

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

**В.И. Савандер, М.А. Увакин**

# **ФИЗИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ**

## **Часть 1**

### **ОДНОРОДНАЯ РАЗМНОЖАЮЩАЯ СРЕДА И ТЕОРИЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ СТРУКТУР**

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2007

УДК 621.039.5.01(07)  
ББК 31.46я7  
С12

Савандер В.И., Увакин М.А. **Физическая теория ядерных реакторов.**  
**Часть 1. Однородная размножающая среда и теория гетерогенных**  
**структур:** Учебное пособие. М.: МИФИ, 2007. – 200 с.

Настоящее пособие представляет собой обобщенный и дополненный курс «Физическая теория ядерных реакторов», читаемый на кафедре теоретической и экспериментальной физики ядерных реакторов более 40 лет. Основы курса были заложены такими выдающимися учеными-физиками как А.И. Лейпунский, С.М. Фейнберг, В.В. Орлов. Основной вклад в формирование материала в том виде, в котором он излагается в настоящее время, принадлежит профессору В.В. Хромову, долгое время читавшему лекции по данному курсу.

Пособие ориентировано на студентов вузов, специализирующихся по направлению «Ядерные энергетические установки», а также может быть полезно для научных работников, занимающихся теорией и методами расчета ядерных реакторов. Материал пособия предполагает знание основ курса «Теория переноса нейтронов».

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. А.М. Загребав

ISBN 978-5-7262-0855-8

© Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет), 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	5
Глава 1. Основы физики деления ядер. Преимущества и проблемы ядерной энергетики.....	6
1.1. Цепной процесс деления ядер.....	6
1.2. Основные компоненты ядерного реактора.....	19
1.3. Преимущества и проблемы ядерной энергетики .....	22
Глава 2. Бесконечная размножающая среда .....	24
2.1. Основные понятия цепного процесса деления ядер в размножающей среде.....	24
2.2. Моноэнергетическое описание процессов взаимодействия нейтронов с ядрами среды .....	26
2.3. Модель последовательных поколений нейтронов .....	31
2.4. Энергетическое распределение нейтронов в бесконечной однородной среде .....	35
2.5. Многогрупповое приближение.....	40
Глава 3. Физические особенности различных размножающих сред .....	46
3.1. Размножающая среда на быстрых нейтронах .....	46
3.2. Размножающая среда на промежуточных нейтронах.....	50
3.3. Размножающие среды с тепловым спектром нейтронов.....	53
3.4. Феноменологический подход к определению $K_{\infty}$ в размножающей среде на тепловых нейтронах .....	56
Глава 4. Формула четырех сомножителей.....	60
4.1. Коэффициент размножения на быстрых нейтронах .....	60
4.2. Вероятность избежать резонансного поглощения .....	63
4.3. Эффективное число вторичных нейтронов .....	91
4.4. Коэффициент использования тепловых нейтронов .....	92
Глава 5. Пространственные эффекты в размножающих средах .....	95
5.1. Условие критичности гомогенного реактора в одnogрупповом диффузионном приближении .....	95
5.2. Распределение плотности потока нейтронов в реакторах различных геометрий.....	100
5.3. Нестационарное уравнение диффузии нейтронов, эффективный коэффициент размножения .....	110
5.4. Условие критичности реактора с отражателем .....	117
5.5. Эффекты отражателя .....	121
5.6. Диффузионно-возрастное приближение.....	126
5.7. Многогрупповое диффузионное приближение.....	129

Глава 6. Гетерогенные структуры ядерных реакторов.....	140
6.1. Понятие бесконечно протяженной решетки.....	140
6.2. Метод эффективной гомогенизации .....	143
6.3. Эквивалентная ячейка.....	145
6.4. Физические особенности гетерогенного расположения топлива и замедлителя.....	149
Глава 7. Метод вероятностей первых столкновений.....	153
7.1. Интегральное описание свободно летящих нейтронов.....	153
7.2. Задача с объемным и поверхностным источниками.....	155
7.3. Средняя хорда блока.....	160
7.4. Локальные вероятности в приближении плоского потока (рациональное приближение) .....	161
7.5. Вероятностные уравнения в двухзонной ячейке.....	164
Глава 8. Физические особенности гетерогенных размножающих сред с тепловым спектром нейтронов.....	170
8.1. Коэффициент размножения на быстрых нейтронах в тесной и широкой решетках.....	170
8.2. Вероятность избежать резонансного поглощения. Модель «тонкого» и «толстого» блока .....	177
8.3. Коэффициент использования тепловых нейтронов в двухзонной ячейке .....	190
Список литературы .....	197
Приложение. Некоторые ядерные данные по основным изотопам.....	198

## ВВЕДЕНИЕ

Современная ядерная энергетика в общемировом объеме производства электроэнергии составляет не менее 16% с большим последующим потенциалом роста. Основное преимущество ядерной энергии заключается в высокой калорийной способности ядерного топлива.

Курс «Физическая теория ядерных реакторов» является базовым курсом по специальности «Ядерные энергетические установки» и включает в себя материал, содержащий описание физических процессов в ядерных реакторах. Курс тематически разделен на две части, каждая из которых изучается в течение семестра. В настоящем пособии излагается материал первой части курса. Он посвящен изучению физических основ цепного ядерного процесса деления в гомогенных и гетерогенных размножающих средах. Главное внимание уделяется понятию коэффициента размножения различных сред с делящимися материалами, условиям осуществления стационарного цепного ядерного процесса (условие критичности) и особенностям формирования пространственно-энергетического распределения нейтронов в ограниченных размножающих средах.

Глава 1 содержит вступительную часть, в которой кратко изложены вопросы физики деления тяжелых ядер и основные процессы взаимодействия нейтронов с веществом, играющие ключевую роль в цепном ядерном процессе деления. Выделены основные преимущества и главные проблемы ядерного способа получения энергии. Главы 2 и 3 посвящены изложению основ теории цепного ядерного процесса в бесконечной размножающей среде. Для однородной бесконечной среды на основе понятия поколения нейтронов определяется коэффициент размножения, рассматривается зависимость коэффициента размножения от состава размножающей среды. Условие критичности в размножающих средах конечных размеров, понятие эффективного коэффициента размножения и влияние отражателя на коэффициент размножения и на формирование пространственного распределения нейтронов рассматриваются в главе 4. В главе 5 описываются основные особенности гетерогенных структур активных зон ядерных реакторов и принципы гомогенизации гетерогенных сред. В главе 6 изложены основы метода вероятностей первых столкновения для анализа физических процессов в бесконечных периодических решетках. Глава 7 посвящена описанию размножающих свойств топливных ячеек методом вероятностей первых столкновений.

# Глава 1

## ОСНОВЫ ФИЗИКИ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР. ПРЕИМУЩЕСТВА И ПРОБЛЕМЫ ЯДЕРНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

### 1.1. Цепной процесс деления ядер

Преимущества и проблемы ядерных реакторов, основанных на процессе деления тяжелых ядер под действием нейтронов, определяются нейтронно-ядерными процессами в активной зоне ядерного реактора. Поэтому прежде чем начать изучение физики цепных процессов деления, необходимо кратко рассмотреть основы физики деления тяжелых ядер.

Различные способы получения энергии при ядерных и молекулярных процессах основаны на том, что любая квантовая система может находиться в различных энергетических состояниях. Наиболее прочными связями обладают квантовые системы в состоянии с наименьшей энергией. Как известно, атомное ядро состоит из протонов и нейтронов. Количество протонов в ядре определяет электрический заряд ядра  $Z$  и порядковый номер элемента в периодической системе элементов, а суммарное количество нейтронов и протонов определяют массовое число ядра  $A$ .

Масса покоящегося ядра меньше суммарной массы покоя составляющих его нуклонов на величину, называемую дефектом массы, равной  $\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - M(A, Z)$ . Связанная с этой массой энергия  $E_{\text{св}} = \Delta m \cdot c^2$  называется энергией связи нуклонов в ядре. Физически энергия связи представляет собой работу, которую необходимо совершить для разделения образующих ядро нуклонов.

Энергия связи на один нуклон  $\varepsilon = \frac{E_{\text{св}}}{A}$  определяет в среднем силу связи нуклонов в ядре. Чем выше энергия связи на один нуклон, тем меньше энергия системы нуклонов, образующих данное ядро, и тем прочнее они связаны в ядре. Характерная зависимость величины  $\varepsilon(A)$  от массового числа приведена на рис. 1.1.

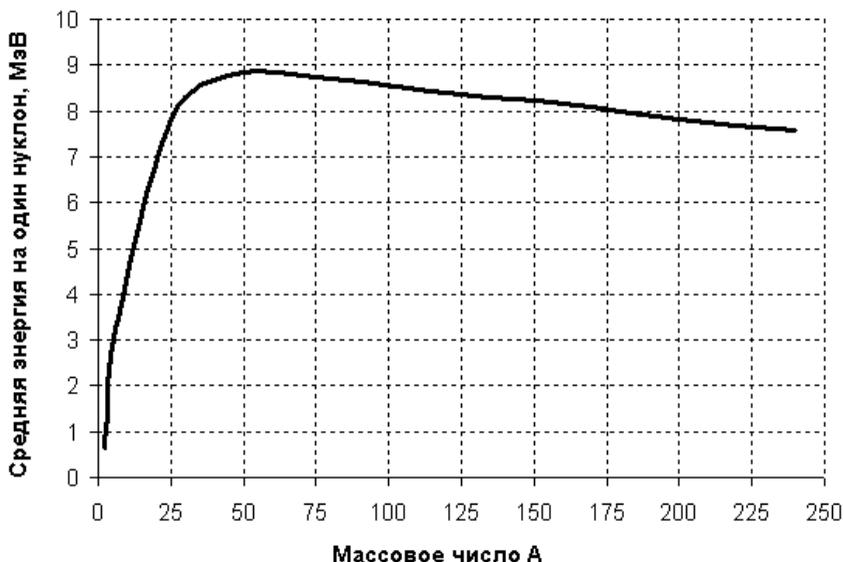


Рис. 1.1. Зависимость энергии связи на один нуклон от числа нуклонов в ядре

В качестве отличительной особенности этой зависимости выделим тот факт, что наиболее прочными являются ядра, массовые числа которых заключены в интервале значений  $50 < A < 150$ , для которых энергия связи на один нуклон более 8 МэВ. Для самых легких ядер энергия связи существенно ниже 8 МэВ, так что процесс слияния легких ядер (термоядерная реакция) является энергетически выгодным процессом. То же самое имеет место и для тяжелых ядер ( $A > 200$ ), энергия связи которых также меньше 8 МэВ. Так, например, для ядра  $^{238}\text{U}$  энергия связи на один нуклон составляет 7,6 МэВ, что примерно на 1 МэВ меньше, чем для наиболее прочного ядра  $^{62}\text{Ni}$ , для которого она составляет 8,8 МэВ.

Следовательно, квантовое состояние системы нуклонов, образующих тяжелое ядро ( $A, Z$ ), например в ядрах урана и тория, обладает большей энергией, чем состояние той же совокупности нуклонов, но образующих два ядра меньшей массы ( $A_1, Z_1$ ) и ( $A_2, Z_2$ ), для которых выполнено соотношение  $A_1 + A_2 = A$ ,  $Z_1 + Z_2 = Z$ .

Самопроизвольному распаду тяжелого ядра на два более прочных препятствует сила притяжения нуклонов в ядре. Для преодоления сил притяжения необходимо затратить работу, минимальное значение которой называется потенциальным барьером ядра  $E_{\text{пот}}$ . Таким образом, если сообщить тяжелому ядру энергию, величина которой больше потенциального барьера  $E > E_{\text{пот}}$ , то можно ожидать деление исходного ядра на два осколка, для каждого из которых энергия связи на один нуклон выше, чем для исходного ядра. Таковую энергию в ядро можно внести либо путем столкновения с элементарной частицей, либо путем поглощения  $\gamma$ -кванта соответствующей энергии.

Поскольку ядро обладает большим зарядом, то в качестве частиц, используемых для передачи энергии ядру, лучше всего подходят нейтральные частицы, то есть нейтроны. При попадании в ядро нейтрон не только передает ему свою кинетическую энергию, но и изменяет энергию связи. Таким образом, полная энергия возбуждения ядра при поглощении им нейтрона, равна  $E_{\text{в}} = E_{\text{к}} + \varepsilon$ , и, поэтому, при выполнении условия  $E_{\text{возб}} > E_{\text{пот}}$  становится возможной реакция деления ядра под действием нейтрона. Если для ядра, поглотившего нейтрон, энергия связи оказывается больше значения потенциального барьера  $\varepsilon > E_{\text{пот}}$ , то эти ядра могут делиться под действием нейтронов любой кинетической энергии. Такие ядра называются делящимися ядрами. Если же энергии связи недостаточно для преодоления потенциального барьера, то для осуществления реакции деления необходимо, чтобы кинетическая энергия ядра была бы выше некоторого минимального значения  $E_{\text{кин}} > E_{\text{пор}}$ , называемого порогом деления. Величина порога деления определяется из условия  $E_{\text{пор}} = E_{\text{пот}} - \varepsilon$ . Ядра, обладающие такими свойствами, называются пороговыми.

Свойства ядра быть делящимся или пороговым зависят от структуры ядра. Как известно, ядерные реакции проходят в два этапа. На первом этапе образуется составное ядро в возбужденном состоянии  ${}^A_Z X + {}^1_0 n = ({}^{A+1}_Z X)^*$ . Энергия связи этого нейтрона в ядре  $X_Z^{A+1}$  зависит от четности нуклонов в ядре. Если исходное ядро

имело нечетное число нуклонов, то поглощенный нейтрон будет образовывать парную связь с непарным нуклоном. Поскольку парная связь очень крепкая, то энергия связи этого нейтрона будет больше, чем когда поглощенный нейтрон оказывается непарным. Последнее имеет место, если исходное ядро оказывается с четным числом нуклонов.

Для ядер тяжелых элементов энергия связи парного нейтрона достаточна для преодоления потенциального барьера ядра. Следовательно, ядро  $^{235}\text{U}$ , имеющее нечетное число нуклонов, может делиться нейтронами любых энергий, в том числе и с энергией теплового движения ядер. В то же время ядра  $^{238}\text{U}$  и  $^{232}\text{Th}$  смогут разделиться только нейтронами с энергией выше порога деления, который для этих ядер равен соответственно у  $^{232}\text{Th} \sim 1,2$  МэВ,  $^{238}\text{U} \sim 1,0$  МэВ.

Таблица 1.1

**Энергия связи нейтронов для некоторых тяжелых ядер**

Элемент	Тип ядра	Энергия связи, МэВ
$^{233}\text{Th}$	четно-нечетный	4,79
$^{234}\text{U}$	четно-четный	6,84
$^{236}\text{U}$	четно-четный	6,55
$^{239}\text{U}$	четно-нечетный	4,80
$^{240}\text{Pu}$	четно-четный	6,53

**Энергия деления и нейтроны деления.** При делении тяжелого ядра, например, ядра  $^{235}\text{U}$ , образуются два ядра осколка, для которых энергия связи на один нуклон выше, чем для исходного. В результате такой ядерной реакции будет выделено количество энергии, пропорциональное числу нуклонов в исходном ядре и разности энергий связи осколков деления и исходного ядра. Общее количество нуклонов в ядре  $^{235}\text{U}$  составляет 235, а разность энергий связи примерно 1 МэВ, так что энергия деления будет составлять более 200 МэВ. Энергия деления, в расчете на одно ядро, приводит

к высокой теплотворной способности реакции деления, которая приблизительно в  $10^7$  раз выше, чем теплотворная способность органического топлива.

Кроме того, поскольку среднее число нейтронов на один протон в ядре возрастает с ростом заряда ядра, то осколки деления имеют избыток нейтронов на один протон. Избавление от излишнего числа нейтронов в ядрах осколков деления происходит по двум каналам. Во-первых, путем нейтронной радиоактивности, то есть испускания нейтронов возбужденными ядрами осколков. Во-вторых, путем превращения нейтрона в протон с испусканием  $\beta$ -частиц и нейтрино. Таким образом, в результате реакции деления выделяется энергия в количестве приблизительно 200 МэВ, появляются новые нейтроны в количестве двух–трех нейтронов на один акт деления и два радиоактивных осколка деления. Схема реакции деления приведена на рис. 1.2.

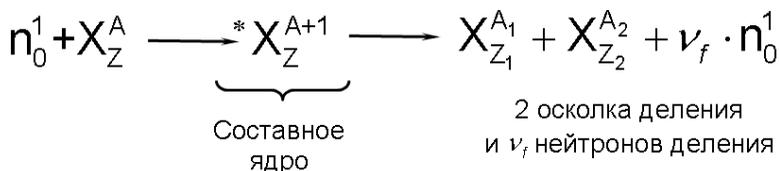


Рис. 1.2. Схема реакции деления

Наибольшая часть энергии деления проявляется в форме кинетической энергии осколков деления. При движении заряженных ядер – осколков деления, их кинетическая энергия передается атомам размножающей среды, нагревая ее. Нейтроны деления также уносят часть энергии деления в виде кинетической энергии. Кроме того, за счет радиоактивного распада осколков деления выделяется энергия в виде  $\beta$ -частиц,  $\gamma$ -квантов и нейтрино. Полный баланс энергии деления представлен в табл. 1.2.

