

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ.....	197
12.2. Параметры газа в заторможенном потоке.....	201
12.3.1. Максимальная и критическая скорость	203
12.3.2. Изменение плотности потока вдоль линии тока.....	204
12.3.3. Сопло Лавалья.....	205
12.5.1. Конус Маха	210
12.5.2. Поверхности разрыва. Законы сохранения	211
12.6. Прямая ударная волна в сжимаемом газе	214
12.6.1. Ударная адиабата (адиабата Гюгоньо)	214
12.6.2. Связь между скоростями и термодинамическими параметрами в прямой ударной волне	215
12.7. Ударные волны слабой интенсивности.....	219
12.7.1. Изменение термодинамических параметров и скоростей в прямой ударной волне.....	219
12.7.2. Образование ударных волн	222
12.7.3. Численный пример.....	223
12.8. Косая ударная волна.....	225
12.8.1. Уравнение ударной поляры	225
12.8.2. Максимальный угол поворота потока.....	228
12.8.3. Изменение скорости за косой ударной волной	229
12.8.4. Обтекание клина сверхзвуковым потоком.....	231
12.8.5. Трубка Пито в сверхзвуковом потоке.....	234
12.9. Волна разрежения	236
12.9.1. Изменение термодинамических параметров и скоростей в волне разрежения	236
12.9.2. Максимальный угол поворота потока в волне разрежения	239
12.9.3. Сектор, занимаемый волной разрежения	241
12.9.4. Тангенциальный разрыв скорости в волне разрежения.	243
12.10. Взаимодействие ударных волн и волн разрежения	245
12.10.1. Отражение ударной волны от стенки.....	245
12.10.2. Пересечение двух ударных волн	247
12.10.3. Взаимодействие ударной волны и волны с тангенциальным разрывом.....	249
12.10.4. Возникновение ударной волны в пограничном слое	250

12.11. Истечение газа из сужающегося насадка.....	252
12.12. Сопло Лавалья в нерасчетном режиме	253
12.13. Обтекание пластинки сверхзвуковым потоком под малым углом атаки	254

12. ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

В предыдущих разделах в основном рассматривалось движение несжимаемой жидкости. Если для капельных (обладающих поверхностным натяжением) жидкостей эти рассуждения справедливы в широком интервале скоростей, то для газов это не так. Отмечалось, что движение газов можно рассматривать как движение несжимаемой жидкости лишь при скорости его движения, существенно меньшей скорости распространения в нем малых возмущений (скорость звука). При скоростях движения газа, равных или больше скорости звука, движение настолько специфично, что является предметом изучения специального раздела механики - *газовой динамики*.

12.1. СКОРОСТЬ ЗВУКА

Известно, что скорость распространения малых возмущений в сплошной среде или скорость звука определяется следующим соотношением:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s}. \quad (12.1.1)$$

Для идеального газа, занимающего объем V при давлении P и изолированного от окружающей среды, процесс распространения малых возмущений описывается уравнением Пуассона – *уравнением адиабаты*

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = const, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \gamma \frac{P}{\rho}, \quad \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu}, \quad c = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}. \quad (12.1.2)$$

В формулах (12.1.2) γ - показатель адиабаты Пуассона, C_p, C_v - удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме, соответственно; μ - молекулярный вес газа, $R = 8,314$ Дж/(моль·К) - универсальная газовая постоянная

Для показателя адиабаты элементарная кинетическая теория дает следующее соотношение:

$$\gamma = \frac{N + 2}{N}, \quad \gamma = \frac{i + 2}{i}.$$

Здесь N - число степеней свободы молекулы газа. Так, для одноатомного газа - $N=3$, $\gamma=5/3=1,67$; для двухатомного газа - $N=5$, $\gamma=7/5=1,4$.

Из сравнения скорости звука со средней тепловой скоростью молекул $v_t = (8RT / \pi\mu)^{1/2}$, видно, что они примерно равны. Этого и следовало ожидать, поскольку всякое взаимодействие между двумя соседними макроскопическими

частицами газа происходит только через столкновения их молекул. Следовательно, скорость распространения такого взаимодействия (скорость распространения малых возмущений) будет происходить со средней скоростью движения молекул. Величина γ и удельные теплоемкости мало изменяются с изменением температуры и давления, и в большинстве задач их можно считать постоянными.

Как видно из таблицы [12.1](#), величины γ и C_p слабо зависят от температуры и давления, хотя элементарная кинетическая теория такой зависимости не предсказывает. Это происходит потому, что при повышении температуры постепенно возбуждаются внутренние степени свободы молекул, а при увеличении давления газ нельзя считать идеальным.

Таблица 12.1

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ γ И C_p ДЛЯ ВОЗДУХА

Воздух $P=1$ атм.			Воздух при $T=500$ К		
$T, \text{К}$	γ	$C_p, \text{ кал}/(\text{г}^*\text{К})$	$P, \text{ атм.}$	γ	$C_p, \text{ кал}/(\text{г}^*\text{К})$
100	1.42	0.246	1	1.39	0.246
500	1.39	0.246	10	1.39	0.247
1000	1.34	0.273	100	1.43	0.256
2000	1.27	0.320			

Поскольку скорость звука зависит только от температуры, то во всех термодинамических формулах и соотношениях можно температуру заменить скоростью звука.

Из термодинамики известно:

$$C_V = \left(\frac{\partial \varepsilon_{\text{вн}}}{\partial T} \right)_V, \quad \varepsilon_{\text{вн}} = C_V T + \text{const}. \quad (12.1.3)$$

Если внутренняя энергия при $T = 0$ равна нулю, то $\varepsilon_{\text{вн}} = C_V T$.

Используя определение энтальпии единицы массы, можно получить следующие соотношения:

$$h = \varepsilon_{\text{вн}} + PV = C_V T + PV = C_V T + \frac{RT}{\mu} = \left(C_V + \frac{R}{\mu} \right) T = C_p T, \quad (12.1.4)$$

$$C_p - C_V = \frac{R}{\mu}, \quad PV = \frac{RT}{\mu}, \quad V = \frac{1}{\rho}.$$

Из соотношений легко получить формулу:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}, \quad C_p - \frac{C_p}{\gamma} = \frac{PV}{T}, \quad C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{PV}{T}, \quad C_V = \frac{1}{\gamma-1} \frac{PV}{T}, \quad c^2 = \gamma \frac{P}{\rho}. \quad (12.1.5)$$

Из [\(12.1.3-5\)](#) легко получить следующие формулы для внутренней энергии и энтальпии единицы массы:

$$\varepsilon_{\text{вн}} = C_V T = \frac{PV}{\gamma-1} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)}, \quad h = C_P T = \frac{\gamma PV}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma-1}. \quad (12.1.6)$$

Используя уравнение Пуассона, можно показать, что энтропия единицы массы при изоэнтропическом движении равна:

$$S = C_V \ln \frac{P}{\rho^\gamma}.$$

12.2. ПАРАМЕТРЫ ГАЗА В ЗАТОРМОЖЕННОМ ПОТОКЕ

При больших скоростях движение газа вне тонкого пограничного слоя можно рассматривать как движение идеальной среды, лишенной вязкости и теплопроводности. Тогда движение каждой индивидуальной частицы газа можно рассматривать как адиабатическое, и для любой линии тока справедливо уравнение Бернулли для единицы массы:

$$\frac{v^2}{2} + h = \text{const}. \quad (12.2.1)$$

Найдем плотность, давление и температуру газа в *критической точке* на обтекаемом теле, где скорость потока равна 0. Для *критической линии тока* можно записать:

$$\frac{v_\infty^2}{2} + h_\infty = \frac{v_0^2}{2} + h_0 = h_0, \quad \frac{v_\infty^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_\infty}{\rho_\infty} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}. \quad (12.2.2)$$

Из (12.2.2) имеем:

$$\frac{P_0}{P_\infty} \frac{\rho_\infty}{\rho_0} = 1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} v_\infty^2 \frac{\rho_\infty}{P_\infty} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{v_\infty^2}{c_\infty^2}. \quad (12.2.3)$$

Здесь v и c - скорость газа и скорость звука в одной и той же точке на линии тока, соответственно. Отношение $v/c=M$ называют *числом Маха*.

Выражая в равенстве (12.2.3) отношение плотностей ρ_∞/ρ_0 через отношение давлений по уравнению Пуассона (12.1.2), получим формулы:

$$\frac{P_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{P_\infty}{\rho_\infty^\gamma}, \quad \frac{\rho_\infty}{\rho_0} = \left(\frac{P_\infty}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \frac{P_0}{P_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (12.2.4)$$

для отношения плотностей

$$\frac{\rho_0}{\rho_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (12.2.5)$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона, получим:

$$P_0 = \frac{R}{\mu} T_0 \rho_0, \quad P_\infty = \frac{R}{\mu} T_\infty \rho_\infty, \quad \frac{P_0}{P_\infty} = \frac{T_0 \rho_0}{T_\infty \rho_\infty}, \quad \frac{T_0}{T_\infty} = \frac{P_0}{P_\infty} \cdot \frac{\rho_\infty}{\rho_0}.$$

Из соотношения (12.2.4-5) следует:

$$\frac{T_0}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2. \quad (12.2.6)$$

Температуру газа T_0 в критической точке на обтекаемом теле называют **температурой торможения**. При больших скоростях движения температура торможения может оказаться значительной. Так, например, спутник при торможении входит в атмосферу со скоростью $v \sim 4000$ м/сек, что соответствует числу Маха, равному ~ 10 . Вычисленная по формуле (12.2.6) для воздуха ($\gamma = 1,4$) и $T_\infty = 300^\circ\text{K}$ температура торможения T_0 равна $\sim 6000^\circ\text{K}$. При такой температуре поверхность спутника оплавляется, и если он не сгорает, то только благодаря кратковременности воздействия столь высокой температуры и теплообмену с окружающей средой. Причем, такая температура будет не только в критической точке, но и на всей поверхности обтекаемого тела, т.к. в силу условий прилипания на поверхности и вязкости скорость газа на поверхности тела также равна нулю. Для спасения спутника применяются специальные конуса, сгорающие в атмосфере, а также спецпокрытия на основе высокопористых керамик, через которые испаряются жидкости для уменьшения выделяющегося при торможении тепла.

При больших скоростях сжимаемой среды справедливо уравнение Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + h = \frac{v^2}{2} + C_p T = const$$

При обтекании выпуклого тела скорость в минимальном сечении становится максимальной, а, следовательно, температура газа минимальной. Этим можно объяснить образование инверсионного следа за самолетом при полете в воздухе, достаточно насыщенном влагой. Если температура в воздухе близка, но несколько больше температуры конденсации, то понижение температуры, создаваемое движением самолета, может оказаться достаточным для конденсации и образования за ним характерной пелены.

Термометр, погруженный в движущийся газ, не покажет температуру газа, а покажет температуру торможения. Так, например, термометр, помещенный в воздух, движущийся, со скоростью 100 м/сек, покажет температуру:

$$T_0 = T_\infty \left[1 + 0.2 \left(\frac{100}{340} \right)^2 \right] \approx T_\infty (1 + 0.018).$$

Если температура газа T_∞ равна 300°K, то термометр покажет температуру на 5,4° большую, чем температура газа, которую он показал бы, если бы двигался вместе с газом со скоростью 100 м/сек.

12.3. СТАЦИОНАРНЫЙ ОДНОМЕРНЫЙ ПОТОК СЖИМАЕМОГО ГАЗА

12.3.1. Максимальная и критическая скорость

Рассмотрим линию тока, которая начинается в неподвижном газе, например, в некотором содержащем неподвижный газ сосуде, который вытекает из сосуда в окружающее пространство. Для такой линии тока можно на основании уравнения Бернулли для адиабатного движения записать:

$$\frac{v^2}{2} + h = h_0, \quad v = \sqrt{2(h_0 - h)}. \quad (12.3.1)$$

Здесь h_0 – энтальпия единицы массы неподвижного газа. Скорость движения газа имеет максимальное значение, если $h = C_p T = 0$, что возможно только тогда, когда абсолютная температура газа $T = 0$ в объеме, в который вытекает газ. В этом случае максимальная скорость равна

$$v_{\text{макс}} = \sqrt{2h_0} = c_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}. \quad (12.3.2)$$

Из вывода видно, что $v_{\text{макс}}$ – это **максимальная скорость** направленного движения, которая может быть получена при истечении газа из сосуда в вакуум. Характерно, что согласно определению скорости звука она зависит только от температуры газа в сосуде, но не зависит от давления в нем. При этом абсолютная температура вытекающего газа должна быть равна нулю.

Далее рассмотрим некоторую линию тока в потоке газа, перемещающегося по *сужающемуся насадку* (трубе). Из уравнения Бернулли для адиабатического движения следует, что при увеличении скорости вдоль линии тока температура газа уменьшается, а, следовательно, уменьшается и скорость звука. Может оказаться, что в какой-то точке рассматриваемой линии тока скорость движения газа станет равной скорости звука в этой точке. Скорость движения газа, равную *местной скорости звука*, называют

критической скоростью и обозначают как c_* . Критическая скорость может быть найдена из уравнения Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + h = const, \quad \frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{c_0^2}{\gamma - 1} + 0 = \frac{c_*^2}{2} + \frac{c_*^2}{\gamma - 1} = c_*^2 \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}.$$

Таким образом, критическая скорость равна:

$$c_* = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}. \quad (12.3.3)$$

Из (12.3.2, 3) видно, что как максимальная, так и критическая скорости определяются скоростью звука в неподвижном газе, и зависят лишь от температуры неподвижного газа T_0 .

12.3.2. Изменение плотности потока вдоль линии тока

Рассмотрим изменение плотности потока ρv вдоль линии тока. Поскольку при больших скоростях необходимо учитывать сжимаемость газа, то изменение плотности потока равно:

$$d(\rho v) = \rho dv + v d\rho, \quad \frac{d(\rho v)}{\rho v} = \frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho}. \quad (12.3.4)$$

Запишем уравнение Бернулли для линии тока при адиабатическом движении:

$$\frac{v^2}{2} + h = const, \quad v dv + dh = 0.$$

Ранее в разделе 2 (п. 7.1) было показано, что при адиабатическом движении энтропия сохраняется, и изменение энтальпии определяется только изменением давления, то есть $dh = V dP = dP / \rho$. Используя определение скорости звука $c^2 = (\partial P / \partial \rho)_s$, предыдущее уравнение Бернулли можно записать в дифференциальной форме:

$$v dv + dh = v dv + \frac{dP}{\rho} = v dv + c^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0, \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v^2}{c^2} \frac{dv}{v}.$$

После подстановки относительной плотности $\frac{d\rho}{\rho}$ в (12.3.4), получим:

$$\frac{d(\rho v)}{\rho v} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{dv}{v}, \quad \frac{d(\rho v)}{dv} = \rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \rho (1 - M^2). \quad (12.3.5)$$

Соотношение (12.3.5) определяет **изменение плотности потока с изменением скорости движения**. Отношение этих величин определяется значениями плотности ρ и числа Маха M . Знак отношения (12.3.5) определяется

знаком дифференциалов $d(\rho v)$ и dv , которые могут быть положительными и отрицательными.

Рассмотрим некоторую трубку тока. По определению во всех сечениях трубки тока расход постоянен:

$$\rho v s = \text{const}, \quad \rho v ds + s d(\rho v) = 0, \quad \frac{d(\rho v)}{\rho v} = -\frac{ds}{s}. \quad (12.3.6)$$

Из последнего соотношения видно, что изменение плотности потока противоположно изменению площади сечения трубки тока. Поэтому при дозвуковом течении $M < 1$ при увеличении скорости ($dv > 0$) растет и плотность потока ($d(\rho v) > 0$), а трубка тока сужается ($ds < 0$). При сверхзвуковом же движении ($M > 1$) при увеличении скорости ($dv > 0$) плотность потока уменьшается ($d(\rho v) < 0$), а, следовательно, трубка тока расширяется ($ds > 0$).

Таким образом, при **дозвуковом** движении для увеличения скорости движения газа вдоль трубки тока ее сечение должно уменьшаться, а плотность потока возрастает. При этом, как следует из уравнения Бернулли, температура газа вдоль трубки тока уменьшается, следовательно, уменьшается и местная скорость звука, также уменьшаются вдоль трубки тока плотность и давление:

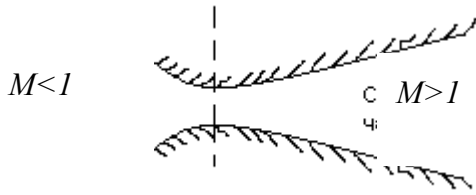
$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} + h &= \frac{v^2}{2} + C_p T = \text{const} = \frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} = \\ &= \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \text{const} \rho^{\gamma-1} = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \text{const} P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \end{aligned} \quad (12.3.7)$$

При **сверхзвуковом** движении для увеличения скорости газа вдоль трубки тока сечение трубки должно увеличиваться, а плотность потока уменьшаться. Так же как и в дозвуковом потоке уменьшаются температура, скорость звука, плотность и давление.

