись формулой (11.2.1) получим для первого слагаемого первого уравнения (11.1.7):

$$\int_0^{\delta(x)} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial}{\partial x} (v_x^2) dy = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} v_x^2 dy - \frac{1}{2} v_x^2(x, \delta(x)) \frac{d\delta(x)}{dx}. \quad (11.2.2)$$

Интегрирование по частям второго слагаемого в (11.1.7) с использованием второго уравнения для замены соответствующих производных дает:



$$\int_0^{\delta} v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = v_y v_x \Big|_0^{\delta} - \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = v_y(x, \delta) v_x(x, \delta) - v_y(x, 0) v_x(x, 0) +$$

$$+ \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = v_y(x, \delta) v_x(x, \delta) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} v_x^2 dy - \frac{1}{2} v_x^2(x, \delta) \frac{d\delta}{dx}. \quad (11.2.3)$$

При выводе соотношения (11.2.3) использованы граничные условия: при  $y=0$ ,  $v_x=0$ ,  $v_y=0$ .

Проинтегрируем второе уравнение системы (11.1.7) - уравнение непрерывности:

$$\int_0^{\delta} dv_y = - \int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy, \quad v_y(x, \delta) - v_y(x, 0) = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} v_x dy + v_x(x, \delta) \frac{d\delta}{dx}. \quad (11.2.4)$$

Подставляя полученное соотношение (11.2.4) в (11.2.3), получим:

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = -v_x(x, \delta) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} v_x dy + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} v_x^2 dy + \frac{1}{2} v_x(x, \delta) \frac{d\delta}{dx}. \quad (11.2.5)$$

Интегрирование слагаемых в правой части уравнения Прандтля (11.1.7) приводит к результатам:

$$\int_0^{\delta} u \frac{du}{dx} dy = u \frac{du}{dx} \delta, \quad \int_0^{\delta} v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy = v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_0^{\delta} = -v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (11.2.6)$$

В последнем соотношении (11.2.6) предполагается, что профиль скорости  $v_x$  в зависимости от  $y$  плавно переходит при  $y = \delta$  в скорость вне пограничного слоя так, что  $\partial v_x / \partial y$  при  $y = \delta$  равно нулю. Принимая во внимание, что на границе пограничного слоя  $v_x(x, \delta) = u(x)$  и подставляя полученные соотношения (11.2.2, 11.2.5, 11.2.6) в систему уравнений Прандтля (11.1.7), получим *интегральное уравнение Кармана* для установившегося движения вязкой несжимаемой среды в пограничном слое:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} v_x^2 dy - u \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} v_x dy + v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = u \frac{du}{dx} \delta. \quad (11.2.7)$$

### 11.2.2. Обтекание полубесконечной пластинки

Рассмотрим решение задачи об обтекании плоской полубесконечной пластинки потоком вязкой несжимаемой среды с использованием интегрального уравнения Кармана (рис.11.2). Решение этой задачи приводит, конечно, к прежним результатам, что и в п.11.2, с условием на границе пограничного слоя вида:

$$u = v_{\infty}, \quad u \frac{du}{dx} = 0. \quad (11.2.8)$$

Будем искать решение для  $v_x$  в виде полинома третьей степени по  $y$

$$v_x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3. \quad (11.2.9)$$

Коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, a_3$  определяются из граничных условий, и зависят от  $\delta$  как от параметра. В качестве граничных условий рассмотрим следующие:

$$1. y=0, v_x=0, \quad 2. y=\delta, v_x=v_{\infty}, \quad 3. \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0, \quad 4. \left. \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0. \quad (11.2.10)$$

Первые два граничных условия очевидны. Третье граничное условие принимается, исходя из предположения, что скорость  $v_x$  плавно переходит в  $v_{\infty}$  на границе пограничного слоя. Четвертое условие следует из дифференциального уравнения Прандтля, т.к. при  $y=0$  все его слагаемые для плоской пластинки равны нулю, а, следовательно, равно нулю и слагаемое  $\partial^2 v_x / \partial y^2$ .