## Примерное распределение энергии деления (МэВ)

Кинетическая энергия осколков деления	165
Мгновенное $\gamma$ -излучение	7,8
Кинетическая энергия нейтронов деления	5
$\gamma$ -излучение продуктов деления	6
$\beta$ -излучение продуктов деления	5
Нейтрино	11

Энергетический спектр нейтронов деления слабо зависит от делящегося нуклида и энергии нейтрона, вызвавшего деление. Средняя энергия нейтронов деления  $\sim 2$  МэВ, но в спектре деления были зарегистрированы нейтроны и с энергией свыше 10 МэВ. Спектр нейтронов деления представлен на рис. 1.3. Этот спектр может быть представлен аналитически в виде

$$\chi(E) = 0,77 \cdot \sqrt{E} \cdot e^{-E/1,29}. \quad (1.1.1)$$

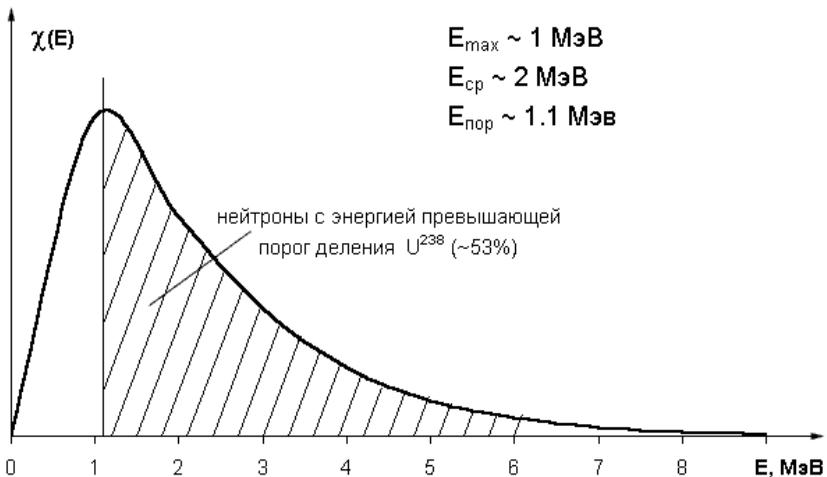


Рис. 1.3. Спектр нейтронов деления

Появляющиеся нейтроны деления имеют разную энергию. Соответственно, средняя энергия нейтронов деления составляет примерно 2 МэВ. Отметим, что эта энергия выше порога деления ядер  $^{238}\text{U}$  и  $^{232}\text{Th}$ , следовательно, эти нейтроны способны вызвать деление пороговых ядер. Среднее число нейтронов на один акт деления, обозначаемое как  $\nu_f$ , зависит во-первых, от типа ядра, и во-вторых, от энергии налетающего нейтрона. Величина  $\nu_f$  для нейтронов тепловых энергий составляет 2,42 для  $^{235}\text{U}$ ; 2,48 для  $^{233}\text{U}$ ; 2,86 для  $^{239}\text{Pu}$ .

**Осколки деления и продукты деления.** В результате процесса деления ядер, как правило, образуются два осколка деления разной массы. Крайне редко происходит деление на три осколка. Число различных осколков деления довольно велико, более 300 различных ядер. Распределение масс осколков при делении ядер имеет вид двугорбой кривой, которая представлена на рис. 1.4. Наибольший выход  $\sim 6\%$  относится к ядрам с массовыми числами в области 95 и 140. Заметим, что самое легкое и самое тяжелое ядро в продуктах деления из числа экспериментально зарегистрированных приходится на ядра с массовыми числами 72 и 161, а деление ядра на две равные части с атомной массой 118 маловероятно. В принципе, возможно деление на три и более осколков, но вероятности этих процессов существенно меньше, чем при делении на два осколка.

Как указывалось выше, осколки деления являются радиоактивными ядрами с малыми периодами полураспада. В течение малого промежутка времени (от долей секунды до нескольких минут) они испытывают радиоактивные распады различных типов и превращаются в долгоживущие или даже стабильные ядра. Эти ядра называются продуктами деления. Они в большинстве своем также являются радиоактивными, однако их периоды полураспада составляют от нескольких минут до нескольких десятков и сотен лет. Среди этих продуктов деления не менее 15% газообразных.

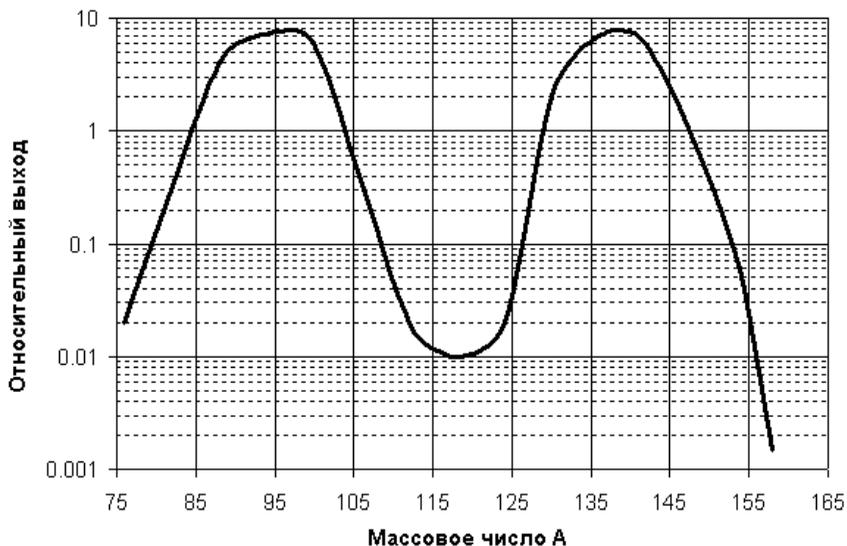


Рис. 1.4. Относительный выход осколков деления в зависимости от атомной массы образующихся осколков

В результате радиоактивного распада продуктов деления выделяется энергия, которая нагревает размножающую среду даже после прекращения процессов деления. Именно по этой причине хранилища отработанного ядерного топлива требуют наличия систем теплоотвода в течение довольно долгого промежутка времени после выгрузки из активных зон ядерных реакторов. Сразу после выгрузки из активной зоны необходима система принудительной циркуляции, а спустя несколько лет вполне достаточно простого конвективного теплообмена.

**Ядерные реакции взаимодействия нейтронов с ядрами.** Большинство ядерных реакций происходят в две стадии. Рассмотрим ядерные реакции нейтронов с ядрами, например,  $^{235}\text{U}$ . На первой стадии реакции образуется составное ядро, так называемое компаунд-ядро, которое представляет собой ядро  $^{236}\text{U}$  в возбужденном состоянии. Длительность возбужденного состояния ядра много больше времени, которое требуется нейтрону, чтобы пролететь сквозь ядро без реакции взаимодействия. Именно поэтому компаунд-ядро «забывает» исходную реакцию взаимодействия, а

возбужденное состояние может сниматься различными способами, которые и определяют конечный тип реакции взаимодействия нейтрона с ядром. Таких исходов для нашей реакции может быть четыре. Во-первых, возбужденное состояние может завершиться делением исходного ядра на два осколка, то есть в результате произойдет реакция деления. Во-вторых, возможен и другой путь, когда возбуждение снимается испусканием  $\gamma$ -кванта, энергия которого равна энергии возбужденного состояния, а ядро переходит в устойчивое состояние. Это так называемая реакция радиационного захвата нейтрона, в результате которой образуется новый изотоп урана и вылетает  $\gamma$ -квант достаточно высокой энергии. Реакции деления и радиационного захвата приводят к поглощению нейтрона.

Последние два исхода завершаются тем, что возбужденное ядро испускает нейтрон. Если при испускании нейтрона выполняется закон сохранения кинетической энергии, то происходит реакция упругого рассеяния нейтрона. В другом случае наряду с нейтроном испускается  $\gamma$ -квант и поэтому реакция называется реакцией неупругого рассеяния. Неупругое рассеяние нейтронов также является пороговой реакцией, то есть для ее осуществления энергия налетающего нейтрона должна быть выше определенного значения (порога реакции неупругого рассеяния). К реакциям порогового типа относится и реакция  $(n,2n)$ , при которой возбужденное ядро испускает два нейтрона. Вероятность этой реакции существенно ниже, чем реакции рассеяния. В результате реакции рассеяния нейтрон изменяет как направление своего движения, так и энергию, причем в большинстве случаев энергия нейтрона уменьшается.

Какого типа ядерная реакция произойдет в каждом конкретном случае определяется свойствами ядра и не зависит от внешних условий. Если произошло взаимодействие нейтрона с энергией  $E$  с ядром, то в принципе можно рассчитать только вероятности каждого типа взаимодействия  $p_i$ , которые могут реализоваться для этих условий. В ядерной физике для расчета интенсивности взаимодействия широко используется такая характеристика ядра, как микроскопическое поперечное сечение  $\sigma_i(E)$ , его можно трактовать как площадь поперечного сечения ядра для налетающего нейтрона

энергией  $E$ . Тогда микроскопическое поперечное сечение взаимодействия  $i$ -го типа (микросечение) определяется как

$$\sigma_i(E) = p_i \cdot \sigma_t(E). \quad (1.1.2)$$

На практике в экспериментах, как правило, измеряют парциальные сечения взаимодействия нейтронов с ядрами в зависимости от энергии нейтронов, а  $\sigma_t(E)$  – полное сечение взаимодействия, определяющееся путем суммирования парциальных микросечений:

$$\sigma_t(E) = \sum_i \sigma_i(E). \quad (1.1.3)$$

Тогда вероятности каждого типа взаимодействия (если таковое произошло) определяются как отношения микросечений:

$$p_i = \frac{\sigma_i(E)}{\sigma_t(E)}. \quad (1.1.4)$$

Наиболее типичным взаимодействием нейтронов с ядрами в диапазоне энергий  $0 < E_n < 10$  МэВ, характерном для спектра нейтронов в реакторах деления, являются:

- упругое рассеяние –  $\sigma_{el}$ ,
- неупругое рассеяние –  $\sigma_{in}$ ,
- поглощение нейтрона  $\sigma_a$  с последующем испусканием  $\gamma$ -квантов ( $\sigma_c$ ), протонов ( $\sigma_{np}$ ),  $\alpha$ -частиц ( $\sigma_{n\alpha}$ ) или с делением ядра ( $\sigma_f$ ).

Сечение поглощения и полного рассеяния нейтронов представляется суммой по всем типам соответствующих процессов:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_c + \sigma_{np} + \sigma_{n\alpha} + \sigma_f, \\ \sigma_s &= \sigma_e + \sigma_{in}. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Микросечения взаимодействия нейтронов с ядрами довольно сильно зависят от энергии нейтрона. С этой точки зрения, весь диапазон энергий нейтронов в ядерном реакторе разбивают на три области: область быстрых, промежуточных и тепловых нейтронов. Границы между областями чисто условные и процессы, характерные для каждой области, не исключаются в других областях:

- быстрой 0,1–10 МэВ;
- промежуточной 0,2 эВ–0,1 МэВ;
- тепловой 0,0–0,2 эВ.

**Быстрая область.** Энергия 99 % рождающихся при делении нейтронов лежит в быстрой области. Во-первых, полное сечение в этой области энергий более чем на 80% представляет собой сечение рассеяния, которое примерно в равных долях состоит из сечения упругого и неупругого рассеяния. Во-вторых, почти все тяжелые ядра делятся нейтронами в этой энергетической области (та ее часть, в которой энергии нейтронов деления  $>1$  МэВ). Сечение радиационного захвата снижается с ростом энергии, а сечение деления слегка растет. Порядок величин сечений  $\sigma_f \sim 1$  б,  $\sigma_c \sim 0,05$  б.

**Промежуточная область.** Резонансные явления составляют наиболее характерную особенность промежуточной области энергий, поэтому ее часто называют также и резонансной областью, а промежуточные нейтроны – резонансными. Низко расположенные резонансы ( $E_n < 100$  эВ) являются в основном резонансами радиационного захвата, а при высоких энергиях преобладают резонансы рассеяния. Для делящихся ядер имеют место резонансы деления. Так как резонансы радиационного захвата узкие, а между резонансами сечение радиационного захвата очень мало, то в целом в резонансной области энергий рассеяние преобладает над захватом, хотя резонансный захват оказывает существенное влияние на баланс замедляющихся нейтронов.

**Тепловые нейтроны.** В этой области энергий сечения деления и радиационного захвата тяжелых нуклидов изменяются от энергии по закону  $1/\sqrt{E}$ . Это приводит к тому, что сечение деления делящихся нуклидов в десятки и сотни раз больше, чем сечение рассеяния. Именно поэтому первые реакторы, работающие на природном уране, были реакторами на тепловых нейтронах. И в настоящее время подавляющее большинство энергетических реакторов являются реакторами на тепловых нейтронах.

Каждый тип взаимодействия нейтронов с ядрами размножающей среды играет определенную роль. Главную роль играет сечение деления, поскольку именно процесс деления приводит к большому высвобождению энергии. Процесс рассеяния нейтронов приводит в большинстве случаев к уменьшению энергии нейтронов, и этот процесс используется для получения нейтронов тепловых

энергий. Наибольший эффект замедления нейтронов достигается при взаимодействии нейтронов с легкими ядрами.

Реакция радиационного захвата в принципе приводит к потере нейтрона и потому снижает эффективность цепного процесса деления. Так, например, в реакции радиационного захвата на делящемся изотопе урана  $^{235}\text{U} + n \rightarrow ^{235}\text{U} + \gamma$ , во-первых, теряется нейтрон, во-вторых, вместо делящегося изотопа урана появляется пороговый изотоп. Однако другая реакция радиационного захвата на изотопе урана  $^{238}\text{U} + n \rightarrow (^{239}\text{U})^* \xrightarrow{\beta^-} (^{239}\text{Np})^* \xrightarrow{\beta^-} ^{239}\text{Pu} + \gamma$  приводит к образованию делящегося ядра плутония посредством двух радиоактивных превращений с периодом полураспада 2,3 суток. Это реакция приводит к воспроизводству ядерного горючего в реакторе. Более подробно процесс воспроизводства будет рассмотрен в последующих главах.

Итак, в результате реакции деления:

- выделяется энергия  $\sim 200$  МэВ на одно деление, основная доля которой  $\sim 170$  МэВ – это кинетическая энергия осколков деления, а остальное – кинетическая энергия нейтронов деления ( $\sim 5$  МэВ), энергия мгновенных  $\gamma$ -квантов ( $\sim 7$  МэВ), излучение осколков деления  $\gamma, \beta$  ( $\sim 16$  МэВ), нейтрино (10 МэВ);

- образуются новые нейтроны, которые могут осуществить деление новых ядер. Среднее число нейтронов на один акт деления  $\nu_f \sim 2,4-2,8$ . Как правило, эти нейтроны испускаются в момент деления, но очень малая часть из них испускается продуктами деления с запаздыванием, причем время запаздывания существенно больше, чем длительность процесса появления мгновенных нейтронов деления (так называемые запаздывающие нейтроны);

в результате ядерных реакций радиационного захвата нейтронов на ядрах с четным числом нуклонов ( $^{238}\text{U}, ^{232}\text{Th}$ ) образуются новые делящиеся нуклиды ( $^{239}\text{Pu}, ^{233}\text{U}$ ), что существенно расширяет сырьевую базу ядерной энергетики.

Зная количество энергии, выделяющейся на один акт деления, можно оценить теплотворную способность ядерного топлива. Если делится ядро с атомной массой  $A$  и выделяется энергия  $E_f$ , то теплотворная способность такого топлива  $q = \frac{E_f}{Am_c} \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right]$ . Обратная

величина дает количество топлива, необходимого для производства единицы тепловой энергии  $\xi = \frac{1}{q} \cdot 0,365 \frac{\text{Т}}{\text{ГВт} \cdot \text{год}}$ . Для так называемого условного топлива (органического) эта величина равна  $\frac{1,08 \cdot 10^{16} \text{Т}}{\text{ГВт} \cdot \text{год}}$ , что примерно в  $10^7$  раз больше, чем для ядерного топлива.

Превышение  $\nu_f$  над единицей создает возможность развития цепной реакции деления. Поскольку не все нейтроны поглощаются делящимися нуклидами, часть из них заканчивают свой жизненный цикл не оставив после себя поколения (захват неделяющимися компонентами среды; сырьевые изотопы, конструкционные материалы, органы управления), часть вылетает наружу (рис. 1.5).

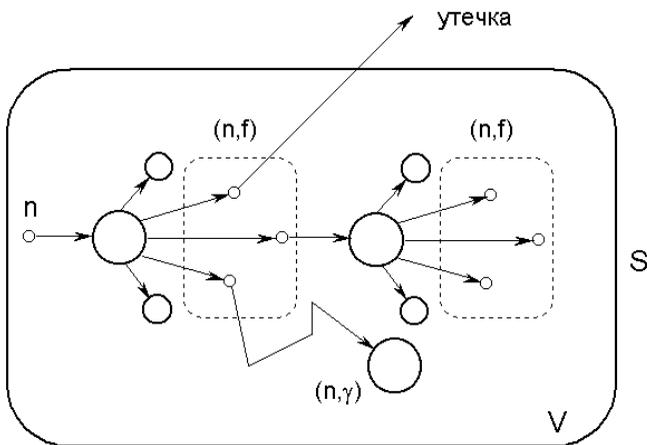


Рис. 1.5. Цепной процесс деления

Соотношение реакций деления и захвата определяется величиной  $\alpha = \frac{1 - w_f}{w_f} = \frac{\sigma_c}{\sigma_f}$ , которая в сильной мере зависит от энергии

нейтронов. Для области тепловых энергий  $\alpha_{233\text{U}} = 0.09$ ,  $\alpha_{235\text{U}} = 0.17$ ,  $\alpha_{239\text{Pu}} = 0.37$ .