12.3.3. Сопло Лавалия

Из вышесказанного следует, что в сужающейся трубке тока не может быть достигнута сверхзвуковая скорость, может быть достигнута только критическая скорость. Скорость движения газа может стать сверхзвуковой только в расширяющейся трубке тока. Для разгона газа до звуковой скорости он должен двигаться в сужающейся трубке тока. При одномерном движении идеального газа в реальной трубе ее стенки можно рассматривать как боковую поверхность трубки тока. Труба, плавно переводящая дозвуковое движение газа в сверхзвуковое, имеет сужающуюся дозвуковую и расширяющуюся сверхзвуковую части (рис.12.1). Такую трубу называют **соплом Лавалия**. Очевидно, что в самом узком сечении сопла скорость газа будет равна

критической (местной в этом сечении) скорости звука. Нетрудно найти зависимость числа Маха от размера сечения сопла.



Разделим (12.3.5) на ρv и умножим на dv , используя (12.3.6), получим уравнение:

$$-\frac{ds}{s} = \frac{dv}{v}(1 - M^2), \quad M = \frac{v}{c},$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{dc}{c}. \quad (12.3.8)$$

Из уравнения Бернулли имеем:

$$v dv + \frac{2}{\gamma - 1} c dc = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{2}{\gamma - 1} \frac{c^2}{v^2} \frac{dc}{c} = -\frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{M^2} \frac{dc}{c}. \quad (12.3.9)$$

Подставляя (12.3.9) в (12.3.8), получим:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} \frac{1}{1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2}}. \quad -\frac{ds}{s} = \frac{(1 - M^2)dM}{M(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2)}. \quad (12.3.10)$$

После интегрирования (12.3.10) получаем:

$$\frac{s}{s_{\min}} = \frac{1}{M} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}. \quad (12.3.11)$$

Здесь s_{\min} - минимальное сечение сопла Лавая, в котором число Маха равно единице. Формула (12.3.11) дает связь между сечением сопла и числом Маха в этом сечении.

Выше приведен приближенный расчет сопла Лавая, в котором не учитывалась вязкость среды. При использовании формулы (12.3.11) для проведения оценочных расчетов значений чисел Маха в заданном сечении сопла следует иметь в виду следующее обстоятельство. В его конструкции не должно быть слишком резких изменений сечения в сверхзвуковой части, так как поток газа в противном случае может и не следовать за стенкой, а может за счет инерциальных сил оторваться от нее с образованием между стенкой и основным потоком газа некоторой застойной (турбулентной) зоны. Точный расчет сопла Лавая с учетом вязкости очень сложен и громоздкий, поэтому чаще конструкторы проводят оценочные расчеты методом проб и ошибок по указанной выше формуле.

12.4. ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ РЕЗЕРВУАРА ЧЕРЕЗ СУЖАЮЩИЙСЯ НАСАДОК

Рассмотрим истечение газа из некоторого большого резервуара через сужающийся насадок (рис. 12.2). Пусть параметры газа в сосуде при истечении остаются неизменными, а скорость газа в сосуде вдали от входного сечения равна нулю. Будем постепенно уменьшать давление газа на выходе из сопла, оставляя параметры в резервуаре постоянными и равными P_0, T_0, ρ_0 и c_0 . Очевидно, с уменьшением давления на выходе увеличивается скорость на срезе

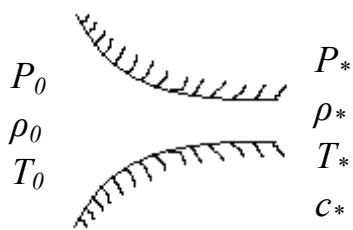


Рис. 12.2

сопла, причем она максимальная в самом узком сечении сопла, т.е. на его срезе. При некотором критическом давлении может быть достигнута скорость движения газа, равная местной критической скорости звука c^* . Для определения параметров газа на срезе сопла можно, обратив задачу, воспользоваться формулами (12.2.4)-(12.2.6), полученными для нахождения давления, плотности и температуры в критической точке на обтекаемом теле, т.е. в точке полного торможения потока. Следует различать параметры газа ρ_0, P_0, T_0 в критической точке на обтекаемом теле, в которой скорость газа равна нулю, и параметры ρ^*, P^*, T^* газа в той точке на линии тока, в которой скорость газа равна местной скорости звука. В прежних обозначениях - это параметры ρ_∞, P_∞ и T_∞ . При $M_* = 1$ параметры газа имеют соответствующие критические значения согласно (12.2.4,5):

$$P_* = P_\infty = P_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}, \quad \rho_* = \rho_\infty = \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}},$$

$$T_* = T_\infty = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-1}. \quad (12.4.1)$$

При дальнейшем уменьшении давления на выходе из сопла давление, плотность и температура газа на срезе сопла будут неизменными, зависящими только от давления, плотности и температуры газа в резервуаре. Скорость, равная критической скорости, будет зависеть только от температуры газа в резервуаре:

$$c_* = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{RT_0}{\mu}}. \quad (12.4.2)$$

Из формулы (12.4.1) следует, что давление P_* , плотность ρ_* и температура T_* в критическом сечении насадка определяются через их значения в покоящемся газе следующими соотношениями:

$$\frac{P_*}{P_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad \frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1}. \quad (12.4.3)$$

Например, для воздуха ($\gamma = 1,4$) отношения критических параметров к их значениям в покоящемся газе равны:

$$\frac{P_*}{P_0} = 0.53, \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = 0.63, \quad \frac{T_*}{T_0} = 0.83. \quad (12.4.4)$$

С физической точки зрения достижение значений критических параметров очевидно, так как после достижения на срезе сопла критической скорости, равной местной скорости звука, газ внутри резервуара и сопла **“не чувствует”** изменения параметров за соплом, так как *возмущения, распространяющиеся со скоростью звука, не могут проникнуть внутрь сопла*. При этом расход газа через сопло достигает своего максимального значения, которое не зависит от дальнейшего уменьшения противодавления на срезе сопла, и определяется только давлением покоящегося газа в резервуаре.

При помощи имеющихся в нашем распоряжении формул можно вычислить *объемный максимальный расход газа* через сопло:

$$Q_{V_{\max}} = c_* S_{\min} = S_{\min} c_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/2} = S_{\min} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{P_0}{\rho_0}} = S_{\min} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{RT_0}{\mu}}. \quad (12.4.5)$$

Максимальный массовый расход можно вычислить по формуле:

$$Q_{M_{\max}} = \rho_* c_* S_{\min} = \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} c_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/2} S_{\min} = S_{\min} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \sqrt{\gamma P_0 \rho_0}. \quad (12.4.6)$$

Можно получить формулу для скорости истечения газа из резервуара при промежуточных противодавлениях. Пользуясь уравнением Бернулли для адиабатического движения газа и прежними обозначениями, имеем:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \text{const} = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0}, \quad v^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{P}{P_0} \frac{\rho_0}{\rho} \right). \quad (12.4.7)$$

Из уравнения Пуассона для адиабатического течения имеем:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{const} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma}, \quad \left(\frac{P_0}{P} \right)^{1/\gamma} = \frac{\rho_0}{\rho}.$$

Подставляя отношение плотностей в предыдущее равенство, получим :

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} \left(1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)}. \quad (12.4.8)$$

Эту формулу называют *формулой Сен-Венана-Вентцеля*.

Из (12.4.8) видно, что при $P=P_0$ скорость истечения равна нулю, а при критическом перепаде давления $P=P_*$ из (12.4.8) следует:

$$v = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} = c_*,$$

т.е. скорость движения газа на срезе сопла равна критической скорости.

При $P=0$ скорость истечения равна:

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}} = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} = v_{\text{макс}}.$$

Значение скорости $v_{\text{макс}}$ получается за срезом сопла. Таким образом, максимальная скорость истечения может быть достигнута лишь при истечении в вакуум ($P=0$) при абсолютной температуре вытекающего газа, равной нулю.

Приведем указанные значения скоростей для воздуха ($\gamma=1.4$) при $T=300\text{K}$:

$$c_0 = 340\text{м/с}, \quad v_{\text{макс}} = 756\text{м/с}, \quad c_* = 310\text{м/с}.$$

Тот факт, что расход газа через сужающийся насадок не зависит от давления при его уменьшении ниже критического давления на срезе сопла (при $P < P_*$), используется в технике для стабилизации расхода газа в различных технологических и лабораторных устройствах. Сужающийся насадок чаще всего выполняется в виде тонкой диафрагмы с отверстием, который называют *звуковой диафрагмой*. Если давление воздуха за звуковой диафрагмой будет в 2 раза меньше давления перед диафрагмой, то дальнейшее уменьшение давления P_* за диафрагмой и его колебания не изменяют ни объемный, ни массовый расход газа через нее при постоянном давлении перед диафрагмой.

12.5. ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВА, УДАРНЫЕ ВОЛНЫ И СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ

12.5.1. Конус Маха

С физической точки зрения сверхзвуковое движение газа отличается от дозвукового характером распространения малых возмущений в потоке.

Рассмотрим, как распространяются в движущемся потоке газа малые возмущения. Предположим, что в некоторой точке дозвукового течения газа возникло возмущение плотности газа. Это возмущение сносится вниз по потоку и распространяется в движении с газом со скоростью звука во все стороны.

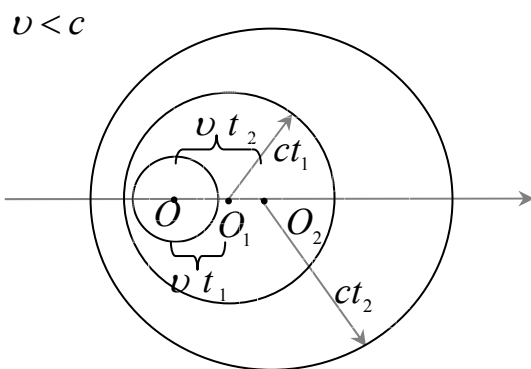


Рис.12.3а

Если газ однороден, то поверхность распространения возмущения одинаковой фазы представляет собой поверхность шара, расширяющегося со скоростью звука (рис. 12.3а). При этом возмущение при дозвуковом движении газа распространяется как вниз, так и вверх по потоку.

При сверхзвуковом движении газа возмущения, распространяющиеся со скоростью звука, не могут проникнуть в область течения вверх по потоку (рис. 12.3б), а сносятся потоком вниз по течению.

Поверхность, ограничивающая область возмущения сверхзвукового потока, представляет собой поверхность конуса, который называют **конусом Маха**. Если движение газа прямолинейное, а газ однороден, то конус Маха

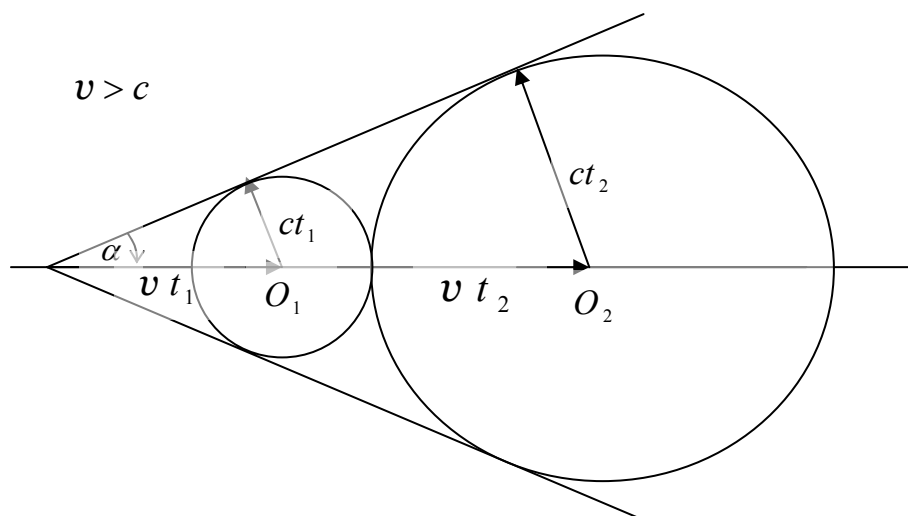


Рис.12.3 б

будет прямым круговым конусом. Из рисунка (12.3б) очевидно, что угол α конуса определяется соотношением:

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{M}. \quad (12.5.1)$$

Угол α называют *углом Маха*. Поверхность конуса Маха называют *характеристической поверхностью*, а линии пересечения ее с плоскостью, проходящей через ось конуса, называются *характеристиками*.

Из рассмотрения рисунков (12.3а, б) очевидно, что сверхзвуковой поток набегаёт на обтекаемое тело (являющееся, в частности, источником возмущения) "вслепую". Сверхзвуковой поток "не предчувствует" обтекаемое тело. В дозвуковом потоке влияние тела сказывается вверх по течению, т.е. дозвуковой поток "чувствует" обтекаемое тело значительно раньше, чем его достигнет.

12.5.2. Поверхности разрыва. Законы сохранения

До сих пор изучалось движение среды, при котором скорости и термодинамические параметры изменялись непрерывно, т.е. они были непрерывными функциями координат и времени.

Однако в действительности имеют место такие движения, при которых термодинамические параметры и скорости могут претерпевать разрыв непрерывности. Разрыв непрерывности скоростей и термодинамических параметров происходит на некоторых поверхностях, на которых они претерпевают скачок. Эти поверхности называют *поверхностями разрыва*.

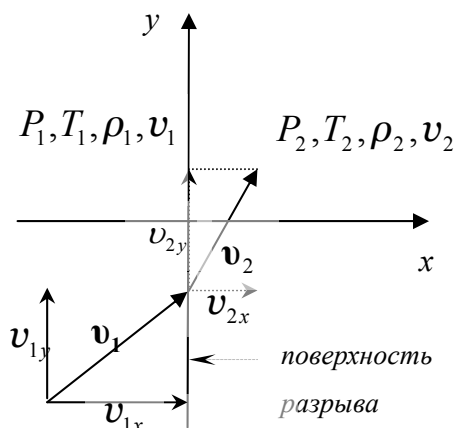


Рис. 12.4

При нестационарных движениях поверхности разрыва сами могут двигаться относительно тела, возмущающего покоящуюся среду, однако скорость их движения не имеет ничего общего со скоростью движения частиц газа, которые могут при своем движении пересекать поверхности разрыва.

Поверхности разрыва, которые перемещаются относительно обтекаемого тела, называют *ударными волнами*. Поверхности разрыва, которые неподвижны относительно обтекаемого тела, называют *скачками уплотнения*.

Рассмотрим малый участок поверхности разрыва, который можно считать плоским, и свяжем с ним оси координат. В этой системе координат

поверхность разрыва покоится. Направим ось x по нормали к рассматриваемому участку поверхности разрыва (рис. 12.4).

Из физических соображений следует, что на поверхности разрыва должны соблюдаться определенные граничные условия, т.е. должны выполняться законы сохранения:

1. На поверхности разрыва должен выполняться **закон сохранения массы**, т.е. плотность потока вещества должна быть непрерывна:

$$\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x}. \quad (12.5.2)$$

2. На поверхности разрыва должен выполняться **закон сохранения энергии**, т.е. плотность потока энергии должна быть непрерывна. В разделе 1 было показано, что плотность потока энергии определяется вектором Умова-Пойтинга (6.8.9), который для ньютоновской среды ($\mu = 0$) равен:

$$I_k = \rho v_k \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon_{en} + \varepsilon_{nom} \right) + q_k - v_i \Sigma_{ik}, \quad \Sigma_{ik} = \sigma_{ik} + \tilde{\sigma}_{ik} = -P\delta_{ik} + \tilde{\sigma}_{ik}.$$

Так как рассматривается сверхзвуковое движение газа, то можно считать газ идеальным. Пренебрегая потенциальной энергией и учитывая, что для идеальной среды коэффициенты теплопроводности, динамической и объемной вязкости равны нулю ($\lambda = \eta = \zeta = 0$), а, следовательно, плотность потока тепла и тензор вязких напряжений также равны нулю ($q_k = 0, \sigma_{ik} = 0$), получим:

$$I_k = \rho v_k \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon_{en} + PV \right) = \rho v_k \left(\frac{v^2}{2} + h \right).$$

Непрерывность потока энергии на поверхности разрыва приводит к следующему соотношению:

$$\rho_1 v_{1x} \left(\frac{v_1^2}{2} + h_1 \right) = \rho_2 v_{2x} \left(\frac{v_2^2}{2} + h_2 \right). \quad (12.5.3)$$

Соотношение (12.5.3) с учетом равенства (12.5.2) дает:

$$\frac{v_1^2}{2} + h_1 = \frac{v_2^2}{2} + h_2, \quad (12.5.4)$$

т.е. на поверхности разрыва выполняется уравнение Бернулли для изоэнтропического движения.

3. На поверхности разрыва должен выполняться **закон сохранения количества движения**, т.е. плотность потока импульса должна быть непрерывна. Это означает, что плотность потока импульса с обеих сторон поверхности разрыва должна быть одинакова; в противном случае на поверхность разрыва будет действовать некоторая сила, которая должна вызвать

движение этой поверхности в выбранной системе координат. Плотность потока импульса и условие для него на поверхности разрыва имеют вид:

$$P_{ik} = \rho v_i v_k - \sum_{ik} , \quad [P\delta_{ik} + \rho v_i v_k]_1 = [P\delta_{ik} + \rho v_i v_k]_2 .$$

Равенство плотностей потока в направлении оси x приводит к соотношению ($i=k=x$):

$$P_1 + \rho_1 v_{1x}^2 = P_2 + \rho_2 v_{2x}^2 . \quad (12.5.5)$$

Равенство плотностей потоков импульсов в направлении осей y и z дает следующие равенства:

$$i = x, \quad k = y, \quad \rho_1 v_{1x} v_{1y} = \rho_2 v_{2x} v_{2y}, \quad i = x, \quad k = z, \quad \rho_1 v_{1x} v_{1z} = \rho_2 v_{2x} v_{2z} . \quad (12.5.6)$$

Последние два соотношения с учетом [\(12.5.2\)](#) дают:

$$v_{1y} = v_{2y}, \quad v_{1z} = v_{2z} \quad (12.5.7)$$

Соотношения [\(12.5.7\)](#) свидетельствуют о том, что на поверхности разрыва должны быть непрерывны касательные к ней скорости движения газа.