Из первого граничного условия следует  $a_0 = 0$ , а из четвертого условия -  $a_2 = 0$ . Второе и третье граничные условия приводят к уравнениям для коэффициентов  $a_1$  и  $a_3$ :

$$v_{\infty} = a_1 \delta + a_3 \delta^3, \quad 0 = a_1 + a_3 3\delta^2. \quad (11.2.11)$$

Из решения системы уравнений (11.2.11) получаем коэффициенты  $a_1$  и  $a_3$ :

$$a_1 = \frac{3}{2} \frac{v_{\infty}}{\delta}, \quad a_3 = -\frac{v_{\infty}}{2\delta^3}.$$

Таким образом, скорость  $v_x$  определяется соотношением

$$v_x = \frac{1}{2} v_{\infty} \left( 3 \frac{y}{\delta} - \frac{y^3}{\delta^3} \right). \quad (11.2.12)$$

После подстановки (11.2.12) в интегральное уравнение Кармана (11.2.7), последующего интегрирования и дифференцирования соответствующих слагаемых получим дифференциальное уравнение для  $\delta$  в виде:

$$\frac{13}{140} v_{\infty} \frac{d\delta}{dx} = v \frac{1}{\delta}. \quad (11.2.13)$$

Решение этого уравнение дает:

$$\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{v}{v_\infty} x + C \dots$$

Постоянную интегрирования  $C$ , очевидно, следует положить равной нулю, так как при  $x = 0$   $\delta = 0$ . Таким образом, толщина пограничного слоя равна:

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13} \frac{vx}{v_\infty}} = 4,64 \sqrt{\frac{vx}{v_\infty}}. \quad (11.2.14)$$

Найдем силу  $\sigma_{xy}$ , действующую на единицу площади пластинки:

$$\sigma_{xy} = \eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{3}{2} \eta v_\infty \frac{1}{\delta} = \frac{3}{2 \cdot 4,64} \sqrt{\frac{v_\infty^3 \eta \rho}{x}} = 0,323 \sqrt{\frac{\rho \eta v_\infty^3}{x}}. \quad (11.2.15)$$

В точном решении (11.1.18) численный коэффициент равен 0,332. Интегрируя вдоль длины пластинки, найдем силу  $F_x$ , действующую на обе стороны пластинки единичной ширины длиной  $l$ :

$$F_x = 1,292 \sqrt{\eta \rho l v_\infty^3}, \quad (11.2.16)$$

В точном решении (11.1.19) численный коэффициент равен 1,328,

Найдем толщину вытеснения:

$$\delta_* = \frac{1}{v_\infty} \int_0^\delta (v_\infty - v_x) dy = \frac{1}{v_\infty} \int_0^\delta \left[ v_\infty - \frac{v_\infty}{2} \left( 3 \frac{y}{\delta} - \frac{y^3}{\delta^3} \right) \right] dy = \delta \left( 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{8} \delta. \quad (11.2.17)$$

Подставляя в это определение значение  $\delta$  из (11.2.14), получим:

$$\delta_* = 4,64 \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\frac{xv}{v_\infty}} \cong 1,74 \sqrt{\frac{xv}{v_\infty}}. \quad (11.2.18)$$

Точное решение (11.1.22) дает коэффициент 1,72 вместо 1,74,

Таким образом, интегральное соотношение Кармана позволяет довольно просто получить решение поставленной задачи, практически не отличающееся от ее точного решения.

### 11.3. ОТРЫВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ.

Из опыта известно, что при обтекании выпуклых тел при увеличении числа Рейнольдса происходит отрыв потока от поверхности обтекаемого тела и образование зоны вихревого турбулентного движения за кормой тела, что приводит к резкому возрастанию силы сопротивления. С физической точки зрения это явление можно объяснить следующим образом.