Если делящийся нуклид поглощает небольшую долю нейтронов деления, то цепная реакция будет затухать. Поэтому наряду со средним числом нейтронов на один акт деления  $\nu_f$  используют величину, равную числу нейтронов деления (новых нейтронов) в расчете на один поглощенный делящимся нуклидом  $\nu_{ef}$ :

$$\nu_{ef} = \frac{\nu_f(E) \cdot \sigma_f(E)}{\sigma_f(E) + \sigma_c(E)} = \frac{\nu_f(E)}{1 + \alpha(E)}. \quad (1.1.6)$$

Величина  $\nu_{ef}$  зависит от энергии нейтрона, вызвавшего деление. Можно отметить, что с повышением энергии нейтронов, вызывающих деление, растет с одной стороны величина  $\nu_f(E)$ , а с другой стороны падает величина  $\alpha(E)$ . Так, например, для  $^{239}\text{Pu}$  в области нейтронов спектра деления  $\nu_{ef} = 3.0$ ,  $\alpha \approx 0.9$ .

Из всего сказанного следует, что можно создать условия, когда цепная реакция будет стационарной. Характер цепной реакции зависит от баланса нейтронов, то есть от состава и размеров размножающей среды.

Реакции, в результате которых образуются искусственные делящиеся нуклиды ( $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{233}\text{U}$ ), называются реакциями воспроизводства ядерного топлива. Нуклиды, которые при поглощении нейтронов превращаются в делящиеся, называются сырьевыми ( $^{238}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$ ). Композицию из делящихся и сырьевых нуклидов, используемую в реакторе для производства энергии и делящихся нуклидов, будем называть ядерным топливом.

## **1.2. Основные компоненты ядерного реактора**

Ядерный реактор представляет собой систему, в которой осуществляется цепной процесс деления нейтронами тяжелых ядер. Ядерные реакторы предназначены для выработки электрической и тепловой энергии, для наработки различных трансурановых эле-

ментов, для научно-экспериментальных целей и прочих задач. В настоящее время наиболее широко используются реакторы энергетического назначения, которые представляют собой ядерную установку (ЯЭУ), оснащенную необходимым оборудованием.

Как уже говорилось выше, в основном, энергия деления тяжелых ядер ( $\sim 200$  МэВ) представляет собой кинетическую энергию движения осколков деления ( $\sim 170$  МэВ), торможение которых в ядерном топливе приводит к выделению тепловой энергии. Объем, где происходит цепной процесс деления ядер, называется активной зоной. Выделяющуюся тепловую энергию требуется отводить из активной зоны, поэтому необходимым компонентом ядерного реактора является теплоноситель – вещество, забирающее тепловую энергию и передающее ее рабочему телу энергетической установки, где происходит преобразование тепловой энергии в электрическую. В принципе, процесс деления может осуществляться нейтронами разных энергий, но наиболее интенсивно этот процесс осуществляется нейтронами с энергией теплового движения ядер. Для преобразования нейтронов деления, средняя энергия которых составляет порядка 2 МэВ, в тепловые нейтроны с энергией порядка 0.1 эВ требуется вещество, эффективно замедляющее нейтроны. Поэтому реакторы на тепловых нейтронах имеют в своем составе замедлитель. Для экономного использования нейтронов активная зона окружена отражателем, способствующим возвращению вылетающих нейтронов в активную зону и, таким образом, сохраняя их для цепного процесса. Для защиты персонала ЯЭУ от различных излучений, сопутствующих ядерным превращениям в реакторе, активная зона окружается биологической защитой. Для управления цепным процессом деления ядер в реакторе размещаются органы управления, как правило, в виде поглощающих стержней. Для избежания разрушения биологической защиты и монтажных конструкций реактора применяется тепловая защита – вещество со слабыми теплопроводящими свойствами. Принципиальная схема ядерного реактора приведена на рис. 1.6.

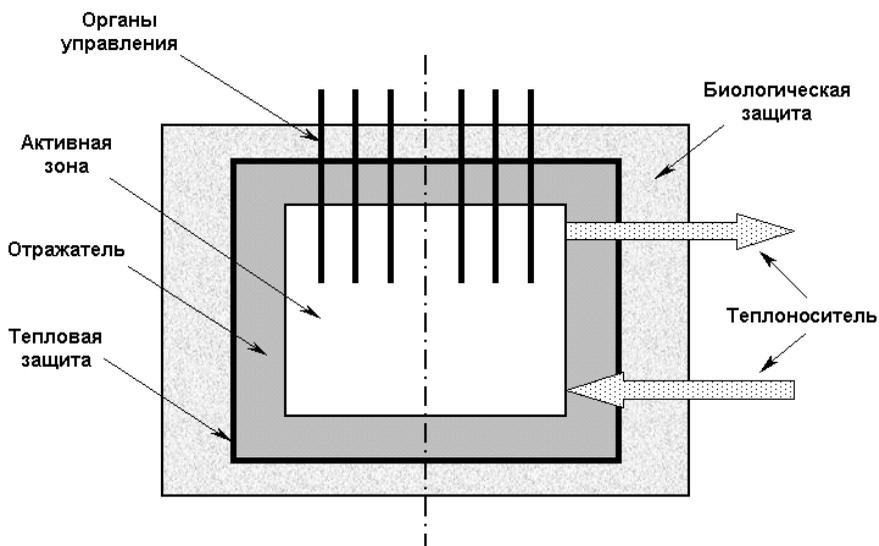


Рис. 1.6. Принципиальная схема ядерного реактора

В настоящее время области применения ядерных реакторов довольно многообразны. Можно выделить следующие основные направления:

1. Исторически первое применение ядерных реакторов – наработка оружейных материалов ( $^{239}\text{Pu}$ ,  $^3\text{H}$ ) для производства ядерного оружия. Такие реакторы принято называть промышленными реакторами.

2. Применение военного назначения – транспортные установки для подводных лодок и авианосцев, которые привели к созданию атомных ледоколов и крупных транспортных кораблей.

3. Энергетические ядерные реакторы – для производства электроэнергии, бытового и промышленного тепла низкого температурного потенциала.

4. Исследовательские реакторы (источники нейтронов) используются для материаловедческих, медицинских (радиоизотопные источники) и прочих научно-исследовательских целей.

5. Малые автономные энергетические установки длительного автономного пользования, в том числе и энергоустановки для космических объектов.

Широкое применение ядерных реакторов обусловило высокие темпы развития ядерных технологий, что связано с растущими потребностями человечества в эффективных и безопасных способах получения энергии.

### *1.3. Преимущества и проблемы ядерной энергетики*

История ядерной энергетики началась в открытия Отто Ганом в конце 1938 года процесса деления ядер урана под действием нейтронов. Позднее, существо явления было объяснено Лизой Мейтнер. В 1940 году советские физики Ю.Б. Харитон и Я.Б. Зельдович развили теорию цепной реакции деления. Первый ядерный котел был запущен в США в декабре 1942 года под руководством Энрико Ферми. Первый в Европе реактор был сооружен в Москве в ИАЭ им. И.В. Курчатова (ныне РНЦ КИ) под руководством И.В. Курчатова. В 1954 году в Обнинске была построена и пущена в эксплуатацию первая в мире АЭС мощностью 5 МВт, которая выведена из эксплуатации. В настоящее время доля ядерной энергетики в мировом производстве электроэнергии составляет около 16%. В России доля ядерной электроэнергетики составляет в настоящее время (2007 г.) почти 17% от всего производства электроэнергии.

Основным преимуществом ядерного способа производства энергии перед органическими энергоносителями является высокая калорийность топлива. Теплотворная способность топлива АЭС более чем в миллион раз выше, чем калорийность органического топлива. Отсюда следует целый ряд важных преимуществ, которые дает ядерная энергетика:

- Малые затраты на транспортировку топлива – так называемая топливная составляющая. Для ТЭЦ и ГРЭС доля транспортных расходов по перевозке топлива достигает порядка 90 %, а для АЭС – меньше 20 %.

- Малые расходы топлива – минимальное количество отходов ядерного производства энергии. В количественном отношении отходы АЭС примерно в 100 раз меньше по массе, чем отходы электростанций на органическом топливе. Отдельно отметим, что все отходы АЭС жестко локализованы в тепловыделяющих элементах, что позволяет избежать попадания их в окружающую среду.

- Для ядерного топлива не нужен окислитель – не потребляется кислород и не выбрасывается  $\text{CO}_2$ , продукты горения и соответствующие загрязнители.

- В процессе работы реактора происходит воспроизводство ядерного топлива – ни один другой источник энергии не способен при работе воспроизводить свои энергоресурсы. С учетом ядерного воспроизводства топлива ядерная энергетика имеет практически неограниченную сырьевую базу.

Перечисленные факторы определяют тот большой интерес, который проявляется в глобальных проектах развития ядерной энергетики. Однако ни в одной области человеческой деятельности нет только положительных факторов. И у ядерной энергетики есть свои негативные моменты. Это, в первую очередь, специфика отходов ядерного производства энергии – радиоактивность. В процессе деления ядер топлива образуется большое количество разнообразных элементов и их изотопов, среди которых большинство радиоактивных с различными периодами полураспада от долей секунды до миллионов лет.

Поэтому преимущества ядерного способа производства энергии будет в полной мере проявляться, если будет решена проблема безопасности ядерной энергетики для биосферы вместе со всеми сопутствующими производствами. Можно выделить следующие основные направления повышения безопасности ядерной энергетики:

- Гарантированная безопасность ядерных реакторов – исключение возможности возникновения серьезных аварий.

- Проблема длительного хранения радиоактивных отходов.

- Проблема захоронения или трансмутации долгоживущих радиоактивных ядер.

- Немаловажное значение имеет проблема нераспространения ядерных делящихся материалов военного применения, особенно актуально проявившаяся в последнее время в связи с угрозой терроризма.

При соответствующем научном и материальном потенциале выполнение всех поставленных задач представляется весьма реальным. Ядерная энергетика – реальный способ обеспечения энергией растущих потребностей человечества. В завершение необходимо отметить, что нет физических законов, препятствующих созданию широкомасштабной и безопасной ядерной энергетики будущего.

## Глава 2 БЕСКОНЕЧНАЯ РАЗМНОЖАЮЩАЯ СРЕДА

### *2.1. Основные понятия цепного процесса деления ядер в размножающей среде*

Тот факт, что при делении ядер, осуществляемого нейтронами, появляются вторичные нейтроны как продукты реакции деления, позволяет осуществлять цепной процесс деления в среде, содержащей делящиеся ядра. Такие среды в дальнейшем будем называть размножающими, поскольку в них возможен самоподдерживающийся процесс воспроизводства нейтронов. Поскольку для делящихся ядер число вторичных нейтронов на один поглощенный в ядерной реакции, то есть величина  $\nu_{ef} > 1$ , то цепной процесс деления может носить стационарный характер с выделением большого количества энергии в течение длительного времени.

При рассмотрении цепных процессов все нейтроны в размножающей среде в любой момент времени можно разделить на отдельные поколения. Нейтрон каждого поколения, участвующий в цепном процессе деления в активной зоне реактора, проходит следующий жизненный цикл:

- рождается в реакции деления,
- некоторое время движется в активной зоне, рассеиваясь на ядрах среды (замедляется и диффундирует),
- затем либо порождает новый акт деления и нейтроны следующего поколения, либо теряется без порождения новых нейтронов, например в реакции радиационного захвата, либо покидает пределы размножающей среды.

Вначале рассмотрим упрощенную модель цепного процесса. Во-первых, размножающая среда представляется бесконечной, однородной и изотропной. Во-вторых, всем нейтронам в среде приписывается одна и та же энергия (так называемая односкоростная модель). В третьих, предполагается, что все нейтроны каждого поколения рождаются одновременно, живут определенное время  $\tau$  (время жизни одного поколения) и одновременно заканчивают свой жизненный цикл, порождая нейтроны следующего поколения. В однородной и бесконечной среде все единичные объемы среды

равноправны. Поэтому для описания нейтронов каждого поколения воспользуемся функцией плотности нейтронов, которая определяется как число нейтронов в единице объема.

Изотропность среды и использование односкоростной модели позволяет считать все нейтроны равноправными с точки зрения нейтронно-ядерных процессов в среде. Для такой модели цепного процесса введем понятие коэффициента размножения нейтронов  $K$ , как отношение числа нейтронов последующего поколения в единичном объеме среды  $n^{(i+1)}$  к числу нейтронов предыдущего поколения в том же объеме  $n^{(i)}$ :

$$K = \frac{n^{(i+1)}}{n^{(i)}}. \quad (2.1.1)$$

Коэффициент размножения определяет характер поведения нейтронной плотности в размножающей среде. Для выбранной модели изменение во времени плотности нейтронов будет описываться кусочно-постоянной функцией времени

$$n(t) = K^m \cdot n(0), \quad m \cdot \tau \leq t < (m+1) \cdot \tau. \quad (2.1.2)$$

Однако если время жизни поколения мало, а коэффициент размножения не сильно отличается от единицы, временное поведение плотности нейтронов можно описать непрерывной функцией времени. Пусть в момент времени  $t$  плотность нейтронов в среде была равна  $n(t)$ , тогда через промежуток времени, равный времени жизни поколения  $\tau$ , в соответствии с определением коэффициента размножения их число будет увеличено в  $K$  раз:

$$n(t + \tau) = K \cdot n(t). \quad (2.1.3)$$

Рассмотрим приращение числа нейтронов за время жизни одного поколения  $\tau$ :

$$\Delta n = n(t + \tau) - n(t) = (K - 1) \cdot n(t). \quad (2.1.4)$$

Если  $\tau$  мало, то приращение можно представить через производную функции плотности потока:

$$n(t + \tau) - n(t) \approx \frac{dn(t)}{dt} \cdot \tau. \quad (2.1.5)$$

Таким образом, можно получить уравнение временного изменения плотности нейтронов в размножающей среде – эволюционное уравнение:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{K - 1}{\tau} \cdot n(t). \quad (2.1.6)$$

Решением этого уравнения является экспоненциальная функция, показатель которой зависит от коэффициента размножения и от времени жизни поколения:

$$n(t) = n(0) \cdot \exp\left(\frac{K - 1}{\tau} \cdot t\right). \quad (2.1.7)$$

Очевидно, что при  $K = 1$  получим  $n(t) = \text{const}$ , то есть, в такой размножающей среде будет осуществляться стационарный процесс смены нейтронных поколений. При этом самую размножающую среду будем называть критической. Если же выполнено условие  $K < 1$ , то функция  $n(t)$  будет затухающая, и в этом случае говорят, что данная размножающая среда подкритическая. В противоположном случае, когда  $K > 1$ ,  $n(t)$  будет возрастающей функцией, а сама размножающая система будет называться надкритической.

## ***2.2. Моноэнергетическое описание процессов взаимодействия нейтронов с ядрами среды***

В рассмотренной модели цепного процесса размножения нейтронов предполагалось, что все нейтроны в среде ничем не отличаются друг от друга и каждое поколение нейтронов рождается и погибает одновременно. В реальной ситуации в размножающей

среде в каждый момент времени присутствуют нейтроны разных поколений, причем и сами нейтроны различаются местоположением, энергией и направлением движения. Наша задача – определить коэффициент размножения для бесконечной однородной размножающей среды с учетом сделанных замечаний. Как известно, баланс нейтронов в такой среде описывается газокинетическим уравнением Больцмана. Для бесконечной, однородной и изотропной среды функция распределения плотности потока нейтронов не будет содержать пространственной и угловой переменной, так что уравнение переноса нейтронов будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(t, E)}{\partial t} + \Sigma_t \cdot \Phi(t, E) = \int_0^{\infty} dE' \cdot \Sigma_s(E' \rightarrow E) \cdot \Phi(t, E') + \\ + \chi(E) \cdot \int_0^{\infty} dE' \cdot \nu_f(E') \cdot \Sigma_f(E') \cdot \Phi(t, E'). \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

В уравнении (2.2.1)  $n(t, E)$  – плотность нейтронов с энергией  $E$ , а  $\Phi(t, E) = V(E) \cdot n(t, E)$  – функция распределения плотности потока нейтронов, которая определяет число нейтронов на единичный интервал энергий вблизи энергии  $E$ , пересекающих в единицу времени сферу единичного радиуса.