12.6. ПРЯМАЯ УДАРНАЯ ВОЛНА В СЖИМАЕМОМ ГАЗЕ

12.6.1. Ударная адиабата (адиабата Гюгоньо)

Рассмотрим движение газа, при котором линии тока перпендикулярны поверхности разрыва. Поверхность разрыва называют *прямой ударной волной*, если она перемещается по отношению к обтекаемому телу, а линии тока перпендикулярны к ней. Если же поверхность разрыва неподвижна по отношению к обтекаемому телу, то её называют *прямым скачком уплотнения*.

Из (12.5.2,4,5) следует, что в прямой ударной волне или прямом скачке уплотнения скорости газа и термодинамические параметры должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x}, \quad \frac{v_1^2}{2} + h_1 = \frac{v_2^2}{2} + h_2, \quad P_1 + \rho_1 v_{1x}^2 = P_2 + \rho_2 v_{2x}^2. \quad (12.6.1)$$

По определению прямой ударной волны $v_{1y} = v_{1z} = 0$. Равенство (12.5.7) свидетельствует о том, что и $v_{2y} = v_{2z} = 0$. Следовательно, если линия тока до прямой ударной волны перпендикулярна поверхности разрыва, то она останется перпендикулярной и после нее, т.е. *линия тока при прохождении прямой ударной волны не испытывает излома*. Поэтому в равенствах (12.6.1) $v_{1x} \equiv v_1$, а $v_{2x} \equiv v_2$ и их можно записать в окончательном виде:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}, \quad P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2. \quad (12.6.2)$$

Установим соотношение между термодинамическими параметрами и скоростями в прямой ударной волне. Введем следующие обозначения:

$$\rho_1 v_1 = J_1, \quad \rho_2 v_2 = J_2, \quad V_i = \frac{1}{\rho_i}, \quad v_1 = J_1 V_1, \quad v_2 = J_2 V_2.$$

Из первого уравнения (12.6.2) имеем:

$$J_1 = J_2 = J.$$

Воспользуемся третьим уравнением системы (12.6.2), умножив и разделив вторые слагаемые в нем на ρ_1 и ρ_2 , соответственно. Используя определение плотности потока массы J_1 , можно записать:

$$P_1 + J^2 V_1 = P_2 + J^2 V_2, \quad P_2 - P_1 = J^2 (V_1 - V_2), \quad J^2 = \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}. \quad (12.6.3)$$

Из второго уравнения (12.6.2) следует:

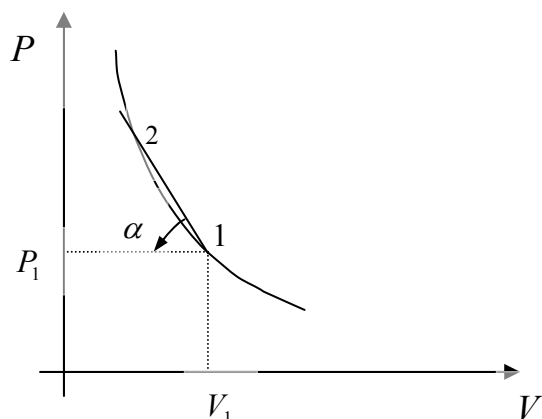


Рис.12.5

Данное уравнение называют **уравнением ударной адиабаты** или **уравнением адиабаты Гюгоньо**. Это уравнение при известных термодинамических параметрах набегающего потока P_1 и V_1 определяет зависимость $P_2 = f(V_2)$ за прямой ударной волной, представленную на [рис. 12.5](#). Угол между прямой, соединяющей точки 1 (P_1, V_1) и 2 (P_2, V_2), и осью V на рис. 12.5 определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2} = J^2. \quad (12.6.6)$$

12.6.2. Связь между скоростями и термодинамическими параметрами в прямой ударной волне

Найдем связь между скоростями и термодинамическими параметрами в прямой ударной волне в сверхзвуковом потоке сжимаемого идеального газа. Если разделить уравнение ударной адиабаты [\(12.6.5\)](#) на P_1 и V_1 , то, можно

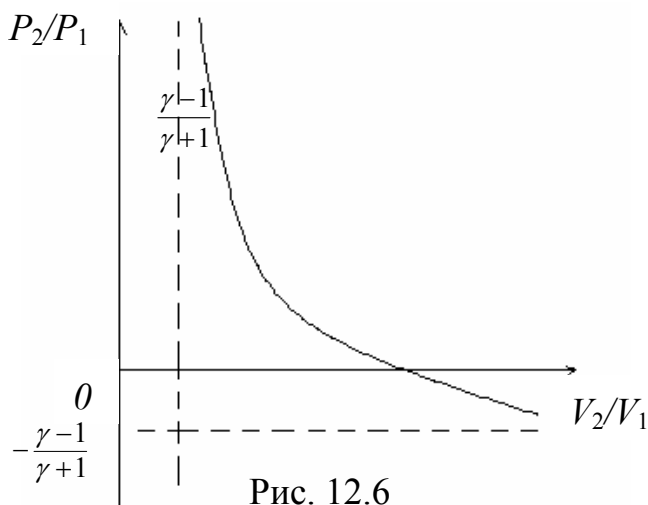


Рис. 12.6

определить связь удельных объемов и давлений в прямой ударной волне.

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{-(\gamma + 1) + (\gamma - 1) \frac{V_2}{V_1}}{(\gamma - 1) - (\gamma + 1) \frac{V_2}{V_1}}, \quad (12.6.7)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma + 1) + (\gamma - 1) \frac{P_2}{P_1}}{(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{P_2}{P_1}}.$$

Как видно из (12.6.7), функция $P_2/P_1 = f(V_2/V_1)$ является равнобочной гиперболой с асимптотами (см. рис. 12.6):

$$\frac{V_2}{V_1} \rightarrow \infty, \quad \frac{P_2}{P_1} \rightarrow -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \frac{P_2}{P_1} \rightarrow \infty, \quad \frac{V_2}{V_1} \rightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \quad (12.6.8)$$

Из уравнения состояния идеального газа следует:

$$P_1 V_1 = \frac{R}{\mu} T_1, \quad P_2 V_2 = \frac{R}{\mu} T_2, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{(\gamma+1) + (\gamma-1) \frac{P_2}{P_1}}{(\gamma-1) + (\gamma+1) \frac{P_2}{P_1}}. \quad (12.6.9)$$

Предельное отношение температур при $\frac{P_2}{P_1} \rightarrow \infty$ и $\frac{V_2}{V_1} \rightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ равно:

$$\frac{T_2}{T_1} \rightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{P_2}{P_1}. \quad (12.6.9a)$$

Таким образом, при очень большом скачке давления скачок температуры в ударной волне может быть сколь угодно большим. Однако отношение плотностей стремится к некоторому постоянному пределу, определяемому соотношением (см. 12.6.8):

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \rightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \rho_2 \rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_1. \quad (12.6.10)$$

Для воздуха ($\gamma=1.4$) предельное значение плотности за прямой ударной волной при $P_2/P_1 \rightarrow \infty$ равно $\rho_2 \rightarrow 6\rho_1$.

Для скоростей можно получить следующие соотношения из первого граничного условия (12.5.2) на поверхности разрыва:

$$v_1^2 = J_1^2 V_1^2 = V_1^2 \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2} = V_1^2 \frac{P_1 \left(-1 + \frac{P_2}{P_1} \right)}{V_1 \left(-\frac{V_2}{V_1} + 1 \right)}.$$

Если в этом определении использовать замену V_2/V_1 согласно (12.5.2), то

$$v_1^2 = V_1 P_1 \frac{\gamma-1 + \frac{P_2}{P_1}(\gamma+1)}{2} = \frac{c_1^2}{2\gamma} \left[(\gamma-1) + \frac{P_2}{P_1}(\gamma+1) \right]. \quad (12.6.11)$$

Аналогичное выражение можно получить для v_2 :

$$v_2^2 = v_1^2 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 = \frac{c_1^2}{2\gamma} \frac{\left[\gamma + 1 + \frac{P_2}{P} (\gamma - 1) \right]^2}{\left[(\gamma - 1) + \frac{P_2}{P_1} (\gamma + 1) \right]} . \quad (12.6.12)$$

Используя определение плотностей потоков массы и (12.6.3), для разности скоростей получим соотношение:

$$v_1 - v_2 = \sqrt{P_1 V_1 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right)} = c_1 \sqrt{\frac{2 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right)^2}{\gamma \left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{P_2}{P_1} \right]}} . \quad (12.6.13)$$

В соответствии с (12.1.6) и (12.6.2) имеем:

$$\frac{v^2}{2} + h = const, \quad h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} PV = \frac{c^2}{\gamma - 1} .$$

Тогда критические скорости до и после ударной волны можно определить следующим образом:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{\gamma - 1} = \frac{c_{1*}^2}{2} + \frac{c_{1*}^2}{\gamma - 1} = c_{1*}^2 \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{c_2^2}{\gamma - 1} = \frac{c_{2*}^2}{2} + \frac{c_{2*}^2}{\gamma - 1} = c_{2*}^2 \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} .$$

Из данного соотношения следует, что

$$c_{1*} = c_{2*} = c_* = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} . \quad (12.6.14)$$

Для изоэнтропического движения согласно уравнению Бернулли для произвольных точек и точек полного торможения потока на линии тока можно записать равенство:

$$\frac{v_1^2}{2} + c_p T_1 = c_p T_{10} = \frac{v_2^2}{2} + c_p T_2 = c_p T_{20} .$$

Из этого равенства следует, что температура торможения в прямой ударной волне сохраняется, т.е.

$$T_{10} = T_{20}, \quad (12.6.15)$$

Пользуясь вышеприведенными формулами можно доказать следующее соотношение:

$$v_1 v_2 = c_*^2. \quad (12.6.16)$$

Интересующие нас соотношения можно выразить через число Маха. Так из формулы (12.6.12) можно получить следующее соотношение для давлений:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (12.6.17)$$

В свою очередь M_2 можно выразить через M_1 , пользуясь формулами (12.6.12), (12.6.13) и (12.6.17):

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2M_1^2\gamma - (\gamma - 1)}, \quad (12.6.18)$$

Отношение скоростей из (12.6.12, 13, 17) определяется по формуле:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2M_1^2\gamma - (\gamma - 1)}, \quad (12.6.19)$$

Наконец, пользуясь формулой (12.6.16), из последнего соотношения имеем:

$$M_{1*} = \frac{v_1}{c_*}, \quad M_{1*}^2 = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}, \quad M_{2*} = \frac{v_2}{c_*}, \quad M_{2*} = \frac{v_2}{v_1} M_{1*}. \quad (12.6.20)$$

12.7. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ СЛАБОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

12.7.1. Изменение термодинамических параметров и скоростей в прямой ударной волне

Для определения направления изменения термодинамических параметров и скоростей в ударной волне рассмотрим ударные волны слабой интенсивности, т.е. будем полагать, что, например, изменение давления в ударной волне незначительно:

$$(P_2 - P_1)/P_1 \ll 1.$$

Из законов сохранения в прямой ударной волне следует, что при прохождении газа через нее, изменяются скорость и давление, а, следовательно, изменяется и энтропия идеального газа. Будем предполагать, что за счет изменения давления и энтропии изменяются энтальпия и удельный объем при прохождении газом прямой ударной волны, т.е.

$$h = h(P, S), \quad V = V(P, S).$$

Представим энтальпию h_2 после ударной волны в виде ряда Неймана около ее значения h_1 перед ударной волной (в состоянии 1):

$$\begin{aligned} h_2 = h_1 + \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_{S_1} (P_2 - P_1) + \left(\frac{\partial h}{\partial S}\right)_{P_1} (S_2 - S_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial P^2}\right)_{S_1} (P_2 - P_1)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\right)_{P_1} (S_2 - S_1)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial P^3}\right)_{S_1} (P_2 - P_1)^3 + \dots \end{aligned} \quad (12.7.1)$$

Ограничимся в ряду (12.7.1) слагаемыми третьего порядка малости по $(P_2 - P_1)$, и в последующих выражениях будем пренебрегать слагаемыми, пропорциональными $(S_2 - S_1)^2$ и $(S_2 - S_1)(P_2 - P_1)$. Аналогично удельный объем после прямой ударной волны представим в виде ряда:

$$V_2 = V_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S_1} (P_2 - P_1) + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P_1} (S_2 - S_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_{S_1} (P_2 - P_1)^2 + \dots \quad (12.7.2)$$

Вспомним следующие термодинамические соотношения:

$$\begin{aligned} dh = TdS + VdP, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_{S_1} = V_1, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial S}\right)_{P_1} = T_1, \\ \left(\frac{\partial^2 h}{\partial P^2}\right)_{S_1} = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S_1}, \quad \left(\frac{\partial^3 h}{\partial P^3}\right)_{S_1} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_{S_1}. \end{aligned} \quad (12.7.3)$$

Подставляя (12.7.1,2) в уравнение ударной адиабаты (12.6.5), и используя (12.7.3), получим:

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{12T_1} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2} \right)_{S_1} (P_2 - P_1)^3. \quad (12.7.4)$$

Из (12.7.4) следует, что скачок энтропии в ударной волне является величиной третьего порядка малости по отношению к скачку давления. Соотношение (12.7.4) замечательно тем, что оно указывает на изменение энтропии в ударной волне в идеальном газе, лишенном трения и теплопроводности. Следовательно, *ударные волны являются еще одним механизмом (наряду с трением и теплопроводностью) возрастания энтропии в движущихся идеальных сжимаемых газах.*

Во всех известных случаях производная $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2} \right)_{S_1}$ положительна, и для идеального газа при изоэнтропическом движении, описываемом уравнением Пуассона, она равна

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2} \right)_{S_1} = \frac{\gamma + 1}{P_1^2 \rho_1 \gamma^2}.$$

Поскольку энтропия может лишь возрасть ($S_2 > S_1$), то поэтому из соотношения (12.7.4) следует:

$$P_2 > P_1.$$

Из определения $J^2 = \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}$ можно сделать вывод, что:

$$V_1 > V_2, \quad \rho_2 > \rho_1.$$

Из граничных условий $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ можно заключить:

$$v_2 < v_1.$$

Из уравнения ударной адиабаты (12.6.5) или уравнения Бернулли (второе уравнение в 12.6.2) можно прийти к следующему выводу:

$$h_2 > h_1, \quad c_p T_2 > c_p T_1, \quad T_2 > T_1.$$

Поскольку скорость звука зависит только от температуры, то имеем:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad c_2 > c_1.$$

Из определения скорости звука следует:

$$c_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S_1}} = \sqrt{-V_1^2 \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{S_1}}, \quad c_2 = \sqrt{-V_2^2 \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{S_2}}. \quad (12.7.5)$$

Скорости движения газа в ударной волне могут быть определены из равенства плотностей потока на поверхности разрыва (12.6.2), (12.6.3) и (12.6.6):

$$v_1 = JV_1 = \sqrt{V_1^2 \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}} = \sqrt{V_1^2 \operatorname{tg} \alpha}, \quad v_2 = \sqrt{V_2^2 \operatorname{tg} \alpha}. \quad (12.7.6)$$

На графике ударной адиабаты $P_2 = f(V_2)$ (рис. 12.5) видно, что производная $(\partial P / \partial V)_S$ в точках (P_1, V_1) и (P_2, V_2) различны. Из сравнения (12.7.5) и (12.7.6) приходим к заключению:

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{S_1} < \operatorname{tg} \alpha, \quad -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{S_2} > \operatorname{tg} \alpha, \quad v_1 > c_1, \quad M_1 > 1, \quad v_2 < c_2, \quad M_2 < 1. \quad (12.7.7)$$

Как видно из (12.7.7), для образования ударная волна необходимо, чтобы газ до ударной волны двигался со сверхзвуковой скоростью. Следовательно, в газе, прошедшем прямую ударную волну, не могут существовать новые ударные волны.

Таким образом, в прямой ударной волне выполняются следующие неравенства для скоростей и термодинамических параметров:

$$S_2 > S_1, \quad P_2 > P_1, \quad V_2 < V_1, \quad \rho_2 > \rho_1, \quad T_2 > T_1, \quad c_2 > c_1, \quad v_2 < v_1, \quad v_1 > c_1, \quad v_2 < c_2, \\ c_{1*} = c_{2*}, \quad T_{10} = T_{20}.$$

В газе, прошедшем прямую ударную волну, **возрастают** энтропия, давление, плотность и температура, **уменьшаются** лишь удельный объем и скорость движения газа, становясь дозвуковой.