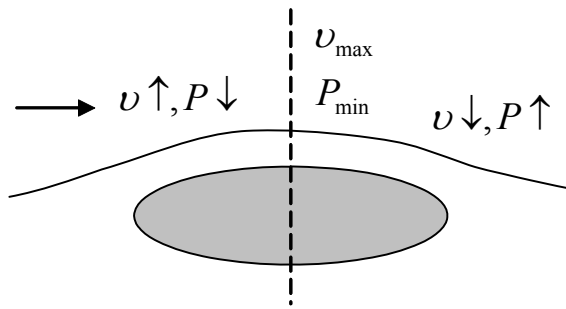


Рис. 11.5

Рассмотрим обтекание некоторого выпуклого тела (рис.11.5). Максимальная площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной набегающему потоку, называют площадью *миделева сечения*.

Рассмотрим линию тока, граничную с пограничным слоем. Если скорость потока велика, можно полагать, что она проходит в “идеальной” среде. и к ней применимо уравнение Бернулли. Вдали от тела линия тока параллельна скорости набегающего потока. Опираясь на точные решения, можно утверждать, что скорость потока возрастает вниз по потоку от скорости набегающего потока до некоторой максимальной скорости в миделевом сечении. Следовательно, согласно уравнению Бернулли давление при этом уменьшается от давления в набегающем потоке до минимального давления в миделевом сечении. После миделева сечения картина изменяется на обратную: скорость вниз по потоку уменьшается, а давление возрастает. Поскольку давление поперек пограничного слоя не изменяется и определяется давлением на его внешней границе, как отмечалось в п. 11.1, то и внутри пограничного слоя давление после миделева сечения будет возрастать вниз по потоку.

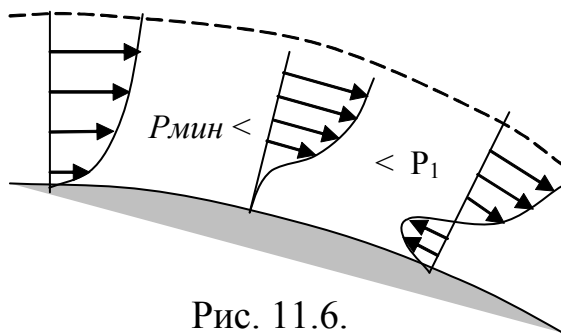


Рис. 11.6.

Таким образом, среда в пограничном слое за миделевым сечением тормозится не только вследствие вязкости, но так же и вследствие противодействия, препятствующего её движению. В результате может оказаться, что вблизи поверхности тела скорость

движения среды внутри пограничного слоя вообще окажется равной нулю не только на поверхности тела, но и в близких к поверхности тела участках

среды (рис.11.6). Более того, в точках, лежащих еще ниже по потоку, среда в пограничном слое может двигаться навстречу движению вне пограничного слоя. На рис.11.6 изображены примерные эпюры скоростей внутри пограничного слоя за миделевым сечением.

Ясно, что такое встречное движение стимулирует образование завихренности потока в кормовой части тела, пограничный слой как бы “подмывается” встречными движениями и отрывается от поверхности тела в виде крупных нерегулярных вихрей. Это, конечно, приводит к резкому увеличению сопротивления тела.

Следовательно, для уменьшения сопротивления обтекаемых тел необходимо, если это возможно, предотвратить отрыв пограничного слоя или, если это невозможно, то, по крайней мере, стремиться к тому, чтобы его отрыв произошел как можно ближе к задней кромке обтекаемого тела. В последнем случае размер области спутного турбулентного движения будет меньше, а, следовательно, будет меньше и сопротивление тела.