Будем искать решение нестационарной задачи в разделенных переменных  $n(t, E) = A(t) \cdot n(E)$ . Интегрируя (2.2.1) по энергетической переменной  $E$ , получим уравнение для амплитудного множителя  $A(t)$ , который определяет временное поведение плотности нейтронов:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} \cdot \int_0^{\infty} n(E) dE + A(t) \cdot \int_0^{\infty} \Sigma_t(E) \cdot V(E) \cdot n(E) dE = \\ = A(t) \cdot \int_0^{\infty} dE \int_0^{\infty} dE' \cdot \Sigma_s(E' \rightarrow E) \cdot V(E') \cdot n(E') + \\ + A(t) \cdot \int_0^{\infty} dE \cdot \chi(E) \int_0^{\infty} dE' \cdot \nu_f(E') \cdot \Sigma_f(E') \cdot V(E') \cdot n(E'). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Если функцию распределения нейтронов по энергии  $n(E)$  нормировать таким образом, что  $\int_0^{\infty} n(E) \cdot dE = 1$ , то в этом случае амплитудный множитель  $A(t)$  будет иметь смысл полного числа нейтронов всех энергий в единице объема среды. Введем в рассмотрение усредненные по всей совокупности нейтронов, то есть усредненные по энергиям, макроконстанты различных процессов нейтронов с ядрами среды:

$$\frac{\int_0^{\infty} \Sigma_t(E) \cdot V(E) \cdot n(E) dE}{\int_0^{\infty} V(E) \cdot n(E) dE} = \bar{\Sigma}_t, \quad \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) dE = \Sigma_s(E'),$$

$$\frac{\int_0^{\infty} \Sigma_s(E) \cdot V(E) \cdot n(E) dE}{\int_0^{\infty} V(E) \cdot n(E) dE} = \bar{\Sigma}_s, \quad \int_0^{\infty} V(E) \cdot n(E) dE = \bar{V}, \quad (2.2.3)$$

$$\frac{\int_0^{\infty} v_f(E) \cdot \Sigma_f(E) \cdot V(E) \cdot n(E) dE}{\int_0^{\infty} V(E) \cdot n(E) dE} = \bar{v}_f \bar{\Sigma}_f.$$

С учетом введенных обозначений, получим нестационарное уравнение для временного изменения полного числа нейтронов в единице объема размножающей среды:

$$\frac{1}{\bar{V}} \cdot \frac{dA(t)}{dt} = (\bar{v}_f \bar{\Sigma}_f - \bar{\Sigma}_a) \cdot A(t), \quad (2.2.4)$$

где  $\bar{\Sigma}_a = \bar{\Sigma}_t - \bar{\Sigma}_s$  – усредненное макросечение поглощения по спектру нейтронов размножающей среды. Поскольку рассматривается сразу вся совокупность нейтронов, независимо от их энергии, то есть все нейтроны среды как бы объединили в одну группу, то по-

лученное уравнение носит название одногруппового приближения. Решение этого уравнения имеет вид

$$A(t) = A(0) \cdot e^{\alpha t},$$

$$\alpha = \frac{1}{\tau} \cdot \left( \frac{\overline{v_f \Sigma_f}}{\overline{\Sigma_a}} - 1 \right), \quad \tau = \frac{1}{\overline{V} \cdot \overline{\Sigma_a}}. \quad (2.2.5)$$

Сравнивая выражения (2.2.5) и (2.1.7), получим, что коэффициент размножения для однородной бесконечной среды можно представить в виде  $K = \frac{\overline{v_f \Sigma_f}}{\overline{\Sigma_a}}$ , а среднее время жизни нейтронов в од-

ногрупповом приближении имеет вид  $\tau = \frac{\lambda_a}{\overline{V}}$ ,  $\lambda_a = \frac{1}{\overline{\Sigma_a}}$ .

Таким образом, в среде, где одновременно присутствуют нейтроны разных поколений, коэффициент размножения можно определить как отношение скорости рождений нейтронов в размножающей среде в данный момент нейтронов к скорости поглощения нейтронов в тот же момент времени нейтронов. Обычно, для бесконечной среды коэффициент размножения обозначается  $K_\infty$ .

Итак, если  $K_\infty = 1$ , то бесконечная размножающая среда называется критической, и в ней будет осуществляться стационарный процесс размножения нейтронов. Если  $K_\infty > 1$ , то среда называется надкритической, поскольку в ней со временем будет происходить нарастание нейтронного потока с периодом, равным  $T = \frac{\tau}{K_\infty - 1}$ .

Если же  $K_\infty < 1$ , то процесс изменения числа нейтронов в среде затухающий и происходит снижение общего числа нейтронов, первоначально находящихся в размножающей среде.

Рассмотрим случай, когда в среде присутствует внешний источник нейтронов постоянной мощности, не связанный с реакцией деления в среде. Предположим, что этот источник распределен равномерно по объему среды и порождает  $q$  нейтронов в единицу времени в единице объема. В этом случае уравнение для амплитуды потока нейтронов будет иметь вид

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{K_\infty - 1}{\tau} \cdot A(t) + q. \quad (2.2.6)$$

Как известно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения представляется в виде суммы двух слагаемых  $A(t) = A_0(t) + A_1(t)$ , где  $A_0(t)$  – общее решение однородного уравнения (2.2.7), а  $A_1(t)$  – частное решение неоднородного уравнения (2.2.8)

$$\frac{dA_0(t)}{dt} = \frac{K_\infty - 1}{\tau} \cdot A_0(t), \quad (2.2.7)$$

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = \frac{K_\infty - 1}{\tau} \cdot A_1(t) + q. \quad (2.2.8)$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.2.6) будет иметь вид

$$A(t) = A_0 \cdot e^{\frac{K_\infty - 1}{\tau} \cdot t} + \frac{q \cdot \tau}{1 - K_\infty}. \quad (2.2.9)$$

Для критической размножающей среды  $K_\infty = 1$  и число нейтронов в единице объема будет изменяться по линейному закону  $A(t) = A(0) + qt$ , то есть в критической среде с внешним источником стационарный режим работы невозможен. Очевидно, что и в надкритической среде ( $K_\infty > 1$ ) число нейтронов в единичном объеме также будет возрастать со временем, но уже по экспоненциальному закону. Однако если размножающая среда подкритическая ( $K_\infty < 1$ ), то в ней можно осуществить стационарный процесс, поскольку выражение (2.2.9) имеет асимптотическое стационарное решение  $A(t) = \frac{q \cdot \tau}{1 - K_\infty}$ , причем полное число нейтронов в единице объема среды зависит как от мощности внешнего источника  $q$ , так и от степени близости коэффициента размножения  $K_\infty$  к единице. Величина  $1/(1 - K_\infty)$  носит название коэффициента умножения

мощности источника. Именно на этом принципе основано действие подкритических систем с внешним источником, в качестве которого рассматриваются ускорители протонов.

### *2.3. Модель последовательных поколений нейтронов*

Ранее были рассмотрены две модели описания цепного ядерного процесса. Для простейшей модели сменяющихся поколений величина коэффициента размножения была определена как отношение числа нейтронов в двух последовательных поколениях. Для однородной бесконечной среды, где не выделялось различных поколений нейтронов, было получено выражение коэффициента размножения в виде отношения усредненных макроконстант среды. Можно показать, что оба эти выражения для коэффициента размножения эквивалентны.

Как уже отмечалось, в реальной ситуации в любой момент времени в среде присутствуют нейтроны разных поколений. Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  в размножающей среде появилось  $Q_0$  нейтронов в единице объема. Будем считать их нейтронами нулевого поколения. Рассмотрим развитие цепного процесса от поколения к поколению, при этом под поколением нейтронов понимаются все нейтроны, рожденные от нейтронов предыдущего поколения, при этом будем рассматривать нейтроны всех энергий, принадлежащих к данному поколению

$$n(t) = \int_0^{\infty} n(E, t) dE .$$

В общем случае первоначальный источник нейтронов может иметь произвольное распределение нейтронов по энергиям. Очевидно, что и каждое поколение нейтронов будет иметь свой собственный энергетический спектр нейтронов. Однако, как будет показано в дальнейшем, в асимптотике временного процесса энергетическое распределение нейтронов в каждом поколении будет идентичным. Поэтому, не умаляя общности, предположим, что энергетическое распределение нейтронов источника соответствует асим-

птогическому. Тогда одогрупповые макроконстанты  $\bar{\Sigma}_a$ ,  $\overline{v_f \Sigma_f}$ ,  $\bar{V}$  во всех поколениях будут также одинаковыми.

Временное поведение нейтронов нулевого поколения будет удовлетворять уравнению.

$$\begin{aligned} \frac{dN^{(0)}(t)}{dt} &= -\bar{\Sigma}_a \cdot \bar{V} \cdot N^{(0)}(t), \\ N^{(0)}(0) &= Q_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N^{(0)}(t) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Часть нейтронов нулевого поколения будет поглощена ядрами среды и вызовет их деление, что и даст начало следующему поколению –  $n^{(1)}(t)$ . Для нейтронов первого поколения уравнение временного изменения их плотности в среде имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dN^{(1)}(t)}{dt} &= -\bar{\Sigma}_a \cdot \bar{V} \cdot N^{(1)}(t) + \overline{v_f \Sigma_f} \cdot \bar{V} \cdot N^{(0)}(t), \\ N^{(1)}(0) &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N^{(1)}(t) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

В общем случае, для произвольного  $n$ -го поколения нейтронов можно записать аналогичное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{dN^{(i)}(t)}{dt} &= -\bar{\Sigma}_a \cdot \bar{V} \cdot N^{(i)}(t) + \overline{v_f \Sigma_f} \cdot \bar{V} \cdot N^{(i-1)}(t), \\ N^{(i)}(0) &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N^{(i)}(t) = 0, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Каждое поколение объединяет все нейтроны от момента их рождения до момента исчезновения (поглощения), и каждое новое поколение служит источником следующего. Временное поведение различных поколений нейтронов во времени представлено на рис. 2.1.

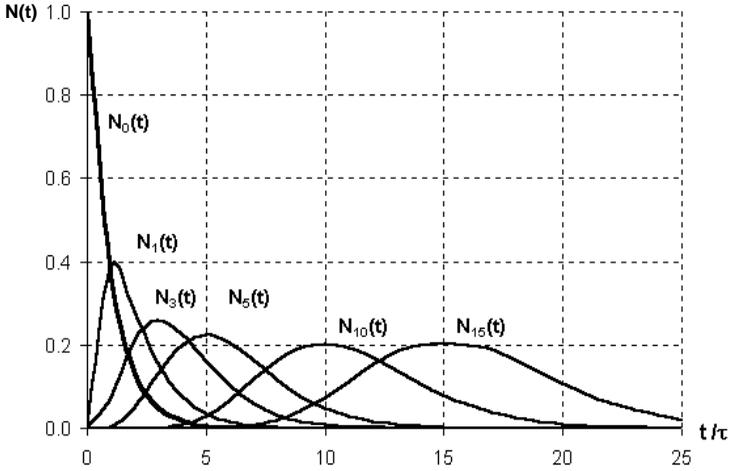


Рис. 2.1. Последовательные поколения нейтронов

Полное число нейтронов в каждом поколении будет равно интегралу по времени от источника этих нейтронов

$$Q^{(i)} = \int_0^{\infty} \overline{v_f \Sigma_f} \cdot \bar{V} \cdot N^{(i-1)}(t) dt.$$

Проинтегрируем каждое уравнение

для плотности нейтронов в поколении по времени в интервале  $(0, \infty)$  и введем в рассмотрение интегральную по времени плотность

$$\int_0^{\infty} dt \cdot N^{(i)}(t) = N^{(i)}:$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} dt \cdot \frac{dN^{(0)}(t)}{dt} = N^{(0)}(t) \Big|_0^{\infty} = N^{(0)}(\infty) - N^{(0)}(0) = -N^{(0)}(0) = -Q_0, \\ \int_0^{\infty} dt \cdot \frac{dN^{(1)}(t)}{dt} = N^{(1)}(\infty) - N^{(1)}(0) = 0, \\ \dots, \\ \int_0^{\infty} dt \cdot \frac{dN^{(i)}(t)}{dt} = N^{(i)}(\infty) - N^{(i)}(0) = 0. \end{array} \right.$$

Запишем соотношения для последовательных поколений нейтронов  $Q^{(i)}$ :

$$\begin{aligned}
 Q^{(0)} = Q_0 = \bar{\Sigma}_a \cdot \bar{V} \cdot N^{(0)}, \quad \Phi^{(0)} = \bar{V} \cdot N^{(0)}, \quad \rightarrow Q^{(0)} = \bar{\Sigma}_a \cdot \Phi^{(0)}, \\
 -\bar{\Sigma}_a \cdot \Phi^{(1)} + \overline{\nu_f \Sigma_f} \cdot \Phi^{(0)} = 0, \quad \bar{\Sigma}_a \cdot \Phi^{(1)} = \overline{\nu_f \Sigma_f} \cdot \Phi^{(0)}, \quad Q^{(1)} = \overline{\nu_f \Sigma_f} \cdot \Phi^{(0)}, \\
 \dots, \\
 \bar{\Sigma}_a \cdot \Phi^{(i)} = \overline{\nu_f \Sigma_f} \cdot \Phi^{(i-1)}, \quad Q^{(i)} = \overline{\nu_f \Sigma_f} \cdot \Phi^{(i-1)} = \bar{\Sigma}_a \cdot \Phi^{(i)}.
 \end{aligned}$$

По определению коэффициент размножения есть отношение общего числа нейтронов в двух последовательных поколениях

$$K_\infty = \frac{Q^{(i)}}{Q^{(i-1)}}. \text{ Учитывая полученные выше соотношения, запишем:}$$

$$Q^{(i)} = \overline{\nu_f \Sigma_f} \cdot \Phi^{(i-1)}, \quad Q^{(i-1)} = \overline{\nu_f \Sigma_f} \cdot \Phi^{(i-2)} = \bar{\Sigma}_a \cdot \Phi^{(i-1)}.$$

В результате получим выражение для коэффициента размножения в бесконечной размножающей среде:

$$K_\infty = \frac{\overline{\nu_f \Sigma_f} \cdot \Phi^{(i-1)}}{\bar{\Sigma}_a \cdot \Phi^{(i-1)}} = \frac{\overline{\nu_f \Sigma_f}}{\bar{\Sigma}_a}. \quad (2.3.4)$$

Таким образом, в итоге получили эквивалентность обоих выражений для коэффициента размножения в бесконечной размножающей среде. Отметим два важных следствия из полученных соотношений. Во-первых, отношение интегральных потоков нейтронов для двух последовательных поколений также равно коэффициенту размножения:

$$\frac{\Phi^{(i)}}{\Phi^{(i-1)}} = \frac{Q^{(i)}}{Q^{(i-1)}} = K_\infty. \text{ Во-вторых, баланс нейтронов}$$

для одного поколения выглядит следующим образом:

$$-\bar{\Sigma}_a \Phi^{(i)} + \frac{\overline{\nu_f \Sigma_f} \cdot \Phi^{(i)}}{K_\infty} = 0. \text{ Физически это означает равенство коли-}$$

чества рожденных нейтронов и количества поглощенных.

## 2.4. Энергетическое распределение нейтронов в бесконечной однородной среде

Для вычисления коэффициента размножения однородной бесконечной среды необходимо иметь усредненные по энергетическому спектру нейтронов макроконстанты среды  $\overline{\nu_f \Sigma_f}$  и  $\overline{\Sigma_a}$ . Таким образом, для бесконечной однородной среды задача вычисления коэффициента размножения сводится к задаче определения энергетического спектра нейтронов в этой среде. Для получения уравнения, которому удовлетворяет спектр нейтронов бесконечной однородной среды, воспользуемся системой нестационарных уравнений для модели последовательных поколений в среде.

Запишем уравнение переноса нейтронов в однородной бесконечной среде в операторной форме:

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \hat{L}\Phi = \hat{Q}\Phi + Q_0, \quad (2.4.1)$$

где  $\hat{L}\Phi = \Sigma_t \cdot \Phi - \int_0^{\infty} dE' \cdot \Sigma_s(E' \rightarrow E) \cdot \Phi(E')$  – оператор переноса ней-

тронов,  $\hat{Q}\Phi = \chi(E) \cdot \int_0^{\infty} dE' \cdot \nu_f \Sigma_f(E') \Phi(E')$  – оператор, отвечаю-

щий за рождение нового поколения нейтронов,  $Q_0$  – внешний источник нейтронов. Будем считать, что внешний источник в начальный момент времени породил нейтроны первого поколения, причем энергетическое распределение этих нейтронов произвольное.