До сих пор рассматривали неподвижную прямую ударную волну или скачок уплотнения. Если на рассматриваемое движение наложить скорость v_1 , направленную справа налево (рис. 12.6), то газ в области 1 окажется неподвижным относительно наблюдателя, а ударная волна будет двигаться справа налево со скоростью v_1 , за ударной волной в области 2 газ будет двигаться справа налево со скоростью $v_1 - v_2 = v_{СП}$ - **скоростью спутного потока**. Из формулы (12.6.11) следует, что скорость движения плоской ударной волны тем больше, чем интенсивнее волна, т.е. чем больше отношение давлений P_2 / P_1 .

12.7.2. Образование ударных волн

Образование прямой ударной волны с физической точки зрения можно понять, рассматривая следующий опыт. Пусть имеется некоторая бесконечная труба с газом, на одном конце которой расположен подвижный поршень ([рис. 12.7](#)). Пусть в некоторый момент времени поршень внезапно начинает двигаться с некоторой скоростью, а дальше продолжает двигаться со скоростью *спутного* потока. Тогда в первоначальный момент времени перед поршнем образуется уплотнение газа. Примерный график изменения плотности в трубе в этот момент изображен на [рис. 12.7](#).

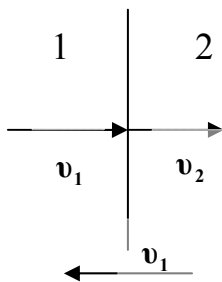


Рис. 12.6

Разделим этот уплотненный участок газа на тонкие элементарные слои. Поскольку более интенсивное уплотнение распространяется в газе с большей скоростью, то в процессе движения более плотные задние слои будут догонять менее плотные передние слои, и в последующий момент t_1 график $\rho - \rho_0 = f(x)$ будет иметь более крутой вид. При дальнейшем движении крутизна увеличивается, и в конце концов возникнет разрыв, имеющий очень малую толщину идвигающийся слева направо со скоростью v_1 , т.е. возникнет ударная волна. За ударной волной газ будет двигаться со скоростью спутного потока $v_{cn} = v_1 - v_2$. Таким образом, ударные волны являются самоформирующимися образованиями в газе. Не очень резко ограниченное уплотнение в газе по мере движения автоматически переходит в резко ограниченную ударную волну. Очевидно, что толщина поверхности разрыва

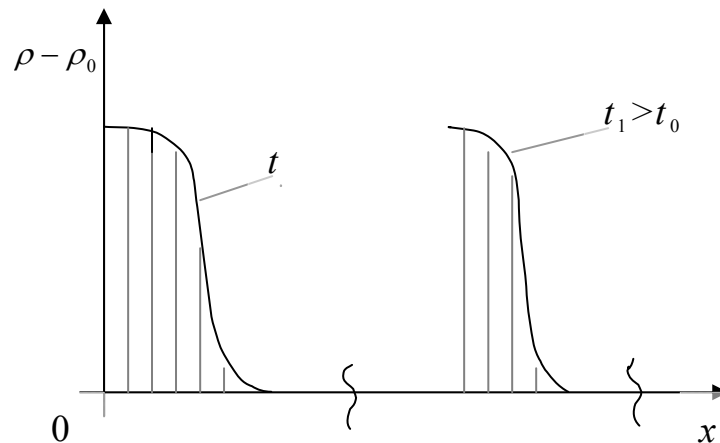
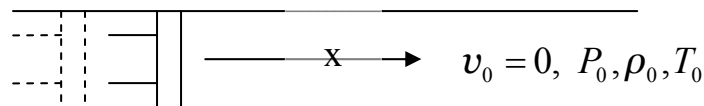


Рис. 12.7

термодинамических параметров и скоростей в прямой ударной волне должна быть порядка нескольких длин свободного пробега молекул газа. При последующем движении ударной волны в реальном газе ударная волна “размывается” и исчезает вследствие диссипации её кинетической энергии в окружающее пространство за счет вязких сил.

Если поршень резко сместить влево, то в начальный момент времени перед ним возникнет разрежение. Это разрежение будет в дальнейшем распространяться вправо. Однако те же рассуждения показывают, что в этом случае не происходит самоформирования резкого перехода между невозмущенным газом и областью разрежения. Наоборот, более или менее резкое возмущение - разрежение газа в начале движения поршня при дальнейшем движении “расползается”, занимая постепенно все большую и большую область пространства трубы. Это значит, что *ударные волны разрежения*, т.е. резкие переходы, при которых в газе после их прохождения давление уменьшается, существовать не могут. То же самое можно показать, пользуясь уравнением ударной адиабаты (12.6.5). Точки ударной адиабаты (рис. 12.5) правее точки (P_1, V_1) , которые соответствовали бы ударной волне разрежения ($P_2 < P_1$) нереальны, т.к. они соответствуют такому процессу, при котором энтропия бы уменьшалась (см. (12.7.4)).

12.7.3. Численный пример

Рассмотрим численный пример. Оценим параметры ударной волны, образующейся при взрыве атомной бомбы. При взрыве атомной бомбы образуется сферическая или полусферическая ударная волна. Вдали от эпицентра взрыва участок сферической ударной волны можно приближенно рассматривать как плоский и для расчетов пользоваться полученными выше формулами для плоской ударной волны. *Интенсивность* волны характеризуют отношением давлений P_2/P_1 . Эксперимент показывает, что при взрыве мегатонной бомбы на расстоянии 2,5-5 километров от эпицентра взрыва $P_2/P_1 \approx 2$. Скорость звука в неподвижном воздухе ($\gamma = 1$) при нормальных условиях равна $c_1 = 340$ м/сек.

Вычислим скорость движения ударной волны v_1 . Из формулы (12.6.11) имеем:

$$v_1 = c_1 \sqrt{\frac{1}{2\gamma} \left[(\gamma - 1) + \frac{P_2}{P_1} (\gamma + 1) \right]} \approx c_1 \sqrt{\frac{0,4 + 4,8}{2,8}} = c_1 \sqrt{\frac{5,2}{2,8}} \approx 1,35c_1.$$

Таким образом, скорость распространения ударной волны в полтора раза больше, чем скорость звука в неподвижном газе. Поэтому наблюдатель

сначала обнаружит ударную волну, а уж затем услышит звук взрыва. Причем, скорость распространения ударной волны тем больше, чем больше ее интенсивность, т.е. чем больше отношение $\frac{P_2}{P_1}$.

Найдем скорость v_2 , необходимую для вычисления скорости спутного движения воздуха за ударной волной. Согласно (12.6.12) имеем:

$$v_2 = c_1 \frac{(\gamma + 1) + \frac{P_2}{P_1}(\gamma - 1)}{\sqrt{2\gamma \left[(\gamma - 1) + \frac{P_2}{P_1}(\gamma + 1) \right]}} = c_1 \frac{2,4 + 0,8}{\sqrt{2,8(0,4 + 4,8)}} = 0,84c_1.$$

Скорость спутного потока газа за ударной волной равна:

$$v_{cn} = v_1 - v_2 = (1,35 - 0,84)c_1 \approx 0,5c_1 = 170 \text{ м/с}.$$

Таким образом, воздух за ударной волной движется с ураганной скоростью, производя большие разрушения. Найдем температуру воздуха за ударной волной, если температура неподвижного воздуха $T_1 = 300 \text{ К}$. То согласно (12.6.9) с использованием уравнения непрерывности на границе раздела можно получить:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{v_1}{v_2} \approx 2 \frac{0,84}{1,35} = 1,244, \quad T_2 = 1,244T_1 = 1,244 \cdot 300 = 373 \text{ К}$$

Таким образом, объекты, подвергающиеся воздействию ударной волны, не только испытывают резкий, воспринимаемый как удар, перепад давления при ее прохождении ($P_2/P_1 = 2$), но также могут разрушиться и даже при больших (P_1/P_2) возгораться под воздействием горячего ($\sim 100^\circ \text{С}$) ураганного ветра ($\sim 170 \text{ м/с}$), создаваемого спутным потоком, движущимся вслед за ударной волной. Вблизи эпицентра взрыва к тепловому воздействию ударной волны добавляется еще тепловое излучение от вспышки.

Разбегающийся с большой скоростью от эпицентра взрыва воздух создает около него область очень низкого давления. Поэтому спустя некоторое время после прохождения ударной волны воздух устремляется по поверхности Земли обратно к эпицентру, неся с собой много пыли. Этот запыленный нагретый воздух, устремляясь вверх, и создает тот “гриб”, который характерен для наземных ядерных взрывов.

12.8. КОСАЯ УДАРНАЯ ВОЛНА

12.8.1. Уравнение ударной поляры

Рассмотрим общий случай, когда линии тока в набегающем потоке не перпендикулярны ударной волне (рис. 12.8).

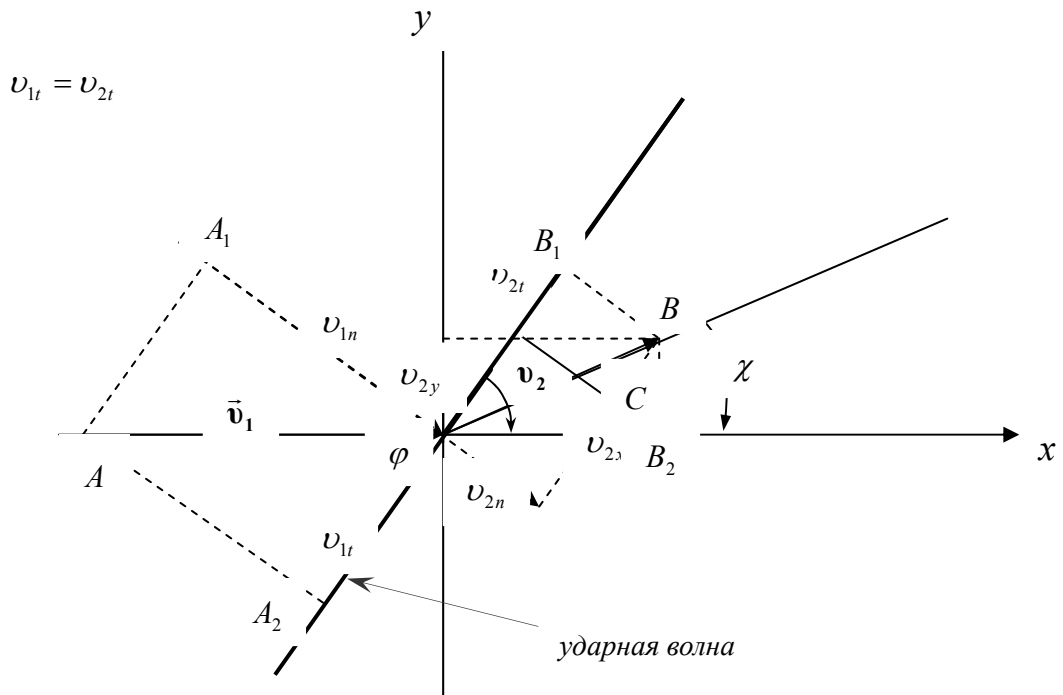


Рис. 12.8

Такую волну называют *косой ударной волной*. Направим ось x по линии тока в набегающем потоке. Разложим скорость набегающего потока на перпендикулярную и касательную к ударной волне компоненты скорости.

Так как тангенциальная компонента скорости движения газа в ударной волне непрерывна, а нормальная компонента после прохождения ударной волны (прямая ударная волна) уменьшается, то, следовательно, линия тока после прохождения косой ударной волны поворачивает, приближаясь к ударной волне. Очевидно, для нормальных компонент скорости справедливы все те соотношения, которые мы ввели для прямой ударной волны. Обозначим угол между осью x и косой ударной волной через φ , а угол поворота через χ . Тогда из условия непрерывности тангенциальной компоненты скорости имеем:

$$v_{1t} = v_{2t}, \quad v_1 \cos \varphi = v_{2x} \cos \varphi + v_{2y} \sin \varphi, \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{v_{2y}}{v_1 - v_{2x}}. \quad (12.8.1)$$

По аналогии с прямой ударной волной согласно (12.6.19) для отношения нормальных компонент скоростей можно записать:

$$\frac{v_{2n}}{v_{1n}} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_{1n}^2}{(\gamma + 1)M_{1n}^2}, \quad M_{1n} = \frac{v_{1n}}{c_1}. \quad (12.8.2)$$

$$v_{1n} = v_1 \sin \varphi, \quad v_{2n} = v_{2x} \sin \varphi - v_{2y} \cos \varphi.$$

Из соотношений (12.8.2) имеем:

$$\frac{v_{2x} \sin \varphi - v_{2y} \cos \varphi}{v_1 \sin \varphi} = \frac{2c_1^2}{(\gamma + 1)v_1^2 \sin^2 \varphi} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{1 + \text{ctg}^2 \varphi}. \quad (12.8.3)$$

Последнее соотношение можно записать в следующем виде:

$$\text{ctg}^2 \varphi = \frac{-\frac{2c_1^2}{(\gamma + 1)v_1^2} + \frac{v_{2x}}{v_1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}{\frac{2}{\gamma + 1} \frac{c_1^2}{v_1^2} + \frac{v_1 - v_{2x}}{v_1}}. \quad (12.8.4)$$

Если умножить числитель и знаменатель (12.8.4) на v_1 , а также вычесть и прибавить в числителе v_1 , получим следующую формулу:

$$\text{ctg}^2 \varphi = \left(\frac{v_{2y}}{v_1 - v_{2x}} \right)^2 = \frac{\frac{2}{\gamma + 1} \left(v_1 - \frac{c_1^2}{v_1} \right) - (v_1 - v_{2x})}{v_1 - v_{2x} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{c_1^2}{v_1}}. \quad (12.8.5)$$

Таким образом, окончательно имеем следующее уравнение:

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \cdot \frac{\frac{2}{\gamma + 1} \left(v_1 - \frac{c_1^2}{v_1} \right) - (v_1 - v_{2x})}{v_1 - v_{2x} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{c_1^2}{v_1}}. \quad (12.8.6)$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{\gamma - 1} = \frac{c_*^2}{2} + \frac{c_*^2}{\gamma - 1} = c_*^2 \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}, \quad c_1^2 = c_*^2 \frac{\gamma + 1}{2} - v_1^2 \frac{\gamma - 1}{2}. \quad (12.8.7)$$

После подстановки (12.8.7) в (12.8.6) получим:

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_1 v_{2x} - c_*^2}{c_*^2 - v_{2x} v_1 + \frac{2}{\gamma + 1} v_1^2}. \quad (12.8.8)$$

соответствовали бы условиям в ударной волне, при которых $v_2 > v_1$, что невозможно. Проведем прямую через точки B и C и опустим из точки C перпендикуляр на ось v_{2x} . Обозначим угол BCC_1 через β , тогда из [рис. 12.9](#), согласно [\(12.4\)](#), следует:

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{v_{2y}}{v_1 - v_{2x}} = \operatorname{ctg} \varphi, \quad \beta = \varphi.$$

Следовательно, угол β равен углу наклона кривой ударной волны к скорости набегающего потока. Далее из [рис. 12.9](#) следует:

$$OD = v_1 \cos \varphi = v_{1r} = v_{2r}, \quad BD = v_1 \sin \varphi = v_{1n}, \quad DC = v_2 \sin(\varphi - \chi) = v_{2n}.$$

12.8.2. Максимальный угол поворота потока

При увеличении числа M_1 за счет увеличения скорости набегающего потока v_1 , точка B передвигается вправо, а точка A влево, т.к. $v_1 v_2 = c_*^2$. Поэтому ударные поляры для меньших M_1 располагаются внутри ударных поляр, построенных для больших M_1 . Найдем уравнение ударной поляры при $M_1 \rightarrow \infty$. При этом "критическое" число Маха имеет следующее предельное значение согласно [\(12.5\)](#):

$$M_{1*}^2 = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \Big|_{M_1 \rightarrow \infty} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = \left(\frac{v_1}{c_*} \right)_{M_1 \rightarrow \infty}^2, \quad v_1^2 = c_*^2 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = v_{1\max}^2, \quad (12.8.9)$$

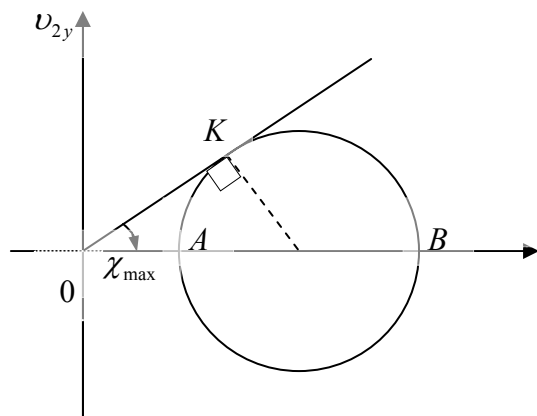


Рис. 12.10

Подставляя полученные предельные значения v_1 в уравнение ударной поляры [\(12.8.8\)](#), получим:

$$v_{2y}^2 = \left(c_* \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} - v_{2x} \right) \left(v_{2x} - c_* \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \right) \quad (12.8.10)$$

Уравнение [\(12.8.10\)](#) представляет собой уравнение окружности

[\(рис. 12.10\)](#) радиусом R , равным:

$$R = \frac{1}{2}(OB - OA) = \frac{1}{2}((v_{2x})_B - (v_{2x})_A) = \frac{1}{2}c_* \left(\sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} - \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \right).$$

Т.е. при $M_1 \rightarrow \infty$ *строфоида вырождается в окружность*. Окружность пересекает ось v_{2x} в точках A и B , имеющих координаты соответственно:

$$(v_{2x})_A = c_* \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = OA, \quad (v_{2x})_B = c_* \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = OB.$$

Касательная, проведенная к окружности из начала координат, имеет угол с осью v_{2x} , определяемый соотношением:

$$\sin(\angle BOK) = \frac{R}{R+OA} = \frac{1}{\gamma}.$$

По определению, угол BOK является *максимально возможным углом поворота потока* χ_{\max} в косо́й ударной волне, достигаемый только при бесконечном числе Маха в набегающем потоке. Для воздуха $\gamma = 1,4002$, тогда:

$$\sin \chi_{\max} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{1,4002}, \quad \chi_{\max} = 45^\circ. \quad (12.8.11)$$

Таким образом, для воздуха поток, прошедший косо́ую ударную волну, нельзя повернуть на угол, больший, чем 45° .