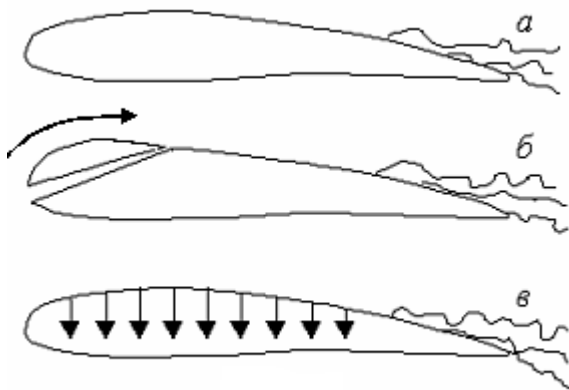


Рис.11.7

Поэтому хорошо обтекаемые тела должны иметь каплевидную форму с плавной, постепенно сужающейся кормовой частью. Поверхности хорошо обтекаемых тел должны быть гладкими, лишенными даже незначительных выступов и шероховатостей. Такую форму имеют профили крыльев и фюзеляжей современных самолетов (рис.11.7а).

Иногда для предотвращения отрыва пограничного слоя впереди крыла ставят *предкрылки*, в которых воздух разгоняется и “продувает” пограничный слой до конца профиля (рис.11.7б). Также в кормовой части используют закрылки, выпускаемые на взлете на угол  $\sim 20^\circ$ , а на посадке до  $50^\circ$  с целью увеличения подъемной силы на малых скоростях движения и увеличения силы сопротивления на посадке с одновременным сдвигом точки отрыва пограничного слоя к задней кромке крыла..

Одним из способов предотвращения отрыва пограничного слоя является также отсос воздуха внутрь обтекаемого крыла (Рис. 11.7в). При этом пограничный слой как бы “прижимается” к поверхности обтекаемого тела. Дополнительные энергетические затраты на отсос воздуха окупаются уменьшением сопротивления тела, а, следовательно, уменьшением тяги двигателя и экономией расходуемого топлива.

Для хорошо обтекаемых тел основной вклад в силу сопротивления дает не лобовое сопротивление, а вязкие силы трения среды о его поверхность. Для резкого увеличения силы лобового сопротивления (например, во время атаки при обгоне самолета противника или на пикировании во время атаки наземного объекта) на фюзеляже самолета в хвостовой части с обеих сторон предусмотрены тормозные щитки площадью  $\sim 1.5 \text{ м}^2$ , которые могут выпускаться под углом к продольной оси симметрии вплоть до  $80^\circ$ .

#### 11.4. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ И КРИЗИС СОПРОТИВЛЕНИЯ.

##### 11.4.1. Две области в пограничном слое

Ламинарное движение среды в пограничном слое при больших числах Рейнольдса становится неустойчивым, и после потери устойчивости движение в пограничном слое становится турбулентным.

Действительно, можно провести аналогию между движением в пограничном слое и движением в плоской трубе. Средняя скорость внутри пограничного слоя порядка скорости набегающего потока  $v_\infty$ . Вместо расстояния между плоскостями трубы можно рассматривать толщину пограничного слоя. Тогда число Рейнольдса в пограничном слое можно записать, как  $Re = v_\infty \delta / \nu$ . Но ранее в п.1.2 было показано, что  $\delta \sim \sqrt{x}$ , поэтому и  $Re \sim \sqrt{x}$ . При увеличении толщины пограничного слоя увеличивается и число  $Re$ . При достижении числа Рейнольдса в пограничном слое некоторого критического значения движение в нём становится турбулентным.

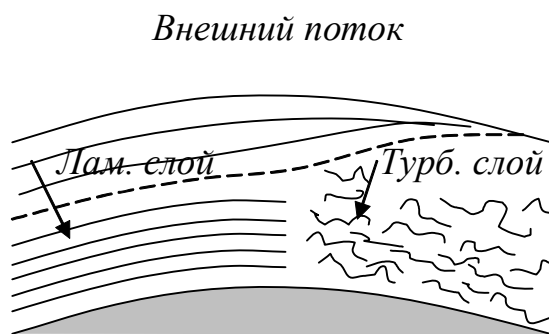


Рис. 11.8.

Это означает, что если в некоторой точке  $x$  число Рейнольдса достигнет своего критического значения, то пограничный слой будет состоять из двух областей: ламинарной передней области и последующей области турбулентного движения в пограничном слое (рис.11.8).