Представим себе следующую картину развития цепного процесса. Часть нейтронов, испущенных внешним источником  $Q_0$ , приведет деление ядер среды и даст начало следующему, второму поколению нейтронов, которое, в свою очередь, породит третье поколение и т.д. Поток нейтронов, отвечающий  $i$ -му поколению нейтронов, обозначим  $\Phi_i(E, t)$ . Тогда цепной процесс деления будет описываться бесконечной системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \hat{L}\Phi_1 = Q_0, \\ \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \hat{L}\Phi_2 = \hat{Q}\Phi_1, \\ \dots, \\ \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \hat{L}\Phi_i = \hat{Q}\Phi_{i-1}. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Проинтегрируем каждое из уравнений системы по времени в интервале  $(0, \infty)$ , и, учитывая, что  $\Phi_i(E, 0) = \Phi_i(E, \infty) = 0$ , получим

$$\hat{L}\Phi^{(i)}(E) = \hat{Q}\Phi^{(i-1)}(E), \quad i = 1, 2, \dots,$$

где  $\Phi^{(i)}(E) = \int_0^{\infty} \Phi_i(E, t) dt$  – интегральный по времени поток нейтронов  $i$ -го поколения. Отличительной особенностью каждого уравнения бесконечной системы (2.4.2) является то, что в левой части присутствует поток нейтронов  $i$ -го поколения, а в правой части – поток нейтронов предыдущего поколения. Учитывая, что коэффициент размножения бесконечной среды равен отношению полного числа нейтронов в двух последовательных поколениях, разумно предположить, что такое же соотношение будет выполнено для отношения интегральных по времени потоков нейтронов в двух последовательных поколениях при любых значениях энергии нейтронов:

$$\Phi^{(i)}(E) = K \cdot \Phi^{(i-1)}(E). \quad (2.4.3)$$

Подставим соотношение (2.4.3) в уравнение для  $i$ -го поколения нейтронов, получим равенство

$$\hat{L}\Phi^{(i)}(E) = \frac{1}{K} \cdot \hat{Q}\Phi^{(i)}(E). \quad (2.4.4)$$

Уравнение (2.4.4) как в левой, так и в правой части содержит поток нейтронов только одного поколения. Можно показать, что спектр нейтронов в бесконечной среде удовлетворяет именно этому уравнению. Для доказательства этого утверждения чисто формально рассмотрим уравнение на собственные функции и собственные значения операторного уравнения:

$$\hat{L}\Phi(E) = \frac{1}{K} \cdot \hat{Q}\Phi(E). \quad (2.4.5)$$

Отметим, что если состав размножающей среды известен, то тем самым полностью определены операторы  $\hat{L}$  и  $\hat{Q}$ , входящие в состав уравнения (2.4.5). Спектр собственных значений  $\{K_i\}$ , отвечающих собственным функциям задачи  $\{\Psi_i(E)\}$ , расположим в порядке их убывания  $K_0 > K_1 > \dots > K_n$ . Предполагая, что система собственных функций обладает требуемыми свойствами, разложим функции  $\Phi^{(i)}(E)$  в ряд по собственным функциям этого уравнения  $\Phi^{(i)}(E) = \sum_m A_m^{(i)} \cdot \Psi_m(E)$ , где  $\Psi_m(E)$  – собственная функция уравнения (2.4.5), отвечающая собственному числу  $K_m$ . Тогда верно равенство  $\hat{L}\Psi_m(E) = \frac{1}{K_m} \hat{Q}\Psi_m(E)$ .

Подставим разложения в систему уравнений последовательных поколений:  $\hat{L} \left( \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} \cdot \Psi_m(E) \right) = \hat{Q} \left( \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} \cdot \Psi_m(E) \right)$  и, учитывая свойства собственных функций, в результате получим рекуррентное соотношение для коэффициентов разложения  $A_m^{(i)}$ :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{A_m^{(i)}}{K_m} - A_m^{(i-1)} \right) \hat{Q}\Psi_m(E) = 0,$$

$$A_m^{(i)} = K_m \cdot A_m^{(i-1)} = (K_m)^2 \cdot A_m^{(i-2)} = \dots = (K_m)^i \cdot A_m^{(0)}.$$

С помощью полученного рекуррентного соотношения, интегральный поток нейтронов в каждом поколении можно представить в виде выражения

$$\Phi^{(i)}(E) = (K_0)^i \cdot \left( A_0^{(0)} \cdot \Psi_0(E) + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{K_m}{K_0} \right)^i \cdot \Psi_m(E) \right). \quad (2.4.6)$$

Учитывая, что собственные числа мы расположили в порядке убывания, получим, что при  $m > 0$   $\frac{K_m}{K_0} < 1$ , и при

$i \rightarrow \infty$   $\left( \frac{K_m}{K_0} \right)^i \rightarrow 0$  для  $\forall m \neq 0$ . Следовательно, для больших значений индекса поколений  $i$  можно записать следующее выражение:

$$\Phi^{(i)}(E) \approx (K_0)^i \cdot A_0^{(0)} \cdot \Psi_0(E). \quad (2.4.7)$$

Таким образом, мы показали, что для нейтронов, относящихся к поколениям с достаточно большими номерами, то есть далекими от начального источника, энергетическое распределение становится подобным друг другу и отвечает собственной функции с максимальным собственным числом. Отметим, что это распределение не зависит от спектра начального источника нейтронов, а зависит только от состава размножающей среды. Кроме того, отношение интегральных потоков нейтронов в двух последовательных поколениях как раз равен максимальному собственному числу  $K_0$ , то есть это число и есть коэффициент размножения среды  $K_{\infty} = K_0$ .

Полный интегральный поток нейтронов определяется суммированием по всем поколениям нейтронов:

$$\begin{aligned}\Phi(E) &= \sum_i \Phi^{(i)}(E) = \sum_i (K_0)^i \cdot A_0^{(0)} \cdot \Psi_0(E) = \\ &= A_0^{(0)} \cdot \left( \sum_i (K_\infty)^i \right) \cdot \Psi_0(E).\end{aligned}$$

Для критической размножающей среды  $K_\infty = 1$ , а стационарный поток нейтронов  $\Phi(E) = A_0^{(0)} \cdot \Psi_0(E)$ . Для некритических сред интегральный поток нейтронов зависит от номера поколения нейтронов, причем он возрастает для надкритической среды  $K_0 > 1$  и убывает для подкритической среды  $K_0 < 1$ . Заметим, что установившийся спектр нейтронов характерен только для сред, у которых коэффициент размножения не сильно отличается от критического значения. Таким образом, спектр нейтронов в рассматриваемой бесконечной однородной размножающей среде определяется из решения уравнения на собственные функции  $\hat{L}\Phi = \frac{1}{K_0} \cdot \hat{Q}\Phi$ , отвечающее максимальному собственному числу  $K_0$ . По физическому смыслу это и есть коэффициент размножения нейтронов в рассматриваемой среде.

В явной форме уравнение для спектра нейтронов в бесконечной однородной среде имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Sigma_t(E) \cdot \Phi(E) - \int_0^\infty dE' \cdot \Sigma_s(E' \rightarrow E) \cdot \Phi(E') = \\ = \frac{\chi(E)}{K} \int dE' \cdot \nu_f(E') \cdot \Sigma_f(E') \cdot \Phi(E').\end{aligned}\tag{2.4.8}$$

Уравнение (2.4.8) линейное относительно функции  $\Phi(E)$  и поэтому решение этого уравнения определено с точностью до константы. Выберем константу так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{1}{K} \cdot \int_0^\infty dE \cdot \nu_f(E) \cdot \Sigma_f(E) \cdot \Phi(E) = 1.\tag{2.4.9}$$

Физический смысл такой нормировки заключается в том, что полный источник деления принимается равным единице, то есть спектр нейтронов нормируется на один нейтрон деления. В результате получаем уже неоднородное уравнение для спектра нейтронов:

$$\Sigma_t(E) \cdot \Phi_0(E) - \int_0^{\infty} dE' \cdot \Sigma_s(E' \rightarrow E) \cdot \Phi_0(E') = \chi(E). \quad (2.4.10)$$

Удобство выбранной нормировки состоит в том, что, получив решение уравнения (2.4.10)  $\Phi_0(E)$ , мы можем определить коэффициент размножения среды простым интегрированием по полученному спектру:

$$K = \int_0^{\infty} dE \cdot \nu_f(E) \cdot \Sigma_f(E) \cdot \Phi_0(E). \quad (2.4.11)$$

## 2.5. Многогрупповое приближение

Размножающие среды, составляющие активные зоны ядерных реакторов, содержат ядра различных элементов. В состав размножающих сред входит топливная компонента, которая содержит как делящиеся нуклиды, такие, как  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ , так и пороговые нуклиды  $^{235}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$ . Для отвода тепла используются различные теплоносители, состоящие как из легких ядер, такие, как  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{D}_2\text{O}$ , так и из тяжелых, включая расплавленные металлы Na или Pb. В большинстве существующих реакторов используется замедлитель нейтронов, состоящий из ядер легких элементов. Для предотвращения контакта теплоносителя с топливом применяются оболочки из различных металлов, а также различные конструкционные элементы, содержащие ядра Zr, Nb, Fe, Ni и многие другие. Все нетопливные элементы разделим на две группы – замедлители и разбавители. Ядра легких элементов относятся к замедлителям, а ядра тяжелых металлов к разбавителям.

Ввиду того, что ядра различных элементов, входящих в состав размножающей среды, имеют сложные зависимости сечения взаимодействий с нейтронами в различных областях энергий, то получить аналитическое решение уравнения для спектра нейтронов в

размножающей среде даже для наиболее простых сред не удастся. Для решения этого уравнения применяются различные приближенные методы. Наиболее распространенным для бесконечных однородных сред является многогрупповой подход, суть которого заключается в том, чтобы заменить истинные сложные зависимости микросечений от энергии функциями простого вида, например кусочно-постоянными.

С этой целью весь энергетический диапазон нейтронов в реакторе разбивается точками деления на ряд непересекающихся интервалов, как это показано схематично на рис. 2.2.

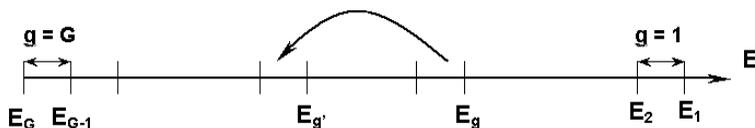


Рис. 2.2. Групповое разбиение энергетического интервала нейтронов

Для определенности рассмотрим разбиение на  $G$  непересекающихся интервалов. Пронумеруем получающиеся энергетические интервалы, начиная с верхнего интервала, индексом  $g = 1, 2, \dots, G$ . Ширина  $g$ -го интервала  $\Delta E_g = E_g - E_{g+1}$ . Предполагается, что все микросечения взаимодействия ядер с нейтронами внутри каждого интервала не зависят от энергии и являются постоянными величинами. Конечно, значения этих констант, которые называются групповыми сечениями, отличаются для ядер различных элементов. Нейтроны, энергия которых заключена в пределах  $g$ -го интервала, назовем нейтронами группы  $g$ . Поскольку все нейтроны внутри группы эквивалентны с точки зрения нейтронно-ядерных взаимодействий, то вместо потока нейтронов в многогрупповом методе используется групповой интегральный поток нейтронов, определяемый соотношением  $\Phi_g = \int_{\Delta E_g} dE \cdot \Phi(E)$ .

Основная проблема многогруппового метода заключается в выборе групповых констант. Для этого используется условие сохранения полного числа процессов любого типа внутри группы. Это

условие означает, что полное число процессов  $l$ -го типа в пределах группового интервала энергий для групповых констант должно быть таким же, как и для истинных макросечений этого типа, то есть должно выполняться соотношение:

$$\int_{\Delta E_g} \Sigma_l(E) \cdot \Phi(E) dE = \Sigma_l^g \cdot \int_{\Delta E_g} \Phi(E) dE = \Sigma_l^g \cdot \Phi_g, \quad (2.5.1)$$

где  $\Sigma_l^g = \frac{\int_{\Delta E_g} \Sigma_l(E) \cdot \Phi(E) dE}{\int_{\Delta E_g} \Phi(E) dE}$ .

Однако для того чтобы получить групповые константы, необходимо знать энергетическое распределение нейтронов в группе. Но если энергетическое распределение в группе известно, то нет необходимости использовать многогрупповое приближение. Выход из этого противоречия заключается в том, что групповые сечения являются дробно линейным функционалами от потока нейтронов. Поэтому если взять в качестве внутригруппового спектра приближенные решения, то систематическая погрешность в групповых константах от использования приближенного потока будет оказывать существенно меньшее воздействие на значение многогрупповых констант. В качестве таких приближенных внутригрупповых спектров используются стандартный набор спектров, таких, как, спектр нейтронов деления, спектр замедления Ферми, спектр Вигнера для групп с резонансным ходом сечения и спектр Максвелла для группы тепловых нейтронов.

Чтобы получить систему многогрупповых уравнений, проинтегрируем общее уравнение для спектра нейтронов внутри  $g$ -й группы:

$$\Sigma_{a,d}^g \cdot \Phi_g - \sum_{g'=1, g' \neq g}^G \Sigma_s^{g' \rightarrow g} \cdot \Phi_{g'} = \frac{\chi_g}{K_\infty} \cdot \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_f^{g'} \cdot \Phi_{g'}. \quad (2.5.2)$$

В уравнении (2.5.2) введены следующие обозначения:

$$\Sigma_{a,d}^g = \Sigma_a^g + \Sigma_d^g; \quad \Sigma_a^g = \frac{\int \Sigma_a(E) \cdot \Phi(E) dE}{\int_{\Delta E_g} \Phi(E) dE},$$

$$\Sigma_d^g = \sum_{g'=1, g' \neq g}^G \left( \int_{\Delta E_g} dE \frac{\left( \int_{\Delta E_{g'}} \Sigma_s(E \rightarrow E') dE' \right) \Phi(E)}{\int_{\Delta E_{g'}} \Phi(E) dE} \right),$$

$$\Sigma_s^{g' \rightarrow g} = \sum_{g'=1, g' \neq g}^G \left( \int_{\Delta E_g} dE \frac{\left( \int_{\Delta E_{g'}} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \cdot \Phi(E') dE' \right)}{\int_{\Delta E_{g'}} \Phi(E') dE'} \right),$$

$$\chi_g = \int_{\Delta E_g} \chi(E) dE, \quad \nu \Sigma_f^g = \frac{\int \nu \Sigma_f(E) \cdot \Phi(E) dE}{\int_{\Delta E_g} \Phi(E) dE}, \quad \Phi_g = \int_{\Delta E_g} \Phi(E) dE.$$

Приведенные величины имеют следующий физический смысл. Величины  $\Sigma_a^g, \nu \Sigma_f^g$  – являются групповыми макроконстантами, отвечающими за поглощение нейтронов и их рождение соответственно. Величина  $\Sigma_d^g$  отвечает за увод нейтронов из группы  $g$  в результате рассеяния в другие группы, причем как в верхние так и в нижние. Макросечение  $\Sigma_s^{g' \rightarrow g}$  связано с переводом нейтронов из любой группы  $g'$  в данную группу  $g$  за счет реакции рассеяния. И, наконец, величина  $\chi_g$  определяет долю нейтронов деления, попадающих в рассматриваемую группу  $g$ .

Использование многогруппового приближения превращает интегральное уравнение для спектра нейтронов в систему однородных линейных алгебраических уравнений (2.5.2), называемых в дальнейшем системой многогрупповых уравнений. В общем случае система уравнений (2.5.2) предполагает возможность перевода ней-

тронов за счет рассеяния из нижней группы  $g'$  в верхнюю группу  $g$ , то есть когда  $g' > g$ . Это означает, что процесс рассеяния нейтрона происходит с увеличением его энергии. Такая ситуация имеет место при рассеянии тепловых нейтронов с ядрами среды, поскольку в этом случае средняя энергия нейтронов сравнима со средней энергией теплового движения ядер среды (процесс термализации нейтронов). В том случае, когда все тепловые нейтроны объединены в одну группу, возможны только такие переводы нейтронов, при которых их энергия уменьшается, то есть  $\sum_s (E \rightarrow E') = 0$  при  $E' > E$ , или в групповых обозначениях  $\sum_s^{g' \rightarrow g} = 0$ , когда  $g' > g$ . В этом случае система многогрупповых уравнений будет иметь нижнетреугольный вид:

$$\sum_{a,d}^g \cdot \Phi_g - \sum_{g'=1}^{g-1} \sum_s^{g'-g} \cdot \Phi_{g'} = \frac{\chi_g}{K_\infty} \cdot \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_f^{g'} \cdot \Phi_{g'}. \quad (2.5.3)$$

Рассмотрим физический смысл отдельных членов полученной системы уравнений. Первый член описывает поглощение и уход нейтронов из группы  $g$  во все нижележащие группы в результате их рассеяния ( $g' > g$ ). Второй член описывает перевод нейтронов из всех вышележащих групп  $g'$  в данную группу  $g$  ( $g' > g$ ). Третий член определяет количество нейтронов, деления, которые попали в группу  $g$  непосредственно при делении ядер.

Поскольку система уравнений (2.5.3) однородная, то применим ту же самую нормировку источника деления на один нейтрон, то есть из всего многообразия решений выберем то из них, для которого выполнено условие  $\frac{1}{K_\infty} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_f^{g'} \cdot \Phi_{g'} = 1$ . В результате такой нормировки получим систему линейных однородных уравнений многогруппового приближения:

$$\Sigma_{a,d}^g \cdot \Phi_g - \sum_{g'=1}^{g-1} \sum_s^{g' \rightarrow g} \cdot \Phi_{g'} = \chi_g. \quad (2.5.4)$$

Решение этой системы представляется в виде рекуррентного соотношения:

$$\Phi_1 = \frac{\chi_1}{\Sigma_{a,d}^1}, \quad \Phi_g = \frac{\chi_g + \sum_{s=1}^{g-1} \Sigma_s^{g' \rightarrow g} \cdot \Phi_{g'}}{\Sigma_{a,d}^g}, \quad g > 1. \quad (2.5.5)$$

После того как определены групповые интегральные потоки  $\Phi_g$ , то есть групповой спектр нейтронов в размножающей среде, можно вычислить и коэффициент размножения этой среды  $K_\infty$  в многогрупповом приближении, исходя из соотношения нормировки:

$$K_\infty = \sum_{g=1}^G \nu_{f,g} \cdot \Sigma_{f,g} \cdot \Phi_g. \quad (2.5.6)$$

В общем случае, когда необходимо учитывать рассеяние нейтронов с приобретением энергии, система уравнений (2.5.2) решается численным методом с использованием той же самой нормировки многогруппового спектра нейтронов.