12.8.3. Изменение скорости за косо́й ударной волной

Рассмотрим изменение скорости за косо́й ударной волной, при заданном M_1 , при изменении угла χ ([рис. 12.11](#)).

Если точка C приближается к точке B , то при этом v_{2x} стремится к v_1 . Скачок скорости уменьшается и косо́ая ударная волна в пределе переходит в слабый разрыв - в слабую ударную звуковую волну. Однако при этом угол φ имеет конечное значение $\varphi = \varphi_k$. Это значение φ можно определить из уравнения для $ctg^2 \varphi$ ([12.8.5](#)):

$$\left(\frac{v_{2y}}{v_1 - v_{2x}} \right)^2 = ctg^2 \varphi = \frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1 = \frac{\frac{2}{\gamma+1} \left(v_1 - \frac{c_1^2}{v_1} \right) - (v_1 - v_{2x})}{v_1 - v_{2x} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{c_1^2}{v_1}}. \quad (12.8.12)$$

При $v_{2x} \rightarrow v_1$ имеем:

$$ctg^2 \varphi \Big|_{v_{2x} \rightarrow v_1} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1 \rightarrow \frac{v_1^2}{c_1^2} - 1, \quad \sin \varphi \rightarrow \frac{1}{M_1} = \sin \alpha, \quad \varphi \rightarrow \alpha. \quad (12.8.13)$$

Таким образом, действительно убеждаемся, что слабая косо́ая ударная волна (звуковая волна), как и следовало ожидать, распространяется под углом Маха.

две точки, из которых одна принадлежит слабому, а другая сильному семейству. Опыт показывает, что в действительности реализуются лишь точки слабого семейства ударных волн. Точки сильного семейства никогда не реализуются, кроме как в прямой ударной волне (точка A). По-видимому, ударные волны, соответствующие точкам сильного семейства, кроме точки A , неустойчивы. Поэтому за косой ударной волной скорость потока газа остается сверхзвуковой ($v_2 > c_*$), и в нем могут образовываться еще косые или прямые ударные волны.

12.8.4. Обтекание клина сверхзвуковым потоком

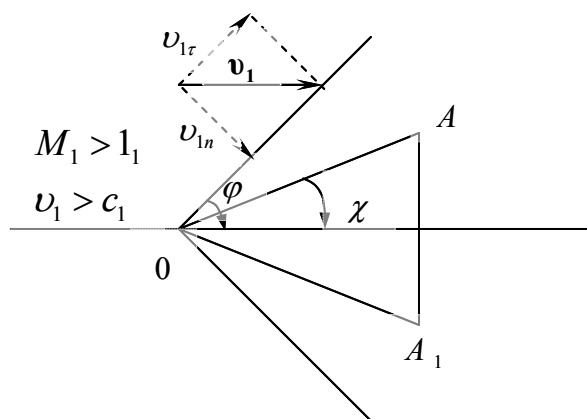


Рис. 12.12

Рассмотрим обтекание сверхзвуковым потоком газа плоского клина (рис. 12.12). Пусть заданы v_1 и M_1 . Необходимо найти угол косой ударной волны. Для практических расчетов параметров косой ударной волны существуют *номограммы*, которые представляют собой ударные поляры, вычисленные для различных M_1 . Они изображены в виде строфоид, вложенных одна в другую. Причем, строфоид, построенная для меньшего M_1 ,

расположена внутри строфоиды для большего M_1 . При заданных v_1 и M_1 поток должен повернуть вдоль поверхности клина OA , поэтому известен также угол поворота потока χ .

Выберем на номограмме строфоид для различных чисел Маха заданную строфоиду для $(M_1)_2$ и ближайшие к ней (рис. 12.13). Проведем из начала координат прямую под углом χ , которая пересекает ударную поляру для $(M_1)_2$ в двух точках. Выберем точку C слабого семейства. Отрезок OC определяет скорость v_2 за косой ударной волной. Проводя секущую через точки B и C и опуская на нее перпендикуляр из начала координат, получаем угол ϕ между этим перпендикуляром и осью v_{2x} , или *угол косой ударной волны*.

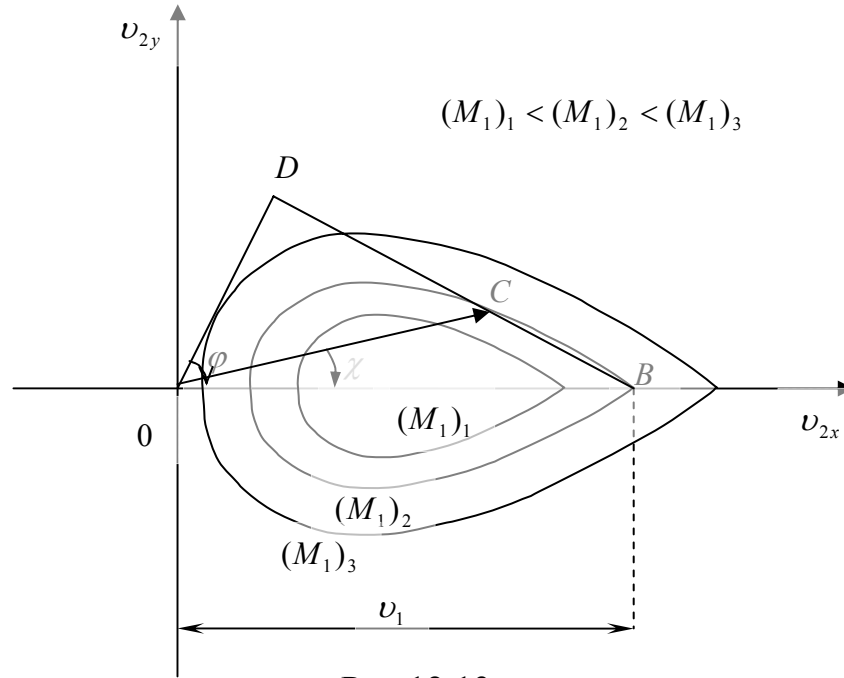


Рис.12.13

В прямой ударной волне отношение давлений P_2/P_1 определяется по формулу (12.6.17):

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \quad (12.8.14)$$

Для косо́й ударной волны в (12.17) необходимо вместо M_1 подставить M_{1n} , определяемое нормальной составляющей набегающего потока v_{1n} (см. (12.8)), тогда аналогичное уравнение имеет следующий вид:

$$M_{1n} = \frac{v_{1n}}{c_1}, \quad v_{1n} = v_1 \sin \varphi.$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{v_1^2}{c_1^2} \sin^2 \varphi - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \sin^2 \varphi - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \quad (12.8.15)$$

Отношение остальных термодинамических величин может быть получено из введенных выше формул (12.6.7), (12.6.9) с использованием (12.8.15)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma+1 + \frac{P_2}{P_1}(\gamma-1)}{\gamma-1 + \frac{P_2}{P_1}(\gamma+1)}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{V_2}{V_1}. \quad (12.8.16)$$

Из сравнения формул (12.8.15) и (12.8.16) видно, что при заданном M_1 скачок давления в косо́й ударной волне всегда меньше, чем скачок давления в прямой ударной волне на $\sin^2 \varphi$. Также меньше скачки и для

других термодинамических величин, в том числе и энтропии. Скорость газа за косой ударной волной тоже изменяется меньше, чем в прямой, оставаясь сверхзвуковой.

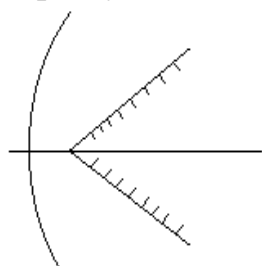


Рис. 12.14

Можно при заданном $(M_1)_2$ увеличивать угол раствора клина χ до некоторого наибольшего значения $\chi_{\text{наиб}}$, соответствующего касанию вектора скорости v_2 к строфоиде. При дальнейшем увеличении $\chi > \chi_{\text{наиб}}$ вектор скорости v_2 не пересекается с ударной полярой, построенной для выбранного $(M_1)_2$. В этом случае, как показывает опыт, перед клином образуется

отсоединенная ударная волна (рис. 12.14).

Если увеличить число $(M_1)_2$ до $(M_1)_3$, то состояние газа за косой ударной волной будет описываться ударной полярой, соответствующей $(M_1)_3 > (M_1)_2$. вектор скорости v_2 может пересечься с этой ударной полярой. Это означает, что косая ударная волна снова будет "посажена" на носик клина.

Если при заданном $(M_1)_3$ снова увеличить угол раствора клина χ , то может оказаться, что вектор скорости v_2 не пересечется с ударной полярой $(M_1)_3 > M_2$. В этом случае косая ударная волна опять «отойдет» от носика клина, т.е. снова образуется отсоединенная ударная волна. И так далее. По-видимому, это рассуждение можно продолжить до тех пор, пока угол раствора клина не достигнет максимального значения:

$$\sin \chi_{\text{max}} = \frac{1}{\gamma}$$

Для клина, имеющего угол раствора $\chi > \chi_{\text{max}}$ даже при бесконечном числе Маха ударная волна воегда отсоединенная (для воздуха $\chi_{\text{max}} \approx 45^\circ$). Для тупого тела ударная волна всегда отсоединенная.

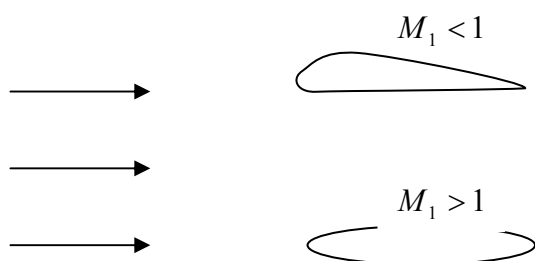


Рис.12.15

Отсоединенную ударную волну можно рассматривать как волну, содержащую участки прямой и последовательной серии косых ударных волн. Так, участок отсоединенной ударной волны перед самым носиком клина можно рассматривать как прямую ударную волну. Поскольку скачек давления в прямой ударной волне при заданном M_1 больше, чем в косой, то и лобовое сопротивление клина больше, чем оно было бы при косой присоединенной ударной волне. Поэтому для снижения сопротивления тел в сверхзвуковом потоке необходимо

для снижения сопротивления тел в сверхзвуковом потоке необходимо

стремиться к тому, чтобы перед обтекаемым телом не образовывалось отсоединенных ударных волн. При заданном числе M_1 это можно сделать только *уменьшением угла раствора клина*. Таким образом, *хорошо обтекаемые тела в сверхзвуковом потоке должны иметь острую переднюю кромку* в отличие от удобообтекаемого дозвукового профиля ([рис. 12.15](#)).

С образованием ударных волн связан и так называемый *звуковой барьер*. При достижении самолетом с дозвуковым профилем крыла скорости,

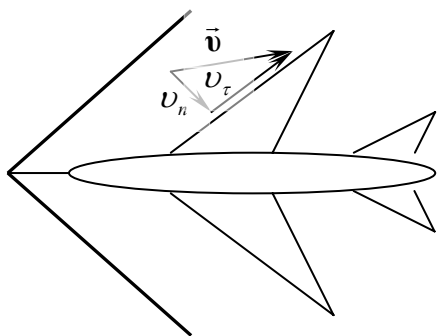


Рис. 12.16

равной скорости звука, на передних кромках обтекаемых частей самолета образуются прямые ударные волны, что приводит к резкому увеличению сопротивления, а это, в свою очередь, резко увеличивает нагрузки на различные элементы конструкции самолета. Увеличение сопротивления ведет к снижению скорости самолета до дозвуковой. Уменьшение же дозвуковой скорости ведет к снижению сопротивления. При той же мощности

двигателей самолет снова разгоняется и достигает звуковой скорости и т.д. Таким образом, самолет, увеличивая скорость, как бы постоянно «натывается» на некоторый барьер, для преодоления которого необходимы более мощные двигатели и достаточно прочная конструкция самолета.

С той же целью уменьшения сопротивления крылья современных самолетов делаются *стреловидными* ([рис. 12.16](#)). Действительно, при заданной скорости полета скорость потока, набегающего на крыло, можно разложить на касательную и нормальную составляющие к передней кромке крыла. При этом нормальная составляющая, ответственная за образование ударной волны на крыле, окажется, конечно, меньше скорости набегающего потока на косинус угла стреловидности.

Поэтому если самолет сверхзвуковой, то отсоединенный скачок на стреловидном крыле появится при большей скорости, а косою скачок будет менее интенсивным. На таком же крыле дозвукового самолета скачок уплотнения в миделевом сечении может появиться при большей скорости полета

12.8.5. Трубка Пито в сверхзвуковом потоке

Теория трубки Пито в сверхзвуковом потоке, обязательно должна учитывать образование перед ней отсоединенной ударной волны, т.к. по необходимости передний носик трубки Пито является тупым. Как следует из вышесказанного, перед носиком трубки обязательно образуется отсоединенная ударная волна. Участок волны перед приемным отверстием

можно считать прямым и для определения давления P_0 можно воспользоваться соотношениями для прямой ударной волны. Газ между

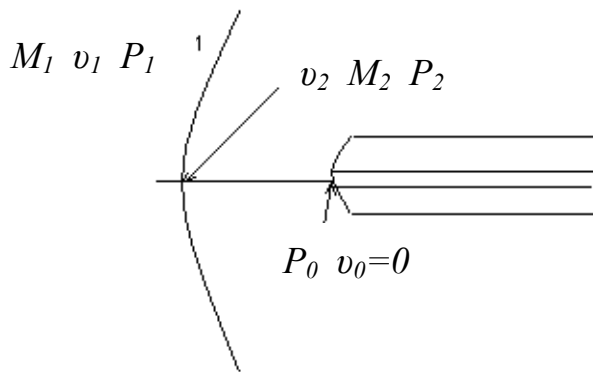


Рис. 12.17

ударной волной и носиком трубки подвергается адиабатическому торможению. Согласно формуле (12.6.5) в обозначениях рис. 12.17, имеем:

$$\frac{P_0}{P_2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (12.8.17)$$

Но из формул (12.6.18) и (12.6.17) следует:

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 + \gamma - 1}, \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad (12.8.18)$$

Формулы (12.8.17) и (12.8.18) позволяют выразить P_0 через P_1 и M_1 . Зная давление P_1 и температуру T_1 можно вычислить M_1 . В свою очередь, если известна температура набегающего потока T_1 (а, следовательно и C_1), то по данным формулам можно вычислить и скорость набегающего потока v_1 или скорость полета самолета. Для увеличения точности измерения и определения различных поправок трубки Пито градуируются в аэродинамических трубах.

12.9. ВОЛНА РАЗРЕЖЕНИЯ

12.9.1. Изменение термодинамических параметров и скоростей в волне разрежения

Рассмотрим обтекание сверхзвуковым потоком плоского тупого угла β (рис. 12.18). Линию AOB можно рассматривать как одну из двух стенок плоского расширяющегося насадка. Пусть газ движется вдоль AO с постоянной сверхзвуковой скоростью $v_1 > c_1$ и вытекает в пространство, в

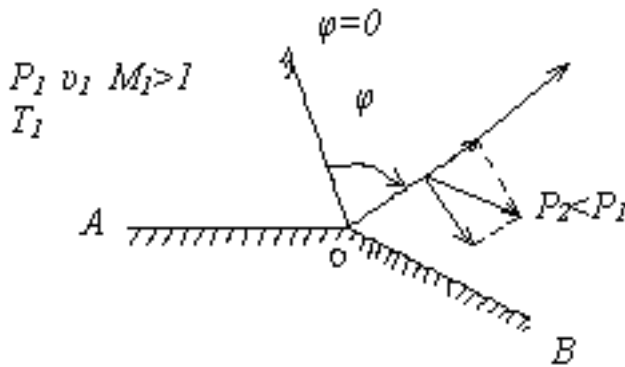


Рис. 12.18

котором давление P_2 меньше, чем давление P_1 в набегающем потоке. Газ будем полагать идеальным ($\eta=0$, $\lambda=0$), а движение - установившимся. В данной задаче, очевидно, удобно воспользоваться полярной системой координат. Если плоское сопло очень широкое, то движение газа можно рассматривать как плоское,

в котором все термодинамические величины и скорости зависят только от угла φ полярной системы координат с началом в точке O и не зависят от r (для упрощения задачи). Пусть линия $\varphi=0$ определяет начало отсчета углов φ .