Расчет турбулентного движения в пограничном слое основан на теории турбулентности Прандтля, предсказывающей логарифмический профиль скорости среды в пограничном слое с некоторыми эмпирическими коэффициентами. Как показывает опыт, толщина турбулентного

пограничного слоя пропорциональна  $x$ , а не  $\sqrt{x}$  как для ламинарного слоя, т.е. толщина турбулентного пограничного слоя растет вниз по потоку быстрее, чем ламинарного.

### 11.4.2. Кризис сопротивления при обтекании шара

В качестве примера рассмотрим изменение силы сопротивления шара при обтекании его вязкой несжимаемой жидкостью в зависимости от числа Рейнольдса. Экспериментальный график зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса имеет вид, приведенный на рис.11.9.

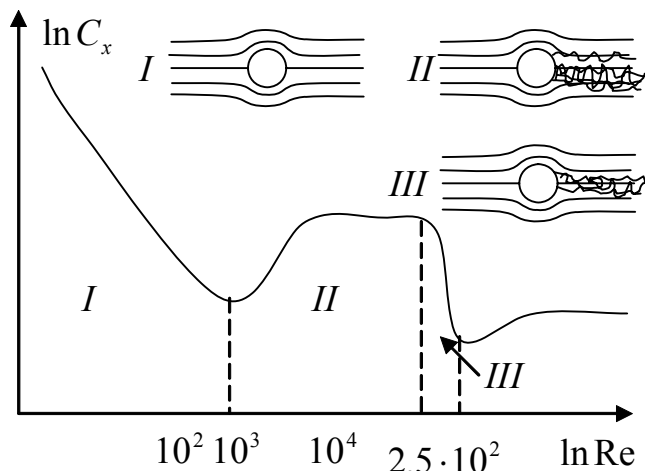


Рис. 11.9.

При малых числах Рейнольдса коэффициент сопротивления определяется формулой Стокса (область I):

$$C_x = \frac{24}{Re} \quad Re = \frac{v_\infty d}{\nu}$$

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса уменьшение коэффициента сопротивления несколько замедляется, а в дальнейшем

даже возрастает. Возрастание связано с тем, что при этих числах Рейнольдса происходит отрыв ламинарного пограничного слоя от поверхности, и за шаром образуется большая область II с нарастающей интенсивностью турбулентного движения, размер которой в основном и определяет силу сопротивления шара из-за возрастания коэффициента сопротивления.

Далее, в довольно широком интервале изменения чисел Рейнольдса коэффициент сопротивления остается практически неизменным. Действительно, как следует из безразмерных уравнений Прандтля, картина движения в ламинарном пограничном слое при увеличении числа Рейнольдса подвергается подобному преобразованию. При этом все продольные координаты и скорости остаются неизменными, а поперечные уменьшаются обратно пропорционально  $\sqrt{x}$ . Следовательно, и продольная координата точки отрыва пограничного слоя не изменяется при увеличении числа Рейнольдса. Поэтому не изменяется и размер турбулентной области за шаром, а стало быть, и коэффициент сопротивления должен оставаться приблизительно постоянным.

При числах  $Re \sim 2,5 \cdot 10^5$  происходит турбулизация пограничного слоя, что приводит к смещению точки отрыва пограничного слоя в кормовую часть

шара и резкому уменьшению коэффициента лобового сопротивления почти в 2 раза и более, хотя число Рейнольдса возрастает. Это явление называют *кризисом сопротивления шара*.

При дальнейшем увеличении числа  $Re$  коэффициент лобового сопротивления  $C_x$  несколько увеличивается, а затем остаётся постоянным.

В заключении заметим, что решение задачи о пограничном слое с помощью безразмерных уравнений Прандтля относят к классу *автомодельных* решений. В таких решениях профили безразмерных скоростей, давлений и температур изменяются подобным образом при изменении безразмерных геометрических координат, т.е. не зависят от их реальных значений. Например, независимость коэффициент  $C_x$  от числа  $Re$  в области II и III на рис. 11.9 подтверждает автомодельность решения задачи.