Итак, для применения многогруппового приближения необходимо знать нуклидный состав размножающей среды и иметь систему многогрупповых констант для каждого нуклида, входящего в состав размножающей среды. Решая систему многогрупповых уравнений (2.5.2) тем или иным способом, получаем спектр нейтронов в многогрупповом приближении для данной размножающей среды. После этого, используя условие нормировки, определяем коэффициент размножения среды.

### Глава 3

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РАЗЛИЧНЫХ РАЗМНОЖАЮЩИХ СРЕД

Спектр нейтронов в бесконечной однородной размножающей среде зависит от ее состава. В состав размножающих сред входят наряду с топливными нуклидами, замедляющие ядра и ядра разбавителя. Содержание нетопливных компонентов в среде принято характеризовать величиной, называемой разбавлением и обозначаемой в дальнейшем  $S$ . Это величина характеризует количество ядер замедлителя и разбавителя на одно ядро топлива. Под топливом понимается смесь делящихся и пороговых нуклидов. Их соотношение в топливе характеризуется величиной, называемой обогащением топлива и определяется весовым процентом  $x\%$  делящихся ядер в топливе.

Исходный спектр нейтронов источника – это спектр нейтронов деления. Диапазон нейтронов в спектре деления заключен в интервале  $0.1 < E < 10.5$  МэВ. В результате реакции рассеяния на ядрах размножающей среды спектр нейтронов размывается и его диапазон увеличивается. Одной из основных характеристик размножающей среды является область спектра, в которой происходит основная доля делений ядер. По виду спектра нейтронов, в котором происходит основная доля делений, реакторы можно классифицировать на три типа: реакторы на быстрых нейтронах, которые часто называют просто быстрые реакторы (БР), реакторы на промежуточных или резонансных нейтронах (промежуточные реакторы) и реакторы на тепловых нейтронах, или тепловые реакторы (ТР). В соответствии с этой классификацией рассмотрим основные физические особенности размножающих сред, отвечающих реакторам различных типов.

### *3.1. Размножающая среда на быстрых нейтронах*

Размножающая среда, в которой значительная доля процессов деления осуществляется нейтронами, принадлежащими спектру деления, называется средой с быстрым спектром. Именно такие среды образуют активные зоны реакторов на быстрых нейтронах. По определению, в таких средах содержание замедляющих ядер

невелико. В основном замедление нейтронов осуществляется ядрами топлива и разбавителя с относительно большой массой. Для этих ядер ступенька замедления мала и размывание спектра деления за счет упругого рассеяния невелико. Чем меньше разбавление в такой среде, тем жестче спектр.

Однако для тяжелых ядер в спектре деления заметную роль играет реакция неупругого рассеяния. В результате этой реакции средняя потеря энергии нейтронов на одно столкновение составляет  $\Delta E \approx 1$  МэВ. Поскольку реакция неупругого рассеяния имеет пороговый характер, то наличие неупругого рассеяния лишь переводит нейтроны из области  $E > E_{\text{пр}} \approx 1.5$  МэВ, в область энергий  $E < 1.0$  МэВ, оставляя их в спектре деления. В результате средняя энергия спектра в чисто топливной размножающей среде снижается по сравнению со средней энергией спектра деления. Наличие разбавителей с массовым числом  $A > 100$  не оказывает сильного влияния на спектр нейтронов чисто топливной среды. Однако использование в качестве теплоносителя натрия, а в качестве топлива диоксида урана  $\text{UO}_2$  сильно размывает спектр нейтронов за счет реакции упругого рассеяния на этих ядрах. На рис. 3.1 приведены зависимости спектра нейтронов в среде из природного урана ( $x = 0.71\%$ ) и диоксида урана того же обогащения.

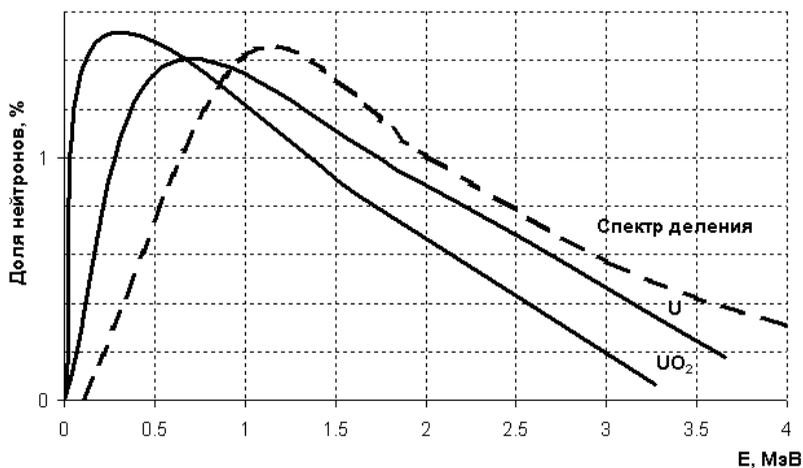


Рис. 3.1. Спектры нейтронов в среде из чистого природного урана и диоксида в сравнении со спектром деления

Рассмотрим вначале быстрые реакторы с высокообогащенным топливом, в котором содержание делящихся ядер является определяющим. Кроме того, предположим, что в состав размножающей среды входят тяжелые ядра разбавителя, а легких ядер замедлителя в размножающей среде нет (например, топливо – металлический уран) Для определенности рассмотрим в качестве топлива высокообогащенный уран. В этом случае основная доля процессов деления ядер осуществляется на ядрах  $^{235}\text{U}$ , а размножением нейтронов при делении ядер  $^{238}\text{U}$  можно пренебречь. Для расчета коэффициента размножения такой среды вполне достаточно одногруппового приближения, а сами одногрупповые константы можно получить усреднением по спектру деления. В одногрупповом приближении перевод нейтронов в нижние группы отсутствует, так что уравнения для потока нейтронов имеют вид:

$$\Sigma_a^1 \cdot \Phi_1 = 1; \quad \Phi_1 = \frac{1}{\Sigma_a^1}. \quad (3.1.1)$$

Принимая во внимание условие нормировки и опуская значок индекса группы, запишем выражение для коэффициента размножения:

$$K_\infty = \nu_f \Sigma_f \cdot \Phi_1 = \frac{\nu_f \Sigma_f}{\Sigma_a}. \quad (3.1.2)$$

Учитывая, что среда состоит в основном из урана высокого обогащения и разбавителя, слабо поглощающего нейтроны, выражение для коэффициента размножения можно представить в виде

$$K_\infty = \frac{\nu_f \Sigma_f^{(U)}}{\Sigma_a^{(U)}} \cdot \frac{\Sigma_a^{(U)}}{\Sigma_a} = \nu_{ef} \cdot \theta. \quad (3.1.3)$$

Первый сомножитель  $\nu_{ef} = \nu_f \Sigma_f^{(U)} / \Sigma_a^{(U)}$  дает среднее число нейтронов деления на один поглощенный в уране (в топливе), а второй сомножитель  $\theta = \Sigma_a^{(U)} / \Sigma_a$  есть вероятность того, что нейтрон в размножающей среде будет поглощен ядром урана (топли-

вом). Если разбавитель слабо поглощает быстрые нейтроны, то  $\theta=1$   $K_\infty = v_{ef}$ . Тогда коэффициент размножения не зависит от концентрации разбавителя, а определяется только обогащением топлива  $x$ . Рассмотрим зависимость коэффициента размножения среды из  $^{235}\text{U}$  и  $^{238}\text{U}$  от обогащения:

$$K_\infty = v_{ef} = \frac{v_f^5 \cdot \bar{\sigma}_f^5 \cdot x \cdot \rho_U}{\bar{\sigma}_a^5 \cdot x \cdot \rho_U + \bar{\sigma}_a^8 \cdot (1-x) \cdot \rho_U} = \frac{\eta_5}{1 + \frac{\bar{\sigma}_a^8 \cdot (1-x)}{\bar{\sigma}_a^5 \cdot x}}, \quad (3.1.4)$$

где  $\eta_5 = v_f^5 \frac{\bar{\sigma}_f^5}{\bar{\sigma}_a^5}$  равна числу нейтронов деления  $^{235}\text{U}$  в расчете на один поглощенный нейтрон. При высоком обогащении топлива  $\bar{\sigma}_a^8 \cdot (1-x) \ll \bar{\sigma}_a^5 \cdot x$  и  $K_\infty = \eta_5$ . Следовательно, для высокообогащенного топлива коэффициент размножения слабо зависит от обогащения. По мере снижения обогащения значение  $K_\infty$  слабо уменьшается.

По мере снижения обогащения топлива размножающей среды повышается роль процесса деления порогового нуклида  $^{238}\text{U}$  в размножении нейтронов. Для анализа порогового процесса простейшей моделью является двухгрупповое приближение, а граничной энергией между группами будет эффективный порог деления  $^{238}\text{U}$  –  $E_{пр} = 1.2$  МэВ. Поскольку и в этом случае основная доля спектра нейтронов в среде будет приходиться на область спектра деления, то двухгрупповые константы также можно усреднить по спектру деления. Сечения увода из первой группы и перевода из первой во вторую определяется процессом неупругого рассеяния на тяжелых ядрах  $^{235}\text{U}$  и  $^{238}\text{U}$ . Сечение этого процесса

$$\sigma_d^1 = x \cdot \bar{\sigma}_{in,5}^{1 \rightarrow 2} + (1-x) \cdot \bar{\sigma}_{in,8}^{1 \rightarrow 2}. \quad (3.1.5)$$

Решая двухгрупповую систему уравнений, получим выражения для групповых потоков:

$$\Phi_1 = \frac{\chi_1}{\Sigma_{a,d}^1}; \quad \Phi_2 = \frac{\chi_2 + \chi_1 \cdot \frac{\Sigma_s^{1 \rightarrow 2}}{\Sigma_{a,d}^1}}{\Sigma_a^2}. \quad (3.1.6)$$

и коэффициента размножения среды:

$$K_\infty = \chi_1 \cdot \frac{\nu_f \Sigma_f^1}{\Sigma_{a,d}^1} + \chi_2 \frac{\nu_f \Sigma_f^2}{\Sigma_a^2} \cdot \left( 1 + \frac{\chi_1}{\chi_2} \cdot \frac{\Sigma_s^{1 \rightarrow 2}}{\Sigma_{a,d}^1} \right). \quad (3.1.7)$$

Нейтроны второй группы не могут вызвать деления ядер  $^{238}\text{U}$ , поэтому сечение увода нейтронов  $\Sigma^{1 \rightarrow 2}$  для него становится как сечение поглощения. Поскольку микросечение неупругого рассеяния составляет около 50% от полного сечения взаимодействия для обоих изотопов урана, то для природного урана с обогащением  $x = 0.714\%$  коэффициент размножения существенно ниже единицы, а именно  $K_\infty \approx 0.3$ . В результате бесконечная урановая среда оказывается глубоко подкритичной. Этот факт играет большую роль в ядерной безопасности, поскольку в любых количествах природный уран подкритичен.

Следовательно, для критичности чисто урановая среда должна иметь заметную долю ядер  $^{235}\text{U}$ , то есть быть обогащенной. Расчеты показывают, что чисто урановая бесконечная размножающая среда становится критичной при обогащении ( $x > 5\%$ ).

### ***3.2. Размножающая среда на промежуточных нейтронах***

Размножающая среда на промежуточных нейтронах обладает тем свойством, что основная доля процессов деления в ней осуществляется нейтронами промежуточных энергий, то есть с энергиями выше тепловой области и ниже области спектра деления. Для этого среда должна содержать заметное количество замедлителя. В промежуточной области энергий пороговые нуклиды практически не делятся. Поэтому для простоты рассмотрим размножающую среду, состоящую из смеси топлива и замедлителя.

Возьмем в качестве топлива  $^{235}\text{U}$ . Спектр нейтронов в такой среде будет смягчаться за счет упругих столкновений нейтронов с яд-

рами замедлителя. Условием того, что данная размножающая среда относится к реакторам на промежуточных нейтронах, является следующее: основная доля процессов деления ядер урана, а следовательно, и процессов поглощения нейтронов ядрами размножающей среды, происходит вне спектра деления нейтронов. Задача заключается в том, чтобы оценить, при каких разбавлениях топлива замедлителем получается размножающая среда на промежуточных нейтронах.

Объединив все быстрые нейтроны, принадлежащие спектру деления, в одну группу ( $E > 0.1$  МэВ), оценим долю процессов поглощения нейтронов  $^{235}\text{U}$  в этой области энергий. При нормировке источника нейтронов деления на один нейтрон, доля процессов поглощения нейтронов будет равна числу поглощенных нейтронов в этой области энергии. Баланс нейтронов в быстрой области спектра учитывает следующие процессы:

- поглощение быстрых нейтронов в  $^{235}\text{U}$ ,
- увод из быстрой области за счет упругого рассеяния на ядрах замедлителя.

Отметим, что все нейтроны деления появляются в этой группе, то есть  $\chi_1 = 1$ . Обозначим ядерные концентрации  $^{235}\text{U}$  и замедлителя в размножающей среде  $\rho_5$  и  $\rho_{\text{зам}}$  соответственно. Уравнение для потока нейтронов в быстрой области имеет вид:

$$(\Sigma_{a,5}^1 + \Sigma_d^{\text{зам}}) \cdot \Phi_1 = 1. \quad (3.2.1)$$

Решением уравнения (3.2.1) является функция  $\Phi_1 = \frac{1}{(\Sigma_{a,5}^1 + \Sigma_d^{\text{зам}})}$ .

Таким образом, чтобы размножающая среда относилась к средам на промежуточных нейтронах, необходимо выполнение следующих неравенств:

$$\Sigma_{a,5}^1 \cdot \Phi_1 \ll 1; \quad \frac{\Sigma_{a,5}^1}{\Sigma_{a,5}^1 + \Sigma_d^{\text{зам}}} \ll 1. \quad (3.2.2)$$

Принимая во внимание, что  $\Sigma_{a,5}^1 = \sigma_{a,5}^1 \cdot \rho_5$  и  $\Sigma_d^{3AM} = \sigma_d^{3AM} \cdot \rho_{3AM}$ , получим требуемое соотношение:

$$C = \frac{\rho_{3AM}}{\rho_5} \gg \frac{\sigma_{a,5}^1}{\sigma_d^{3AM}}. \quad (3.2.3)$$

Для неводородного замедлителя ступенька замедления существенно меньше энергетической ширины спектра деления. Поэтому нейтронам в первой группе для выхода из нее требуется в среднем несколько столкновений. Если ширина энергетического интервала первой группы в терминах логарифма равна  $\Delta U_1$ , а среднелогарифмическая потеря энергии на одно столкновение с ядрами замедлителя равна  $\xi$ , то среднее число столкновений для выхода нейтронов из первой группы приближенно будет равно  $n = \frac{\Delta U_1}{\xi}$ , а сече-

ние увода из группы  $\sigma_a^{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma_s^{3AM}}{n} = \frac{\xi \sigma_s^{3AM}}{\Delta U_1}$ . Для неводородного за-

медлителя  $\xi \approx \frac{2}{A}$ ,  $\sigma_a^{1 \rightarrow 2} = \frac{2 \cdot \sigma_s^{3AM}}{A \cdot \Delta U_1}$  и поэтому условие, при котором

размножающая среда будет средой с промежуточным спектром нейтронов, можно записать в виде

$$C \gg \frac{A}{2} \cdot \frac{\sigma_{a,5}^1}{\sigma_s^{3AM}}. \quad (3.2.4)$$

Так, например, если в качестве замедлителя используется графит, для которого  $A=12$ ,  $\sigma_s^{3AM} = 4$  б,  $\sigma_{a,5}^1 = 2$  б, то уже при разбавлении

нии  $C = \frac{\rho_C}{\rho_{U5}} > 10$  спектр нейтронов в размножающей среде, со-

стоящей из гомогенной смеси  $^{235}\text{U}$  и графита, будет относиться к промежуточному спектру. Для смеси  $^{235}\text{U}$  с водородом (или водой) промежуточный спектр реализуется уже при соотношении

$(\rho_H/\rho_5) \geq 1$ . На рис. 3.2 показаны спектры нейтронов для смеси  $^{235}\text{U}$  с водой и графитом в сравнении со спектром деления.