Непрерывность термодинамических величин и скоростей в волне разрежения позволяет не брать какие-то интегральные соотношения типа законов сохранения, а обратиться непосредственно к уравнениям движения.

Принимая во внимание вышесказанное, из п.8.3 (цилиндрическое течение Пуазеля) из системы уравнений сохранения (8.3.17) для идеальной среды ($v=0$) в цилиндрической системе координат получим следующую систему уравнений эволюции:

$$1. \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} = 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = v_\varphi, \quad (12.9.1)$$

$$2. \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi \left(v_r + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi},$$

$$3. 0 \equiv 0, .$$

$$4. \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\rho v_r}{r} = 0, \quad v_\varphi \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \rho \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \rho v_r = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = -\frac{\rho}{v_\varphi} \left(v_r + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

Проведем следующие преобразования, используя 2 и 4 уравнения (12.9.1):

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi \left(v_r + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) = \frac{c^2}{v_\varphi} \left(v_r + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

Таким образом, имеем следующее уравнение:

$$\left(v_r + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \left(v_\varphi - \frac{c^2}{v_\varphi} \right) = 0. \quad (12.9.2)$$

Уравнение (12.9.2) удовлетворяется в двух случаях.

Первый случай.
$$\left(v_r + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0.$$

Принимая во внимание 2 уравнение (12.9.1), получим ряд последовательных выводов:

$$\left(v_r + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0, \quad P = const, \quad dh = TdS + \frac{1}{\rho} dP, \quad S = const,$$

$$\frac{dh}{d\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varphi}, \quad h = const, \quad h = C_p T, \quad T = const.$$

Из уравнения Бернулли следует, что в этом случае и $v = const$. Далее можно показать, что при этом и направление потока не изменяется.

Действительно. Рассмотрим направление скорости в какой-либо точке потока (рис. 12.19). Пусть угол φ полярной системы координат и угол χ , определяющий направление скорости в любой точке потока по отношению к выбранному постоянному направлению (линия AO) отсчитываются, как показано на рис. 12.19.

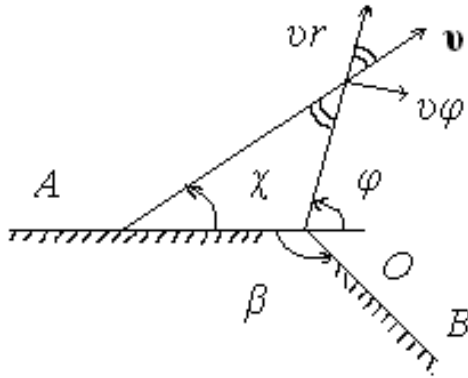


Рис. 12.19

Из рисунка следует:

$$\varphi = \chi + \operatorname{arccotg} \frac{v_r}{v_\varphi}.$$

После дифференцирования по φ имеем:

$$+1 = \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + \frac{1}{1 + \frac{v_r^2}{v_\varphi^2}} \left(\frac{1}{v_\varphi} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{v_\varphi^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

Т.к. из 1-го уравнения (12.9.1) $\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = v_\varphi$

и (12.9.2) $v_r = -\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$, то получаем:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = 0, \quad \chi = \text{const}.$$

Следовательно, в этом случае не изменяются ни термодинамические параметры и модуль скорости, но и направление потока.

Таким образом, первое решение описывает тривиальный случай плоско-параллельного поступательного движения сверхзвукового потока.

Второй случай.

$$v_\varphi - \frac{c^2}{v_\varphi} = 0, \quad v_\varphi = c.$$

Из 4-го уравнения (сохранения массы или непрерывности) (12.9.1), имеем:

$$\frac{\partial \rho v_\varphi}{\partial \varphi} + \rho v_r = 0, \quad \varphi = -\int \frac{d(\rho v_\varphi)}{\rho v_r} = -\int \frac{d(\rho c)}{\rho v_r}. \quad (12.9.3)$$

Но скорость v_r может быть определена из следующих соображений:

$$v^2 = v_\varphi^2 + v_r^2 = c^2 + v_r^2, \quad v_r^2 = v^2 - c^2, \quad \frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{c_*^2}{2}.$$

Компонента скорости v_r может быть определена через c и c_* :

$$v_r^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c_*^2 - \frac{2c^2}{\gamma - 1} - c^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (c_*^2 - c^2), \quad v_r = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (c_*^2 - c^2)}.$$

Далее можно сделать следующие преобразования:

$$c^2 = \gamma \frac{P}{\rho}, \quad \frac{P}{\rho^\gamma} = \text{const}, \quad c^2 = \text{const} \gamma \rho^{\gamma-1}, \quad c = \text{const} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

$$\rho = \text{const} c^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad \frac{P_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{P_*}{\rho_*^\gamma} = \frac{P_2}{\rho_2^\gamma}. \quad (12.9.4)$$

Подставляя полученные соотношения в (12.9.3), получим:

$$\varphi = -\int \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} c^{\frac{2}{\gamma-1}} dc}{\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} c^{\frac{2}{\gamma-1}} \sqrt{c_*^2 - c^2}}} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{c}{c_*} + \text{const}. \quad (12.9.5)$$

Очевидно, что постоянная интегрирования связана с началом отсчета углов, и пока положим ее равной нулю, а начало отсчета найдем из физических соображений.

Если в уравнении 2 системы [\(12.9.1\)](#) использовать замену: $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$ и уравнение адиабаты, то можно показать, что:

$$v_\varphi = c = c_* \cos \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right), \quad v_r = c_* \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \sin \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right), \quad (12.9.6)$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = c_*^2 \left[\cos^2 \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right) + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right) \right].$$

Если использовать 2-е уравнение системы [\(12.9.1\)](#), [\(12.9.6\)](#), уравнение адиабаты и уравнение идеального газа, то термодинамические параметры в волне разрежения равны:

$$\rho = \rho_* \left(\cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad P = P_* \left(\cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}},$$

$$T = T_* \cos^2 \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right). \quad (12.9.7)$$

Движение газа, описываемое соотношениями [\(12.9.6,7\)](#), называют волной разрежения.

Из полученных соотношений [\(12.9.6\)](#), [\(12.9.7\)](#) видно, что с увеличением угла φ , все термодинамические величины и скорости изменяются непрерывно. Причем с увеличением угла φ плотность, давление и температура газа, а, следовательно, и скорость звука, **убывают**. Модуль же скорости движения газа, как это следует из уравнения Бернулли, **возрастает**. Таким образом, изменение всех термодинамических величин и скоростей в волне разрежения обратно пропорционально их изменению в ударной волне. $p \downarrow, \rho \downarrow, T \downarrow, c \downarrow, v \uparrow$.

Следует еще раз подчеркнуть, что если в ударной волне они изменяются скачком, то в волне разрежения все термодинамические величины и скорости изменяются непрерывно. Следовательно, волна разрежения занимает определенную область пространства в движущемся газе.

12.9.2. Максимальный угол поворота потока в волне разрежения

Из физических соображений следует, что поток, движущийся вдоль стороны AO тупого угла должен повернуть вдоль стороны угла OB [\(рис. 12.18\)](#). Если теперь угол φ отчитывать по направлению потока, то, очевидно, что компонента полной скорости v_φ должна быть всегда

положительна $v_\varphi > 0$. Положительной должна быть и компонента скорости v_r ($v_r > 0$) в области возмущенного движения, так как возмущение, вызываемое вершиной угла, распространяется вдоль прямых характеристик, исходящих из вершины угла в положительном направлении.

Тогда из формулы (12.9.6) следует, что v_φ и v_r могут быть одновременно положительны только в первом квадранте изменения их аргумента. Поэтому φ может изменяться только в следующих пределах:

$$0 = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi_{\min}, \quad \varphi_{\min} = 0, \quad \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi_{\max}, \quad \varphi_{\max} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}. \quad (12.9.8)$$

Поэтому волна разрежения занимает сектор с вершиной в точке O , ограниченный прямыми, исходящими из точки O с углом раствора, равным:

$$\Delta\varphi_{\max} = \varphi_{\max} - \varphi_{\min} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

Для воздуха $\gamma=1.4$, тогда $\Delta\varphi_{\max} = 219^\circ$.

Начертим линию тока в волне разрежения, и введем угол χ , характеризующий поворот потока. Рассмотрим, как изменяется угол χ (рис. 12.20) при изменении угла φ .

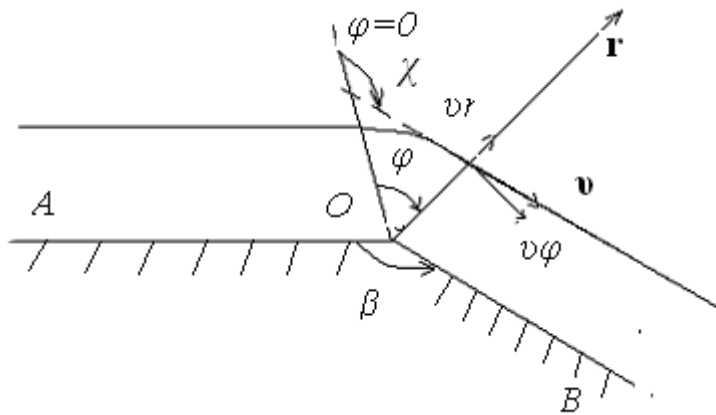


Рис. 12.20

Отчет обоих углов будем вести по потоку от некоторого начального направления $\varphi = 0$. Из рис. 12.20 следует:

$$\chi = \varphi + \operatorname{arctg} \frac{v_\varphi}{v_r} = \varphi + \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right]. \quad (12.9.9)$$

Угол χ изменяется от его значения χ_{\min} при $\varphi_{\min}=0$ до его значения χ_{\max} при φ_{\max} , определяемого формулой (12.9.8), подстановка которой в (12.9.9) дает следующие пределы для угла поворота потока χ :

$$\chi_{\min} = \frac{\pi}{2}, \quad \chi_{\max} = \varphi_{\max} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, \quad \Delta\chi_{\max} = \chi_{\max} - \chi_{\min} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right). \quad (12.9.10)$$

Таким образом, из (12.9.10) следует, что поток в волне разрежения нельзя повернуть на угол, больший, чем угол $\Delta\chi_{\max}$. Для воздуха $\Delta\chi_{\max}=130^\circ$.

Из формул (12.9.6-8) следует, что при $\varphi = \varphi_{\max}$ параметры поля и скорости равны

$$\rho = 0, \quad P = 0, \quad T = 0, \quad v_\varphi = 0, \\ v_r = c_* \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} = v_{\max}. \quad (12.9.11)$$

Следовательно, линия $\varphi = \varphi_{\max}$ есть линия, граничащая с **вакуумом**, когда температура вытекающего газа становится равной нулю. Только в этом случае возможен поворот потока воздуха на $\sim 130^\circ$.

Угол 130° получается при $v_I = c_I = c_*$, тогда $\varphi_I = 0$ (характеристика и начало поворота потока совпадают). При $v_I > c_2$ угол поворота будет меньше, вплоть до 0, а так как направление $\varphi = 0$ искусственное (там поток еще не поворачивает), то и значение $\chi_0 = \pi/2$ получается неестественное и на самом деле поток поворачивает на совсем другой угол (при очень больших скоростях).

Прямому лучу $\varphi = 0$ соответствует $v_I = c_I = c_*$; при $M_I > 1$ такой линии фактически нет, так как везде $v/c > 1$. Представляя себе, однако, волну разрежения формально продленной в область правее OC (рис. 12.20) и воспользовавшись формулой (12.9.5), найдем, что разрыву OA надо придать значение угла φ , равное:

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{c_1}{c_*}.$$

12.9.3. Сектор, занимаемый волной разрежения

Для построения сектора, занимаемого волной разрежения, необходимо найти начало отсчета углов φ и χ . Для нахождения начала отсчета углов, можно воспользоваться физическими соображениями. Действительно, вершина обтекаемого угла является источником возмущений. Возмущения же распространяются в движущемся газе под углом Маха α ($\sin \alpha = 1/M_I$).

Возмущения, вызывающие образование слабых разрывов, исходящих от особой линии (ось OZ) распространяются по направлению от нее. Это значит, что ограничивающие волну разрежения слабые разрывы должны быть “исходящими” по отношению к точке O , т.е. касательная к слабому разрыву компонента скорости v_r должна быть положительна.

Поэтому, начало возмущенного потока или начало волны разрежения определяется линией, проведенной из вершины угла под углом α к направлению набегающего потока или к направлению стороны угла AO . Эта линия, очевидно, является *первой характеристикой, ограничивающей волну разрежения слева*, т.е. со стороны невозмущенного потока.

Очевидно, этой начальной характеристике необходимо приписать угол $\varphi = \varphi_1$, который следует из соотношений (12.9.6) при $v_\varphi = v_1$. Таким образом, первой характеристике необходимо приписать угол:

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{v_1}{c_*}. \quad (12.9.12)$$

Откладывая угол φ_1 от линии, проведенной под известным (при данном M_1) углом α влево, получим начало отсчета угла φ . В свою очередь, угол χ_1 , очевидно, может быть определен по формуле (12.9.9) при подстановке в нее угла φ_1 .

Вторую характеристику, ограничивающую волну разрежения справа, можно найти, используя следующие соображения. Пусть поток после прохождения угла AOB поворачивает и движется вдоль стороны угла OB . Тогда известен угол поворота потока $\Delta\chi$. Причем, из рис.12.21 следует, что

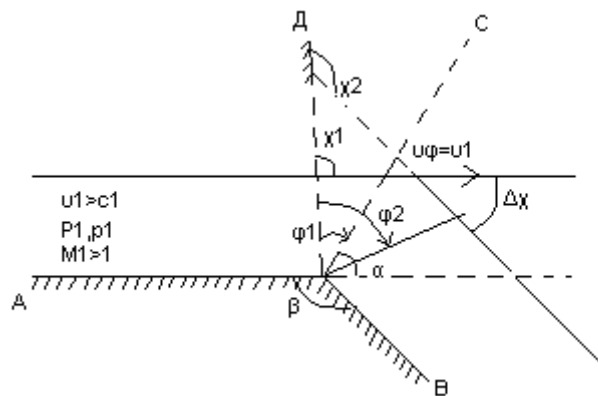


Рис. 12.21

$$\Delta\chi = \chi_2 - \chi_1 = 180^\circ - \beta, \quad \chi_2 = 180^\circ - \beta + \chi_1 = 180^\circ - \beta + \varphi_1 + \alpha. \quad (12.9.13)$$

Поскольку известны углы χ_1 и β , то известен и угол χ_2 . Тогда, подставляя $\chi = \chi_2$ в формулу (12.9.9), можно определить и угол φ_2 , отсчитываемый от вычисленного выше начала отсчета углов и определяющий *вторую характеристику, ограничивающую волну разрежения справа*.

Таким образом, можно найти **сектор, занимаемый волной разрежения**.

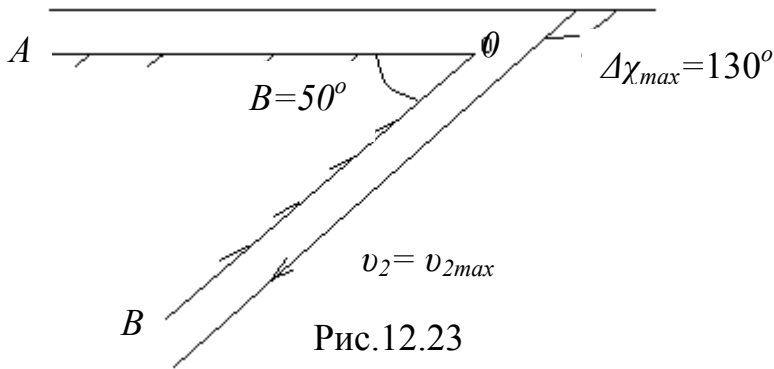


Рис.12.23

Если теперь угол β еще уменьшить, то газ не будет следовать вдоль стороны угла OB и между стороной OB и граничной линией тока будет зона вакуума.

Рассмотрим движение, при котором противодавление P_2 больше, чем давление в набегающем потоке ($P_2 > P_1$). Очевидно, что в этом случае должна

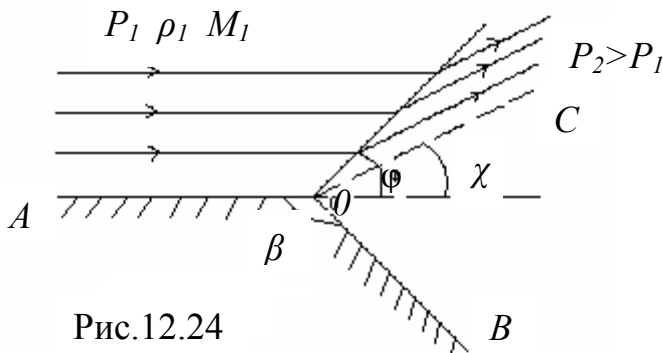


Рис.12.24

образовываться косая ударная волна, исходящая из вершины обтекаемого угла AOB . Зная P_1 , M_1 и P_2 , можно определить угол ϕ – угол наклона косой ударной волны к направлению набегающего потока (рис. 12.24).

Зная угол ϕ и M_1 по ударной поляре можно найти v_2 и χ . При этом должен образовываться тангенциальный разрыв скорости OC , разграничивающий область движущегося газа и застойную зону хаотического турбулентного движения (для реальных газов). При дальнейшем увеличении $P_2 > P_1$ может оказаться, что $\sin\phi$, окажется больше 1. Это означает, что в движущемся газе должна образовываться отсоединенная ударная волна (рис. 12.25).

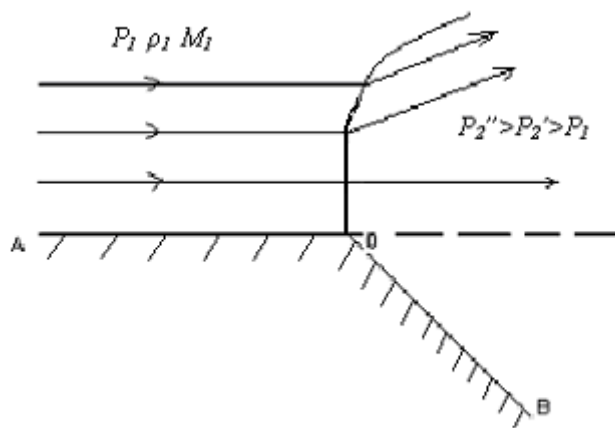


Рис.12.25

12.10. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНЫХ ВОЛН И ВОЛН РАЗРЕЖЕНИЯ

Ударные волны и волны разрежения в движущемся газе могут накладываться друг на друга, пересекаться или, падая на твердую стенку, ограничивающую движение, отражаться от нее или, встречая тангенциальный разрыв, также испытывать отражение или преломление.

Рассмотрим качественно отражение или пересечение ударных волн и волн разрежения с тангенциальным разрывом.

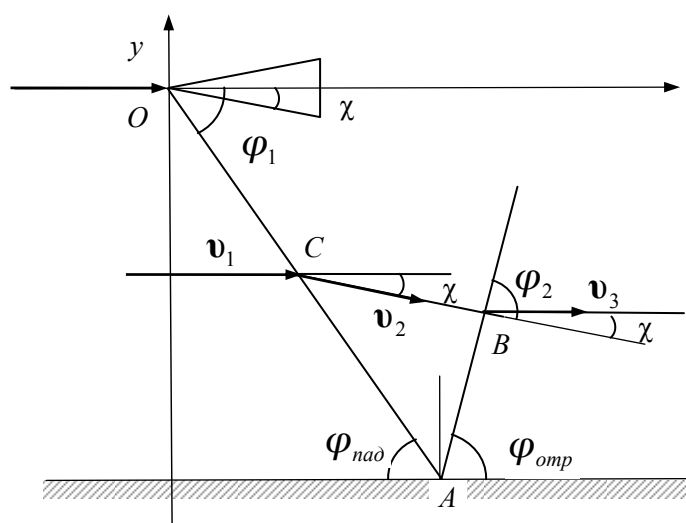


Рис. 12.26

12.10.1. Отражение ударной волны от стенки

Пусть на твердую стенку падает косая ударная волна (рис. 12.26). Можно представить, что вдали от стенки в сверхзвуковой поток помещен клин, от которого отошла рассматриваемая ударная волна. Для определения движения газа за падающей ударной волной можно воспользоваться ударной полярой (рис. 12.27).

Выберем на номограмме поляру, соответствующую заданному числу Маха M_1 . Проведем из начала координат прямую под известным углом φ_1 , найденным по углу полураствора клина χ . Из точки B_1 опустим на эту прямую перпендикуляр. Тогда, как известно, пересечение этого перпендикуляра с ударной полярой определит отрезок OC_1 , определяющий скорость v_2 за падающей ударной волной, а также угол поворота потока χ . Зная M_1 и φ_1 по формуле (12.8.4) определим M_2 – число Маха за падающей ударной волной. Очевидно $M_2 < M_1$. Поэтому ударная поляра, соответствующая M_2 , будет лежать внутри ударной поляры соответствующей M_1 . На рис. 12.26 можно провести линию тока за падающей ударной волной.

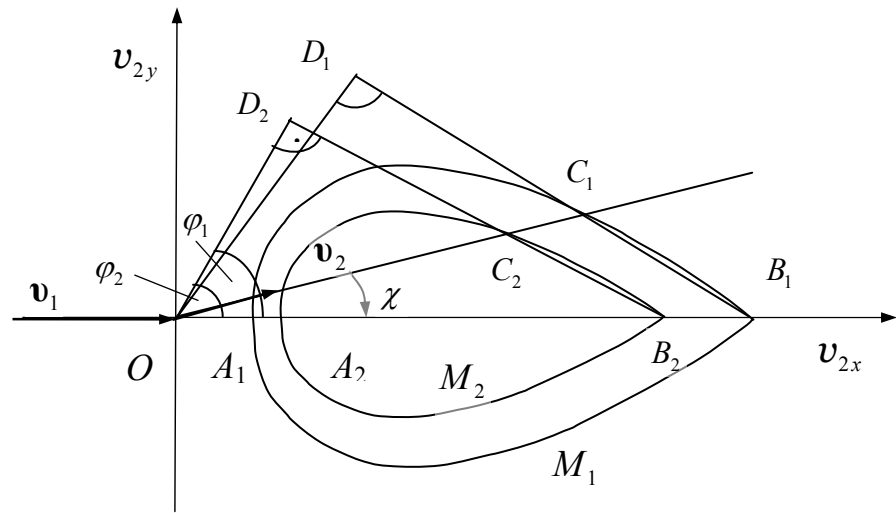


Рис. 12.27

Но газ за падающей ударной волной должен двигаться вдоль твердой стенки. Это значит, что от точки пересечения с падающей ударной волной со стенкой (точка O), должна отойти также косая ударная волна, в которой газ должен повернуть на тот же самый угол χ и двигаться вдоль стенки.

Скорость за отраженной ударной волной может быть найдена, если определена точка C_2 – точка пересечения линии OC_1 с ударной полярой M_2 . Если теперь из точки B_2 провести через точку C_2 линию, а на нее из начала координат опустить перпендикуляр, то линия OD_2 определит угол φ_2 – угол отражения падающей ударной волны. Снова, зная M_2 и φ_2 , можно определить число Маха за отраженной волной. Очевидно, $M_3 < M_2$. Поскольку $M_2 < M_1$, то $\varphi_2 > \varphi_1$. Пользуясь формулой (12.8.4), это можно легко показать аналитически.

Таким образом, падающая на твердую стенку ударная волна отражается от нее тоже в виде **косой** ударной волны, причем угол отражения не равен углу падения (см. [рис. 12.26](#)). Только очень слабые (звуковые) ударные волны $M_2 \approx M_1$ будут отражаться от твердой поверхности “зеркально” ($\varphi_2 \approx \varphi_1$).

Если падающая ударная волна настолько интенсивная, что φ_2 становится больше φ_{max} , то в этом случае отражение будет неправильным ([рис. 12.28](#)).

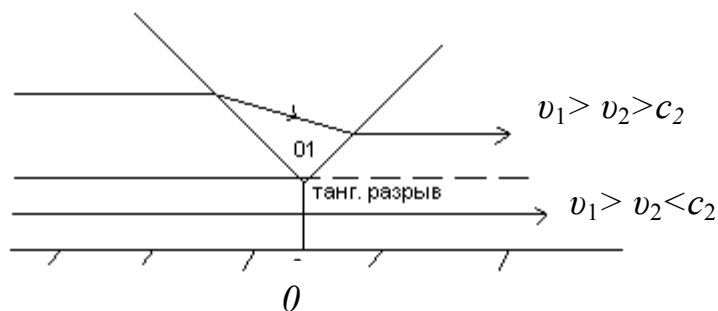


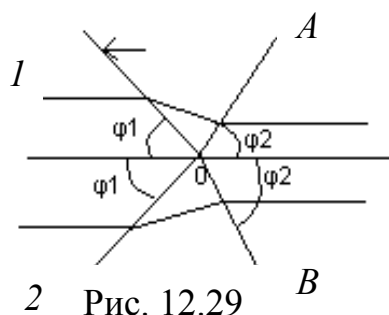
Рис.12.28

Между стенкой и точкой отражения возникает участок прямой ударной волны OO_1 . Вообще, скорость газа, прошедшего через отраженную волну, может быть и не равна скорости газа, прошедшего прямую ударную волну. Это значит, что от точки O_1 может отойти тангенциальный разрыв, то есть линия, на которой все термодинамические параметры непрерывны, нормальная компонента скорости равна нулю, а тангенциальная к поверхности разрыва скорость газа испытывает скачок.

Ударная волна мощного надземного взрыва отражается неправильно, и вдоль поверхности земли движется прямая ударная волна.

12.10.2. Пересечение двух ударных волн

Рассмотрим взаимодействие в газе двух ударных волн. Снова можно представить, что они образовались от двух клиньев, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа (рис. 12.29).



2 Рис. 12.29

Если ударные волны одинаковой интенсивности, то линия тока, проходящая через точку пересечения (точка O), не должна претерпевать каких-либо изменений и ее можно рассматривать как твердую стенку. Воспользуемся предыдущим рассмотрением отражения падающей ударной волны от твердой стенки.

Если ударные волны имеют достаточно большую интенсивность, то пересечение становится **неправильным**. Образуется участок прямой ударной волны; а от точек O и O' отойдут тангенциальные разрывы (рис.12.30)..

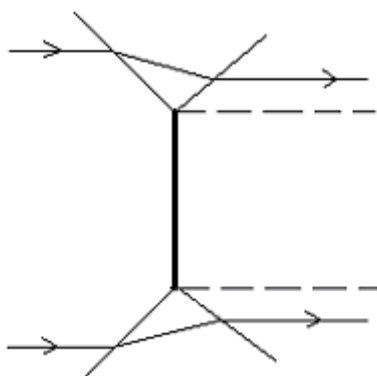


Рис.12.30

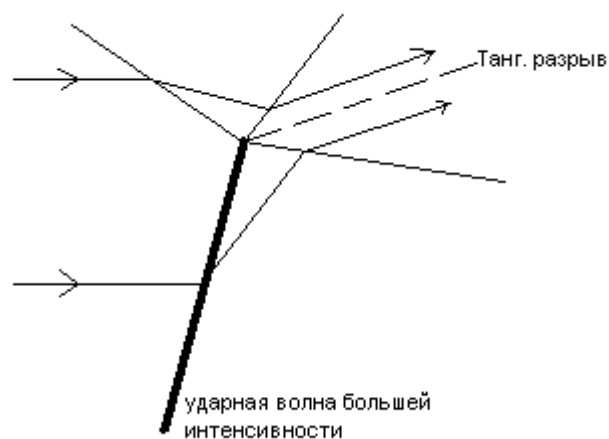


Рис. 12.31

Если интенсивность пересекающихся ударных волн неодинакова, то направление поворота потока определяется так: поток, прошедший ударную

волну большей интенсивности, повернет в сторону менее интенсивной ударной волны (рис. 12.31).

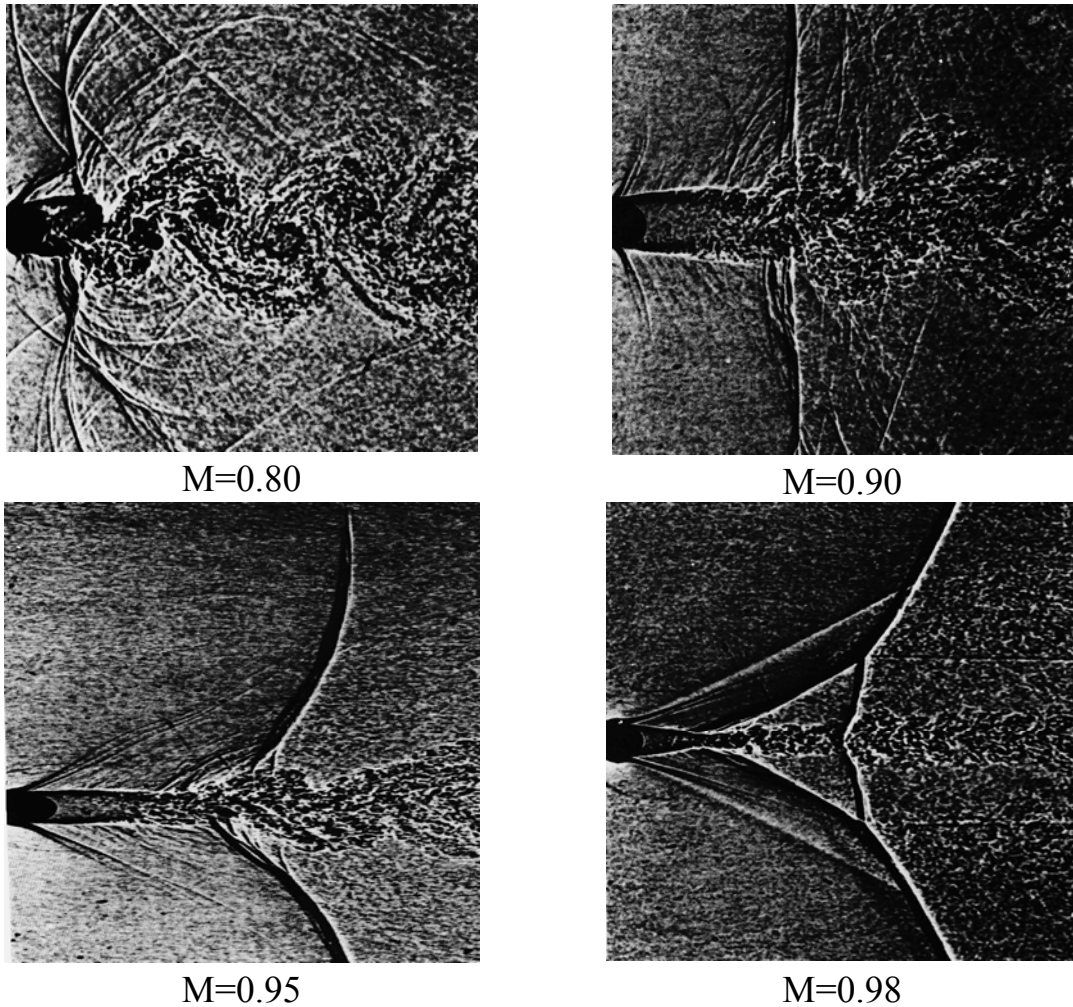


Рис. 12.31а

Развитие следа при возрастающем числе M с . взаимодействием ударных волн можно наблюдать на рис. 12.31а. По мере того как число Маха невозмущенного потока внеозрастает, приближаясь к единице, след за круговым цилиндром переходит от периодического схождения вихрей, характерного для малых скоростей, к квазистационарному следу с шейкой, устанавливающемуся при сверхзвуковых скоростях. Взаимодействие косых ударных волн с турбулентным следом за цилиндром приводит к образованию «неправильной» косой ударной волны с участком прямой за кормой цилиндра. [Dyment, Gryson, Ducruet, 1980]

12.10.3. Взаимодействие ударной волны и волны разрежения с тангенциальным разрывом

Предположим, что в движущемся газе есть тангенциальный разрыв. Под **тангенциальным разрывом** понимают такую поверхность, на которой все термодинамические величины непрерывны, а тангенциальные компоненты скорости терпят разрыв. Непрерывность термодинамических величин следует из уравнений сохранения на поверхности разрыва (см.12.5).

Если с одной стороны поверхности разрыва термодинамические параметры и скорости есть $P_1, \rho_1, T_1, v_{n1}, v_{\tau 1}$, а с другой - $P_2, \rho_2, T_2, v_{n2}, v_{\tau 2}$. То на поверхности тангенциального разрыва выполняются равенства $P_1=P_2, \rho_1=\rho_2, T_1=T_2, v_{n1}=v_{n2}$, но $v_{1\tau} \neq v_{2\tau}$.

Пусть на такой тангенциальный разрыв падает ударная волна (рис. 12.32). В газе, прошедшем через ударную волну, давление возрастает. Но в поле течения за областью взаимодействия ударной волны с тангенциальным разрывом давление должно уменьшиться до начального P_1 . Следовательно, должен существовать механизм, который понижал бы давление с P_2 до $P_3=P_1$. Это может быть только волна разрежения (давление в области, ограниченной характеристиками 1 и 2, понижается). В соответствии с изменением направления скорости в ударной волне и волне разрежения, поворачивает тангенциальный разрыв.

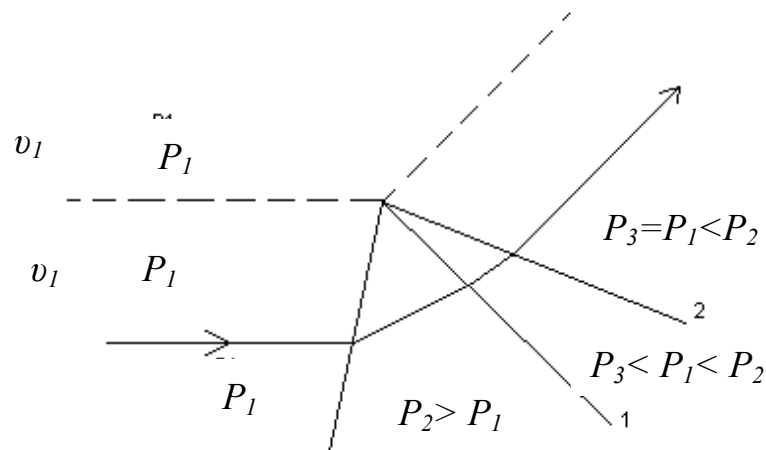


Рис. 12.32

Таким образом, косая ударная волна, падающая на тангенциальный разрыв, отражается в виде волны разрежения; и наоборот, волна разрежения, падая на тангенциальный разрыв, отражается в виде косой ударной волны.