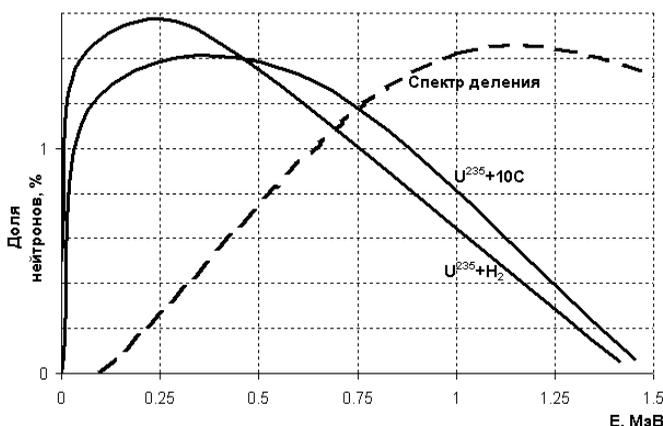


Рис. 3.2. Спектры нейтронов в среде из смеси природного урана с водородом и графитом в сравнении со спектром деления

### 3.3. Размножающие среды с тепловым спектром нейтронов

При дальнейшем увеличении разбавления  $^{235}\text{U}$  замедлителем, энергетический спектр нейтронов в среде будет все более смягчаться, так что часть замедляющихся нейтронов попадет по энергетической шкале в тепловую область, где их энергия сравнима с энергией теплового движения ядер среды. При достаточно большом разбавлении значительная часть нейтронов деления в размножающей среде сможет замедлиться до тепловых энергий. В такой размножающей среде основная доля делений будет осуществляться тепловыми нейтронами, и поэтому эта среда называется средой на тепловых нейтронах. Однако, наряду с тепловыми нейтронами, в спектре этой среды присутствуют нейтроны всех других энергий, включая быстрые и промежуточные.

В настоящее время основным типом энергетических реакторов являются реакторы на тепловых нейтронах. Первые реакторы работали на природном уране с большим разбавлением по замедлителю. В таких реакторах подавляющая часть процессов деления осуществлялась нейтронами тепловых энергий. Поэтому расчет коэф-

коэффициента размножения в бесконечной размножающей среде с тепловым спектром нейтронов имеет некоторую особенность. В классической теории реакторов на тепловых нейтронах принято считать, что нейтроны деления появляются в результате реакции деления, осуществляемой только тепловыми нейтронами. Однако при малых обогащениях топлива в размножающей среде содержится значительное количество порогового изотопа  $^{238}\text{U}$ , который делится нейтронами деления. Эти нейтроны также относят к тому поколению, которое вызывает процесс деления  $^{235}\text{U}$ .

Поскольку основная часть процессов деления осуществляется нейтронами тепловых энергий, то при определении коэффициента размножения в реакторе будем считать, что новое поколение нейтронов появляется в результате деления ядер топлива тепловыми нейтронами. Если  $E_{\text{тр}}$  – означает верхнюю границу теплового спектра, а  $E_{\text{пр}}$  – энергетический порог реакции деления на  $^{238}\text{U}$ , то для этого случая условие нормировки спектра и выражение для коэффициента размножения будут иметь вид:

$$\frac{\chi(E)}{K_{\infty}} \cdot \int_0^{E_{zp}} \nu_f \Sigma_f^{(5)}(E') \cdot \Phi(E) \cdot dE' = 1, \quad (3.3.1)$$

$$K_{\infty} = \int_0^{E_{zp}} \nu_f \Sigma_f^{(5)}(E') \cdot \Phi(E) \cdot dE'.$$

С учетом этих соотношений уравнение для спектра в бесконечной однородной размножающей среде с тепловым спектром нейтронов представим в виде.

$$\Sigma_t(E) \cdot \Phi(E) = \int_0^{\infty} dE' \cdot \Sigma_s(E' \rightarrow E) \cdot \Phi(E') +$$

$$+ \chi(E) \cdot \left( 1 + \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} \nu_f \Sigma_f^{(8)}(E') \cdot \Phi(E') \cdot dE' \right). \quad (3.3.2)$$

Обозначим через  $\Phi_0(E)$  решение уравнения (2.6.12), но с единственным источником:

$$\Sigma_t(E) \cdot \Phi_0(E) = \int_0^{\infty} dE' \cdot \Sigma_s(E' \rightarrow E) \cdot \Phi_0(E') + \chi(E). \quad (3.3.3)$$

Решение уравнения (3.3.2) отличается от решения уравнения (3.3.3)  $\Phi_0(E)$  только константой, то есть  $\Phi(E) = a \cdot \Phi_0(E)$ . Для определения требуемой константы подставим это выражение в уравнение (3.3.2):

$$\begin{aligned} \Sigma_t(E) \cdot a \cdot \Phi_0(E) &= \int_0^{\infty} dE' \cdot \Sigma_s(E' \rightarrow E) \cdot a \cdot \Phi_0(E') + \\ &+ \chi(E) \cdot \left( 1 + \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} \nu_f \Sigma_f^{(8)}(E') \cdot a \cdot \Phi_0(E) \cdot dE' \right) + \\ &+ a \left\{ \Sigma_t(E) \cdot \Phi_0(E) - \int_0^{\infty} dE' \cdot \Sigma_s(E' \rightarrow E) \cdot \Phi_0(E') \right\} = \\ &= \chi(E) \cdot \left( 1 + a \cdot \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} \nu_f \Sigma_f^{(8)}(E') \cdot \Phi_0(E) \cdot dE' \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнение (2.6.13), получим

$$\begin{aligned} a \cdot \chi(E) &= \chi(E) \cdot \left( 1 + a \cdot \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} \nu_f \Sigma_f^{(8)}(E') \cdot \Phi_0(E) \cdot dE' \right), \\ a &= \frac{1}{1 - \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} \nu_f \Sigma_f^{(8)}(E') \cdot \Phi_0(E) \cdot dE'}. \end{aligned}$$

Таким образом, решение уравнения для спектра нейтронов в тепловом реакторе отличается от общего решения уравнения для спектра нейтронов в любой размножающей среде лишь на константу и имеет вид:

$$\Phi(E) = \frac{\Phi_0(E)}{1 - \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} \nu_f \Sigma_f^{(8)}(E') \cdot \Phi_0(E) \cdot dE'} . \quad (3.3.4)$$

Выражение для коэффициента размножения реактора на тепловых нейтронах будет иметь следующий вид:

$$K_{\infty} = \frac{\int_0^{E_{\text{гр}}} \nu_f \Sigma_f^{(5)}(E') \cdot \Phi_0(E) \cdot dE'}{1 - \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} \nu_f \Sigma_f^{(8)}(E') \cdot \Phi_0(E) \cdot dE'} . \quad (3.3.5)$$

Заметим, что такое представление коэффициента размножения в тепловом реакторе не учитывает процесс деления ядер  $^{235}\text{U}$  нейтронами спектра деления и промежуточного спектра. Поскольку обогащение топлива в реакторах на тепловых нейтронах не слишком сильно отличается от обогащения природного урана, то делением на быстрых нейтронах  $^{235}\text{U}$  можно пренебречь по сравнению с делением ядер  $^{235}\text{U}$ .

#### ***3.4. Феноменологический подход к определению $K_{\infty}$ в размножающей среде на тепловых нейтронах***

Рассмотрим другой подход для определения коэффициента размножения теплового реактора. Процесс размножения нейтронов в бесконечной мультиплицирующей среде можно оценить количественно, если проследить за судьбой вторичных нейтронов, рождающихся в результате деления горючего.

Итак, пусть имеется однородная бесконечная размножающая среда, состоящая из смеси горючего (например,  $^{235}\text{U}$ ), порогового нуклида ( $^{238}\text{U}$ ) и замедлителя. Рассмотрим жизненный цикл одного поколения нейтронов при их движении по энергетической шкале, начало которому положено появлением в единице объема среды одного нейтрона деления результате деления ядра  $^{235}\text{U}$  тепловым нейтроном. Проследим за судьбой этого нейтрона. При делении рождаются нейтроны, энергия которых может быть как больше, так

и меньше порога деления  $^{238}\text{U}$ . Нейтроны с энергией  $E > E_{\text{пр}}$  могут вызывать деление ядер  $^{238}\text{U}$ . В принципе, необходимо отнести эти нейтроны к следующему поколению, но поскольку к одному поколению нейтронов относятся только те из них, которые появились в результате деления ядер тепловыми нейтронами, то эти вновь родившиеся нейтроны будут также отнесены к первоначальному поколению.

Таким образом, число нейтронов в единице объема с энергией  $E < E_{\text{пр}}$  будет больше числа первоначально родившихся нейтронов деления за счет тех нейтронов, которые появились при делении ядер  $^{238}\text{U}$  быстрыми нейтронами. Это увеличение числа замедлившихся нейтронов в результате размножения на быстрых нейтронах характеризуется коэффициентом  $\mu$ , равным числу быстрых нейтронов, которые замедлились до энергии ниже порога деления  $^{238}\text{U}$ , отнесенному к одному быстрому нейтрону, появившемуся при делении  $^{235}\text{U}$  тепловыми нейтронами. Таким образом, в результате размножения на быстрых нейтронах за порог деления  $^{238}\text{U}$  уйдет  $\mu$  быстрых нейтронов на один родившийся в быстрой области после деления ядер  $^{235}\text{U}$ . Эти нейтроны, сталкиваясь с ядрами замедлителя, будут терять свою энергию, то есть замедлятся.

В процессе замедления часть нейтронов претерпевает резонансное взаимодействие радиационного захвата ядрами  $^{235}\text{U}$ , так и не достигнув тепловой энергии. Резонансное поглощение нейтронов в процессе замедления характеризуется коэффициентом  $\phi$  – вероятностью того, что быстрый нейтрон в процессе замедления избежит радиационного захвата на  $^{238}\text{U}$ . Захват надтепловых нейтронов при замедлении носит специфический характер.

Таким образом, до тепловой энергии замедляются  $\mu \cdot \phi$  нейтронов. Но даже тогда, когда нейтроны стали тепловыми, не все они поглотятся в топливе. Часть их будет захвачена ядрами замедлителя. Если ввести коэффициент  $\theta$ , определив его как вероятность захвата теплового нейтрона топливом (его называют коэффициентом использования тепловых нейтронов), то ядрами урана будет поглощено  $\mu \cdot \phi \cdot \theta$  нейтронов.

Часть нейтронов, поглощенных топливом, вызовет деление ядер  $^{235}\text{U}$ , в результате чего появятся нейтроны нового поколения. Их число, приходящееся на один нейтрон, поглощенный в топливе, обозначим через  $\nu_{ef}$  – среднее число нейтронов деления на один

захваченный тепловой нейтрон в топливе. Очевидно, что  $\nu_{ef} = \nu_f \cdot P_f$ , где  $\nu_f$  – среднее число нейтронов на акт деления ядра  $^{235}\text{U}$ , а  $P_f = \frac{x \cdot \sigma_f^5}{x \cdot \sigma_a^5 + (1-x) \cdot \sigma_a^8}$  – вероятность того, что при захвате теплового нейтрона топливом произойдет реакция деления на ядрах  $^{235}\text{U}$ .

Таким образом, если пренебречь делением  $^{235}\text{U}$  быстрыми и резонансными нейтронами, то во втором поколении число быстрых нейтронов деления изменится до значения  $\mu \cdot \phi \cdot \theta \cdot \nu_{ef}$  (см. рис. 3.3).

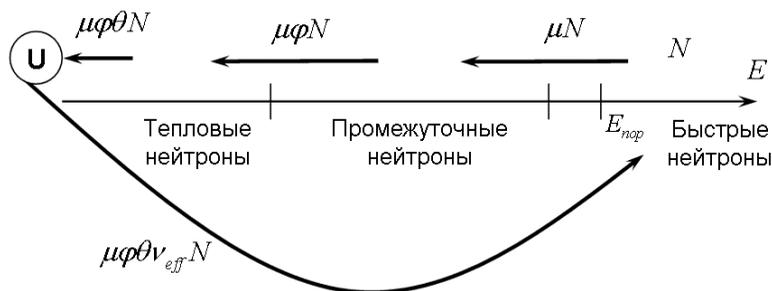


Рис. 3.3. Иллюстрация феноменологического подхода определения формулы четырех сомножителей для  $K_\infty$

Поскольку коэффициентом размножения в однородной бесконечной среде называют отношение числа нейтронов нового поколения к числу нейтронов предыдущего поколения, то  $K_\infty$  будет выражаться произведением

$$K_\infty = \mu \cdot \phi \cdot \theta \cdot \nu_{ef}. \quad (3.4.1)$$

Выражение (3.4.1) называется формулой четырех сомножителей. Подчеркнем еще раз, что формула четырех сомножителей описывает размножение нейтронов в сильно замедляющей среде, когда основная доля делений приходится на тепловые нейтроны. Следо-

вательно, она служит для описания размножения нейтронов в реакторе на тепловых нейтронах. Удобство такого представления коэффициента размножения заключается в том, что каждый сомножитель относится к определенной области спектра нейтронов в размножающей среде. Это облегчает анализ влияния различных факторов на величину  $K_{\infty}$ , как, например, при изменении обогащения топлива, разбавления топлива замедлителем и многие другие факторы.

## Глава 4 ФОРМУЛА ЧЕТЫРЕХ СОМНОЖИТЕЛЕЙ

Формула четырех сомножителей позволяет осуществлять анализ зависимости коэффициента размножения бесконечной однородной среды с тепловым спектром нейтронов при изменении состава размножающей среды. Однако для проведения такого анализа необходимо иметь выражения для каждого сомножителя в зависимости от параметров размножающей среды. В данной главе будут получены аналитические выражения для каждого сомножителя и проанализирована их зависимость от состава размножающей среды. Первым сомножителем является коэффициент размножения на быстрых нейтронах.

### *4.1. Коэффициент размножения на быстрых нейтронах*

По определению, данному выше, коэффициент размножения на быстрых нейтронах есть число нейтронов, замедлившихся ниже порога деления  $^{238}\text{U}$ , приходящиеся на один нейтрон деления, появившийся в результате реакции деления ядер делящихся нуклидов, например  $^{235}\text{U}$ , нейтронами теплового спектра. Отметим, что по физическому смыслу этот коэффициент есть коэффициент размножения быстрых нейтронов, но в дальнейшем будем использовать общепринятое название.

Итак, предположим, что имеется один быстрый нейтрон, появившийся в результате деления ядра  $^{235}\text{U}$  тепловым нейтроном. Полное количество нейтронов, энергия которых будет ниже порога деления  $^{238}\text{U}$ , будет включать в себя следующие нейтроны:

- первоначальные нейтроны деления за вычетом той части из них, которые поглотились ядрами  $^{238}\text{U}$ ;
- быстрые нейтроны, появившиеся в результате деления ядер  $^{238}\text{U}$  (так называемые вторичные нейтроны деления) и ушедшие за порог деления.

Таким образом, коэффициент размножения на быстрых нейтронах будет равен сумме:

$$\mu = 1 + \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} \nu \Sigma_f^{(8)}(E) \Phi(E) dE - \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} \Sigma_a^{(8)}(E) \Phi(E) dE, \quad (4.1.1)$$

где  $\Phi(E)$  – спектр нейтронов в размножающей среде. Используя для потока нейтронов выражение, полученное в п. 2.4, получим число нейтронов, замедлившихся ниже  $E_{\text{пр}}$ , в расчете на один нейтрон деления  $^{235}\text{U}$ , то есть величину  $\mu$ :

$$\mu = 1 + \frac{\int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} dE \cdot \left( (\nu_f - 1) \Sigma_f^{(8)}(E) \right) \Phi_0(E)}{1 - \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} dE \cdot \nu_f \Sigma_f^{(8)}(E) \Phi_0(E)}. \quad (4.1.2)$$

Это выражение не учитывает поглощение быстрых нейтронов в реакциях радиационного захвата, которое обычно включается в расчет резонансного поглощения нейтронов (коэффициент  $\phi$ ), а также размножение быстрых нейтронов за счет деления ядер  $^{235}\text{U}$ , так как для топлива низкого обогащения этим фактором можно пренебречь.

В многогрупповом приближении коэффициент размножения быстрых нейтронов представляется в виде

$$\mu = 1 + \frac{\sum_{g=1}^{g=g_0} (\nu_f^g - 1) \cdot \Sigma_{f,8}^g \cdot \Phi_g}{1 - \sum_{g=1}^{g=g_0} \nu_f^g \cdot \Sigma_{f,8}^g \cdot \Phi_g}. \quad (4.1.3)$$

В выражении (4.1.3)  $g_0$  – число энергетических групп, расположенных выше порога деления  $^{238}\text{U}$ . В том случае, когда все нейтроны, имеющие энергию выше порога деления  $^{238}\text{U}$ , так называемые надпороговые нейтроны, объединяются в одну группу ( $g_0 = 1$ ), то выражение для коэффициента  $\mu$  принимает следующий вид:

$$\mu = 1 + \frac{(v_f^1 - 1) \cdot \Sigma_{f,8}^1 \cdot \chi_1}{\Sigma_{a,d}^1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_f^1 \cdot \Sigma_{f,8}^1 \cdot \chi_1}{\Sigma_{a,d}^1}}. \quad (4.1.4)$$

Сечение увода  $\Sigma_{a,d}^1$  для надпороговых нейтронов включает в себя сечение захвата и неупругого рассеяния нейтронов на  $^{238}\text{U}$   $\sigma_{ad,8}^{(1)} = \sigma_{a,8}^{(1)} + \sigma_{d,8}^{(1)}$  и сечение увода за счет упругого рассеяния с ядрами замедлителя  $\sigma_{d,зам}^{(1)}$ . Из-за малой концентрации  $^{238}\text{U}$  его вклад в сечение увода в первой группе не будем учитывать. В результате зависимость коэффициента размножения на быстрых нейтронах от разбавления  $C = \frac{\rho_{зам}}{\rho_8}$  будет иметь вид:

$$\mu = 1 + \frac{(v_f^1 - 1) \cdot \sigma_{f,8}^1 \cdot \chi_1}{1 + C \cdot \frac{\sigma_{d,зам}^{(1)}}{\sigma_{ad,8}^{(1)}}} = 1 + \frac{(v_f^1 - 1) \cdot \sigma_{f,8}^1 \cdot \chi_1}{1 + C \cdot \frac{\sigma_{d,зам}^{(1)}}{\sigma_{ad,8}^{(1)}} - v_f^1 \cdot \sigma_{f,8}^1 \cdot \chi_1} \cdot \frac{1}{1 + C \cdot \frac{\sigma_{d,зам}^{(1)}}{\sigma_{ad,8}^{(1)}}}. \quad (4.1.5)$$

При увеличении концентрации ядер замедлителя, то есть при возрастании разбавления размножающей среды, вероятность реакции деления на  $^{238}\text{U}$  уменьшается, а поэтому коэффициент размножения на быстрых нейтронах должен снижаться по мере роста разбавления. Из выражения (4.1.5) также следует, что коэффициент размножения уменьшается с ростом разбавления топлива замедлителем. Формально, максимального значения этот коэффициент достигает при  $C \rightarrow 0$ , а именно,  $\mu = 1 + (v_f^1 - 1) \cdot \sigma_{f,8}^1 \cdot \chi_1 \approx 1.23$ . Однако при малых разбавлениях топлива размножающую среду уже нельзя будет отнести к средам с тепловым спектром нейтронов.