12.10.4. Возникновение ударной волны в пограничном слое

Вспомним явление отрыва пограничного слоя при $M < 1$. В соответствии с уравнением Бернулли при обтекании профиля крыла самолета дозвуковым потоком до миделева сечения давление уменьшается, скорость растет, а после него, наоборот, давление возрастает, скорость уменьшается. В миделевом сечении $v = v_{max}$, $p = p_{min}$. Если скорость движения увеличится, то даже при дозвуковой скорости в миделевом сечении она может оказаться равной местной скорости звука. Возможным становится образование ударной волны – скачка уплотнения. Газу за миделевым сечением приходится преодолевать не только противодействие, но и скачок уплотнения, который дополнительно стимулирует отрыв пограничного слоя. Ясно, что отрыв будет происходить в миделевом сечении. Этот скачок, а также увеличение давления за миделевым сечением и являются причинами отрыва пограничного слоя и его турбулизации. Величина же турбулентной зоны за миделевым сечением до 80% определяет сопротивление тела.

Возникновение ударных волн в пограничном слое при дозвуковом обтекании выпуклого тела показано на рис. 12.33-35.

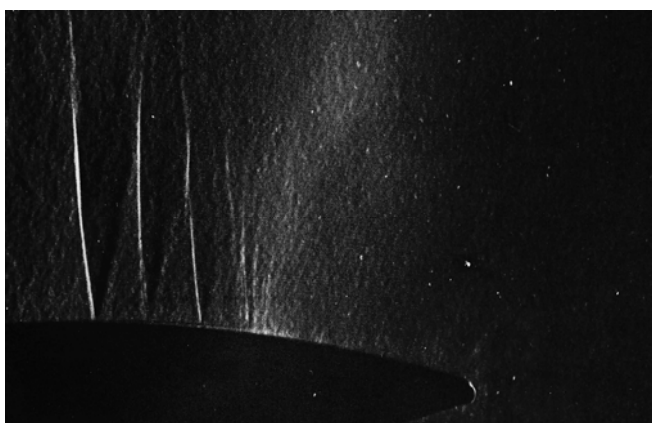


Рис. 12.33

Множественные ударные волны на профиле с ламинарным пограничным слоем показаны на рис. 12.33. Область местного сверхзвукового течения обычно заканчивается ударными волнами, на форму которых оказывает влияние пограничный слой. Если этот слой ламинарен, то сначала появляется последовательность так называемых *лямбдообразных* ударных волн. На этой шлирен-фотографии, выполненной при вертикальной кромке ножа, видна картина обтекания двояковыпуклого профиля 12%-ной толщины при числе Маха невозмущенного потока, равном 0,8 (Н. W. Liepmann)

Лямбдообразные ударные волны над ламинарным пограничным слоем при возрастающих числах Маха представлены на рис. 12.34. Видно, что при возрастании местного числа Маха, значения которого приводятся под каждой парой шлирен-фотографий, лямбдообразные ударные волны сливаются между собой. Здесь ламинарный пограничный слой формируется на искривленной пластинке, которая создает растущую ограниченную область сверхзвукового течения, погруженную в дозвуковой поток. Тем самым

имитируется сверхкритическое обтекание профиля. Символы на снимках слева указывают, что кромка ножа вертикальна для верхнего ряда, а для нижнего горизонтальна [Ackeret, Feldmann, Rott, 1946].

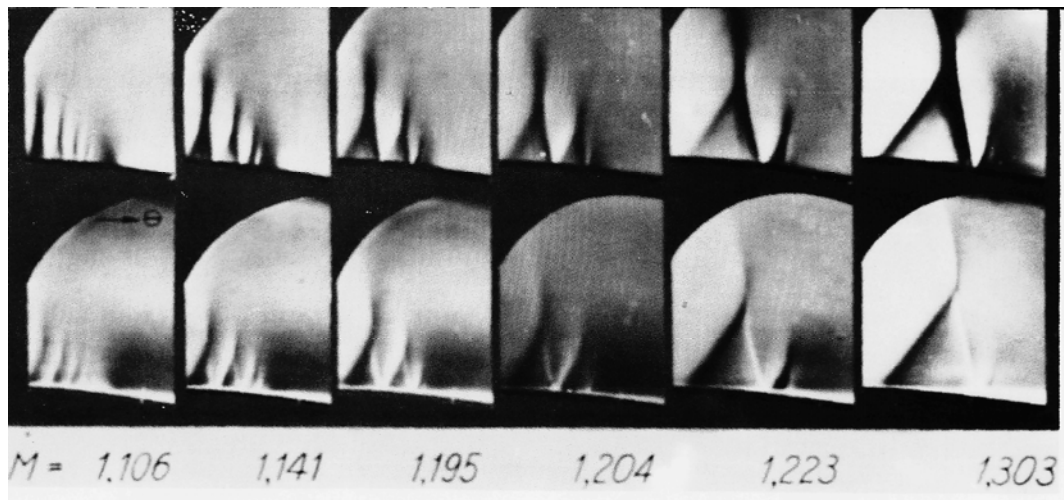


Рис. 12.34



Рис. 12.35

оторвался от поверхности двояковыпуклого профиля перед ударной волной и стал турбулентным (H. W. Liepmann).

Рис. 12.35 иллюстрирует одиночную лямбдообразную ударную волну на профиле с ламинарным пограничным слоем. При увеличении числа Маха множественные ударные волны, показанные на предыдущем снимках, сливаются в одну волну. Здесь видно (кромка ножа горизонтальна), что при $M = 0,9$ ламинарный пограничный слой

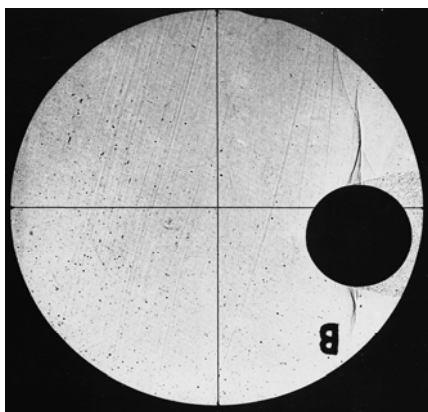


Рис. 12.36

На рис. 12.36 показан шар в свободном полете в воздухе при числе Рейнольдса 920 000, который схвачен вспышкой при теновом фотографировании почти за пределами поля зрения. Видно, что λ -скачок уплотнения вызывает турбулентный отрыв пограничного слоя перед экватором. При малых числах Маха отрыв слоя происходит за экватором вниз по потоку в зависимости от числа M (A. Stalp, 1965).

12.11. ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ СУЖАЮЩЕГОСЯ НАСАДКА

Рассмотрим качественно истечение газа из сужающегося насадка в неподвижный газ. Выше уже отмечалось, что при достижении на выходе сопла некоторого давления, равного его критическому значению, скорость газа на срезе сопла достигает критической скорости звука c^* . Однако, вне сопла давление может оказаться и больше и меньше этого критического значения. Рассмотрим случай, когда давление вне сопла больше критического давления, то есть $P_0 > P^*$. Нарисуем качественно картину движения газа вне сопла.

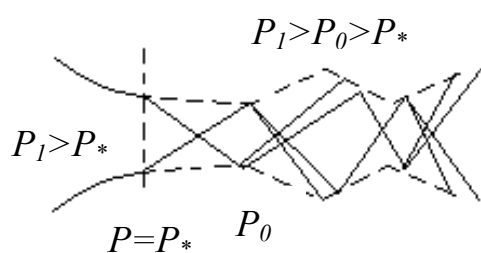


Рис. 12.36

Будем полагать для простоты, что сопло плоское. Край сопла можно рассматривать как источник возмущения (рис. 12.36). Газ вне сопла неподвижен, а выходящий из сопла газ имеет скорость, равную критической скорости звука на срезе сопла. Тогда от края сопла должен

отойти тангенциальный разрыв скорости. Для того чтобы давление в выходящем газе повысилось от давления P^* до давления $P_0 > P^*$, необходимо, чтобы от края сопла отошла ударная волна. Ударные волны, отошедшие от обеих кромок сопла, пересекутся по известному закону, а затем упадут на тангенциальный разрыв, от которого они отразятся в виде волн разрежения. В свою очередь, волны разрежения после пересечения отразятся от тангенциального разрыва в виде ударных волн и так далее. Газ, прошедший ударные волны, тормозится, и давление возрастает. Газ, прошедший волны разрежения, ускоряется, и давление в нем падает. Это чередование ударных волн и волн разрежения будет происходить до тех пор, пока в силу вязкости и теплопроводности кинетическая энергия движения не диссипируется настолько, что скорость движения газа станет дозвуковой.

Если давление газа вне сопла P_0 меньше чем P^* , то есть $P_0 < P^*$, то от кромок сопла, прежде всего, отойдут волны разрежения (рис. 12.37), которые отражаются от тангенциального разрыва в виде косых ударных волн.

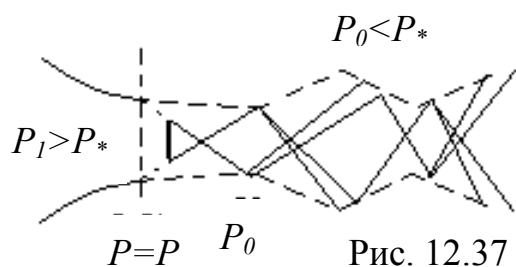


Рис. 12.37

Далее вниз по течению картина повторяется до тех пор, пока скорость газа не станет дозвуковой. При $P_0 = P^*$ вне сопла движение газа будет происходить без образования ударных волн или волн разрежения.

Если давление вне сопла значительно превосходит критическое давление, то, очевидно, при пересечении первых ударных волн, отошедших от кромки сопла, возможно неправильное пересечение с образованием участка прямой ударной волны.

12.12. СОПЛО ЛАВАЛЯ В НЕРАСЧЕТНОМ РЕЖИМЕ

Режим движения газа в сопле Лаваля в существенной мере зависит от противодействия. Рассмотрим качественно, как будет происходить движение внутри сопла Лаваля по мере уменьшения противодействия.

На [рис. 12.38](#) представлен график изменения давления вдоль сопла в зависимости от противодействия.

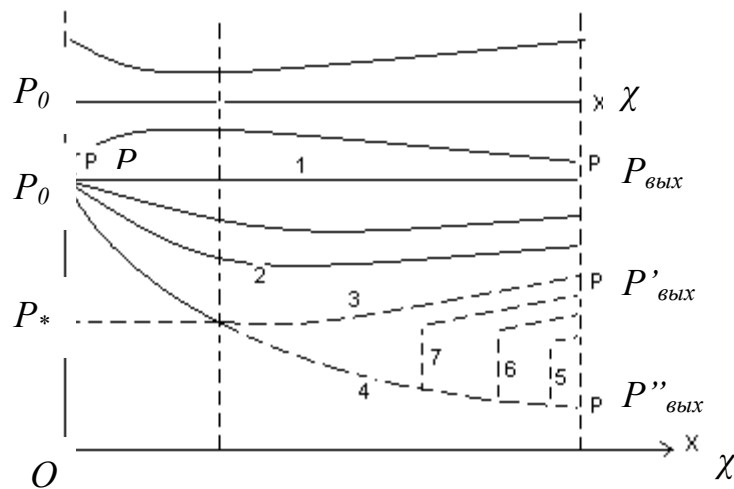


Рис. 12.38

Если $P_{\text{вых}} = P_0$, то очевидно движение газа внутри сопла отсутствует и давление будет одинаковым в любом сечении сопла (кривая 1). По мере уменьшения выходного давления, газ начнет двигаться вдоль сопла, и распределение давления вдоль сопла представится некоторой кривой 2. Очевидно, минимальное давление всегда будет в самом узком сечении сопла. При дальнейшем уменьшении $P_{\text{вых}}$ в минимальном сечении скорость газа может достигнуть скорости звука в этом критическом сечении, а давление будет равно P^* . При этом возникнет альтернатива. Или дальше за критическим сечением газ будет двигаться дозвуковым образом, а давление вниз по потоку будет возрастать от P^* до $P'_{\text{вых}}$ (кривая 3), или газ будет двигаться далее сверхзвуковым образом, а давление будет продолжать падать до $P''_{\text{вых}}$ (кривая 4). Очевидно, что эта альтернатива разрешается величиной противодействия. Давление $P''_{\text{вых}}$ можно рассчитать следующим образом. В 12.3. была получена формула, связывающая величину поперечного сечения сверхзвуковой части сопла Лаваля с числом Маха ([12.21](#)):

$$\frac{S_{\text{вых}}}{S_{\text{мин}}} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2_{\text{вых}}}{\frac{\gamma+1}{2}} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad \frac{S_{\text{вых}}}{S_{\text{мин}}} = f(M).$$

Поэтому, зная $S_{\text{вых}}$ и $S_{\text{мин}}$, мы могли бы рассчитать число Маха в сечении $S_{\text{вых}}$ и, в частности, число Маха в выходном сечении $M_{\text{вых}}$. Далее, используя уравнение Бернулли и уравнение для адиабатического движения $\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{const}$, можно легко получить формулу, аналогичную (12.9), как это сделано в 12.7. и можно вычислить расчетное значение $P''_{\text{вых}}$ по формуле:

$$P''_{\text{вых}} = P_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2_{\text{вых}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (12.2)$$

Таким образом, если выходное давление будет равно $P''_{\text{вых}}$, рассчитанному по формуле (12.88), то газ будет двигаться за критическим сечением ($S_{\text{мин}}$) сверхзвуковым образом. Если давление на выходе из сопла будет меньше расчетного $P''_{\text{вых}}$, то дальнейшее ускорение потока и падение давления будет происходить вне сопла.

Если же давление на выходе сопла будет больше расчетного $P''_{\text{вых}}$, то движение газа внутри сопла за критическим сечением не может быть везде сверхзвуковым. В этом случае образуется прямая ударная волна, переводящая в этом сечении давление до ударной волны в давление $P_{\text{вых}} > P''_{\text{вых}}$. По мере увеличения давления от $P''_{\text{вых}}$ до $P'_{\text{вых}}$, ударная волна проникает все глубже и глубже внутрь сопла (кривые 5,6,7).

12.13. ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ПОД МАЛЫМ УГЛОМ АТАКИ

Пусть пластинка, расположенная под углом α , обтекается сверхзвуковым потоком. Газ, движущийся выше AO , воспримет пластинку как тупой угол. Поэтому от точки O отходит волна разрежения, в которой газ поворачивает вдоль пластинки, давление и температура уменьшается, а скорость потока возрастает.

Газ же, движущийся ниже AO , воспринимает пластинку как клин. Поэтому на пластинке возникает косой скачок уплотнения, за которым давление и температура возрастают, а скорость потока уменьшается. После пластинки оба потока объединяются и продолжают движение в первоначальном направлении вдоль AO с одинаковыми давлениями и

скоростями. Поэтому в точке O' образуется косая ударная волна в верхнем полупространстве и волна разрежения - в нижнем.

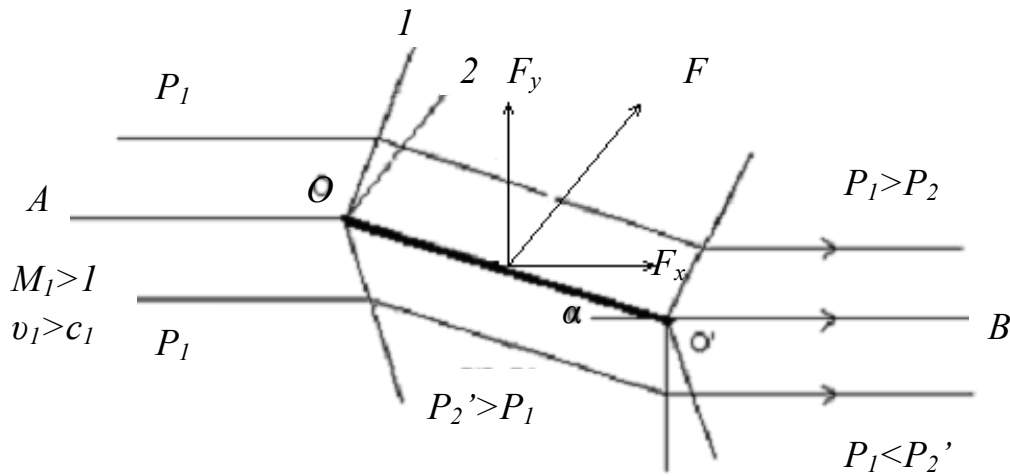


Рис.12.39

Рассчитав ударную волну и волну разрежения, можно найти P_2 и P_2' , а также найти полную силу F и составляющие - силу сопротивления F_x и подъемную силу F_y .