## 4.2. Вероятность избежать резонансного поглощения

Энергетическая зависимость сечений взаимодействия нейтронов с тяжелыми ядрами имеют четко выраженную резонансную структуру. Резонанс в нейтронных сечениях наблюдается и у ядер со средними и малыми атомными массами, но главную роль в физике реакторов играют резонансные сечения тяжелых ядер, особенно  $^{238}\text{U}$ . В последующем изложении будем иметь в виду главным образом  $^{238}\text{U}$ , хотя все изложенное здесь будет справедливо и для смеси  $^{232}\text{Th}$  с делящимися изотопами.

**Основные характеристики резонансного взаимодействия нейтронов.** При столкновении нейтрона с ядром, имеющим массовое число  $A$ , могут происходить взаимодействия двух типов. В первом случае нейтроны рассеиваются на ядре как на «твердом шарике», без проникновения в ядро и, тем самым, не возбуждая его внутренних степеней свободы. Такой процесс носит название упругого потенциального рассеяния и его сечение  $\sigma_p$  слабо зависит от энергии нейтронов (для  $^{238}\text{U}$   $\sigma_p \approx 11$  б). Однако существует и другая возможность, когда сталкивающийся нейтрон проникает в ядро, образуя так называемое «составное ядро» в возбужденном состоянии. Энергия возбуждения составного ядра складывается из энергии связи нейтрона в ядре  $E_{\text{св}}$  и кинетической энергии нейтрона  $E_k$ , так что энергия возбуждения  $E_v = E_{\text{св}} + E_k$ . Возбуждение ядра оказывается довольно сильным, поскольку  $E_{\text{св}} \approx 7$  МэВ.

Атомное ядро является квантовой системой с определенными энергетическими уровнями  $E_i$ . Когда  $E_v$  близко к одному из квантовых уровней  $E_i$ , вероятность образования составного ядра резко возрастает, что приводит к пикам в нейтронных сечениях. Положение резонанса на оси кинетических энергий нейтрона дается выражением  $E_k = E_i - E_{\text{св}}$ , а частота следования резонансов определяется плотностью уровней составного ядра.

Энергетические уровни составного ядра не являются стационарными, имеют конечное время жизни  $\tau$  и ядро распадается по одному из нескольких возможных каналов (рис. 4.1).

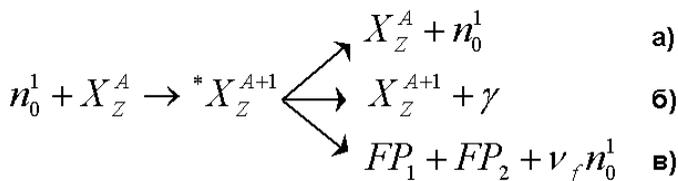


Рис. 4.1. Взаимодействие резонансного нейтрона с ядром:  
 а – упругое резонансное рассеяние, б – резонансный захват нейтрона,  
 в – резонансное деление ядра

Первый канал характеризуется сечением упругого резонансного рассеяния –  $\sigma_{sr}$ , второй – сечением радиационное резонансного захвата  $\sigma_{cr}$ , третий – сечением резонансного деления  $\sigma_{ff}$ . Для  $^{238}\text{U}$  при резонансных энергиях открыты лишь первые два канала.

Конечное время жизни (в соответствии с принципом неопределенности  $\Delta E \cdot \Delta t \approx h$ ) приводит к неопределенностям в положении уровня и к конечной ширине резонансной линии. Ширина уровня  $\Gamma = h / \tau$  пропорциональна распаду составного ядра в единицу времени. Если обозначить вероятность распада ядра по каналу  $x$  как  $w_x$ , то парциальные ширины будут равны  $\Gamma_x = w_x \cdot \Gamma$  и  $\Gamma = \sum_i \Gamma_x^i$ .

Для ядер  $^{238}\text{U}$  ширина резонанса состоит из двух слагаемых:  $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$  а для делящихся ядер – из трех  $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma + \Gamma_f$ .

Ширина  $\Gamma$  зависит от индивидуальных характеристик отдельных уровней и изменяется от уровня к уровню. Однако усредненная по нескольким уровням вблизи энергии  $E$  ширина  $\bar{\Gamma}_n$  плавно изменяется с энергией по закону  $\bar{\Gamma}_n \sim \sqrt{E}$ , поэтому приведенная нейтронная ширина  $\bar{\Gamma}_n^{(0)} = \Gamma_n / \sqrt{E}$  слабо зависит от энергии резонанса. Радиационная ширина  $\Gamma_\gamma$  является суммой ширин, соответствующих радиационному распаду возбужденного состояния составного ядра в низшие возбужденные состояния, и флуктуирует от уровня к уровню в гораздо меньшей степени, чем  $\Gamma_n$ . Для  $^{238}\text{U}$   $\bar{\Gamma}_\gamma = 0.025$  эВ.

В простейшем приближении энергетическая зависимость сечения резонансного взаимодействия нейтрона с ядром вблизи резонансной энергии  $E_0$  описывается одноуровневой формулой Брейта – Вигнера:

$$\sigma_r(E) = \frac{\sigma_{r0}}{1 + \left( \frac{E - E_i}{\Gamma/2} \right)^2}, \quad (4.2.1)$$

где  $\sigma_{r0}$  – высота резонанса,  $\sigma_{sr} = \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \cdot \sigma_r(E)$ ,  $\sigma_{cr} = \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \cdot \sigma_r(E)$ .

Частота следования резонансов определяется плотностью уровней составного ядра. Среднее расстояние между резонансами  $^{238}\text{U}$   $\bar{D} \cong 20$  эВ. Величина резонансного сечения в максимуме  $\sigma_{r0}$  при малых энергиях резонансов весьма велики, достигая при  $E \sim 10$  эВ величины  $\sim 10000$  б. С ростом энергии  $\sigma_{r0}$  уменьшается и при  $E \sim 100$  КэВ оказывается сравнимой с сечением потенциального рассеяния  $\sigma_p$ . В действительности, подобное сглаживание резонансной структуры сечений происходит при более низких энергиях ( $\sim 30$  кэВ) за счет «доплеровского» уширения резонансов.

**Резонансное поглощение в размножающей среде. Резонансный интеграл.** Пусть имеется однородная бесконечная среда – смесь резонансного поглотителя с концентрацией  $\rho_{\Pi}$  и сечением потенциального рассеяния  $\sigma_p$  и замедлителя с концентрацией  $\rho_{\text{зам}}$  и сечением рассеяния  $\sigma_s$ . Полное сечение потенциального рассеяния для такой однородной среды  $\Sigma_{sp} = \sigma_p \cdot \rho_{\Pi} + \sigma_s \cdot \rho_{\text{зам}}$ .

Рассмотрим резонансное поглощение нейтронов при замедлении на примере единичного изолированного резонансного уровня при энергии  $E_i$ . Введем следующие параметры резонансов:

$E_i$  – энергия резонансного уровня;

$\sigma_{0i}$  – сечение в центре резонансной линии при  $E = E_i$ ;

$\Gamma$  – ширина резонанса;

$D$  – расстояние между резонансами;

$\Delta E_i$  – эффективная ширина резонанса, то есть область энергий, где еще учитывается воздействие резонанса на спектр нейтронов. Если  $D \gg \Gamma$ , то резонанс можно считать изолированным.

Для одиночного изолированного резонанса (рис. 4.2) справедлива указанная выше формула Брейта – Вигнера:

$$\sigma_r(E) = \frac{\sigma_{0,i}}{1 + \left(\frac{E - E_i}{\Gamma/2}\right)^2},$$

$$\sigma_r(E) = \sigma_a(E) + \sigma_{sr}(E), \quad \Gamma = \Gamma_a + \Gamma_n, \quad (4.2.2)$$

$$\sigma_a(E) = \sigma_r(E) \cdot \frac{\Gamma_a}{\Gamma}, \quad \sigma_{sr}(E) = \sigma_r(E) \cdot \frac{\Gamma_n}{\Gamma}.$$

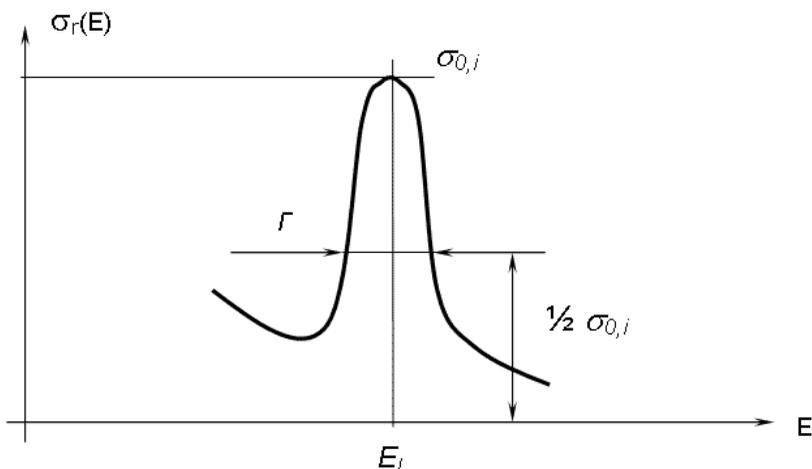


Рис. 4.2. Резонансная линия Брейта – Вигнера  $\sigma_r(E)$

Как известно, в случае слабого поглощения среды ( $\Sigma_a \ll \Sigma_t$ ), поток нейтронов в ней описывается возрастным приближением, а вероятность избежать резонансного поглощения в возрастном приближении имеет вид:

$$\varphi_i = \exp\left(-\int_{\Delta E_i} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_{sp}} \frac{dE'}{E'}\right),$$

$$\Sigma_a(E) = \rho_{\Pi} \cdot \sigma_{ar}(E); \quad \Sigma_{sp} = \rho_{\Pi} \cdot \sigma_p + \rho_{зам} \cdot \sigma_s^{зам}, \quad (4.2.3)$$

$$\xi = \frac{\xi_{\Pi} \cdot \Sigma_p + \xi_{зам} \cdot \Sigma_s^{зам}}{\Sigma_{sp}}.$$

Сечение потенциального рассеяния поглотителя и замедлителя слабо меняются в пределах резонансного уровня, поэтому величину  $\xi \Sigma_s$  можно вынести из-под знака интеграла. В результате получим выражение:

$$\varphi_i = \exp\left(-\frac{\rho_{\Pi} \cdot J_{R,i}}{\xi \Sigma_s}\right), \quad J_{R,i} = \int_{\Delta E_i} \sigma_a(E') \frac{dE'}{E'}. \quad (4.2.4)$$

Величина  $J_{R,i}$  носит название резонансного интеграла. Заметим, что для одного резонансного уровня  $\varphi \approx 1$  и  $p_i = 1 - \varphi_i \ll 1$ , где  $p_i$  – есть вероятность нейтрону испытать поглощение на  $i$ -м резонансе. Поэтому  $\varphi_i = 1 - p_i \approx \exp(-p_i)$ ,  $p_i = \frac{\rho_{\Pi} \cdot J_{R,i}}{\xi \Sigma_s}$ .

Вычислим резонансный интеграл для одиночного резонансного уровня:

$$J_{R,i} = \int_{\Delta E_i} \sigma_a(E) \cdot \frac{dE}{E} = \int_{\Delta E_i} \frac{\Gamma_{\gamma} \cdot \sigma_{r0}}{\Gamma \cdot \left[1 + \left(\frac{E - E_i}{\Gamma/2}\right)^2\right]} \cdot \frac{dE}{E}.$$

Если область действия резонанса  $\Delta E_i \ll E_i$ , то переменную  $E$  в знаменателе подынтегрального выражения можно вынести из-под знака интеграла, присвоив ей значение резонансной энергии  $E = E_i$ :

$$J_{R,i} = \frac{\Gamma_\gamma \cdot \sigma_{r0}}{\Gamma \cdot E_i} \cdot \int_{\Delta E_i} \frac{dE}{1 + \left(\frac{E - E_i}{\Gamma/2}\right)^2}.$$

Производя стандартную замену переменных интегрирования

$$\left(\frac{E - E_i}{\Gamma/2}\right) = x, \quad dE = \frac{\Gamma}{2} \cdot dx, \quad \text{резонансный интеграл представим}$$

в виде  $J_{R,i} = \frac{\Gamma_\gamma \cdot \sigma_{r0}}{\Gamma \cdot E_i} \cdot \int_{\Delta E} \frac{dx}{1 + x^2}.$

Пределы интегрирования по переменной  $x$  симметричны относительно  $x = 0$ . Наибольшего значения подынтегральное выражение принимает в центре резонансной линии при  $x = 0$ . При энергиях, отличных от резонансной энергии, подынтегральное выражение резко уменьшается и стремится к нулю. Поэтому пределы интегрирования можно распространить от  $-\infty$  до  $+\infty$ , так как основное значение интеграл набирает в области  $E \in [E_i - \Gamma, E_i + \Gamma]$ ,  $|x| \approx 1$ . Таким образом, получим для резонансного интеграла выражение

$$J_{R,i} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma_\gamma \cdot \sigma_{r0}}{E_i}. \quad (4.2.5)$$

Однако если концентрация резонансного поглотителя достаточно велика, поглощение в резонансе становится существенной величиной, поток нейтронов в районе резонанса сильно изменяется в зависимости от энергии и возрастное приближение становится неприменимым для этого случая.

**Приближение узких резонансов. Эффективный резонансный интеграл.** Резонанс считается сильным, если выполнено условие

$$\Sigma_{r0} = \sigma_{r0} \cdot \rho_{\Pi} \gg \Sigma_{sp}. \quad (4.2.6)$$

Для определения потока нейтронов в области действия резонанса, когда резонанс считается сильным, воспользуемся газокинетиче-

ским уравнением замедления для однородной бесконечной среды. Для резонансов, которые относятся к категории сильных резонансов, расположенных в области энергий от нескольких эВ до 10 кэВ, источником нейтронов служит только реакция рассеяния нейтронов на ядрах замедлителя и резонансного поглотителя, причем за время замедления нейтроны успевают совершить большое число рассеивающих столкновений:

$$\begin{aligned} \Sigma_t(E) \cdot \Phi(E) = & \int_E^{E/\alpha_{\text{зам}}} \frac{dE'}{E' \cdot (1 - \alpha_{\text{зам}})} \cdot \Sigma_s^{\text{зам}}(E') \cdot \Phi(E') + \\ & + \int_E^{E/\alpha_{\text{П}}} \frac{dE'}{E' \cdot (1 - \alpha_{\text{П}})} \cdot \Sigma_s^{\text{П}}(E') \cdot \Phi(E'), \end{aligned}$$

где  $\alpha_{\text{П}}, \alpha_{\text{зам}}$  – минимальное значение относительной энергии нейтрона на один акт рассеяния на ядрах урана и замедлителя соответственно

$$\alpha = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}.$$

Резонанс считается узким, если ширина резонанса много меньше ступеньки замедления как для замедлителя, так и для резонансного поглотителя, при этом выполняются условия:

$$\begin{aligned} \Delta E_i & \ll E_i \cdot (1 - \alpha_{\text{П}}), \\ \Delta E_i & \ll E_i \cdot (1 - \alpha_{\text{зам}}). \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Для узкого резонанса основной вклад в интеграл рассеяния вносит область энергий, далекая от энергии резонанса. В этой области энергий поток нейтронов от единичного источника описывается распределением Ферми  $\Phi_0(E) = \frac{1}{\xi \Sigma_{sp} \cdot E}$ . Отличие потока нейтронов от распределения Ферми заключено в области энергий, сравнимой с шириной резонанса. Но так как эта область составляет малую часть всей области интегрирования (узкий резонанс), то при интегрировании по энергии в правой части уравнения баланса по-

ложим  $\Phi(E) = \Phi_0(E)$  во всей области интегрирования. Кроме того, будем считать, что в пределах всей ступеньки замедления  $\Sigma_s^{\text{зам}} = \text{const}$ ,  $\Sigma_p = \rho_{\Pi} \cdot \sigma_p$ . С учетом принятых упрощений, уравнение для определения спектра нейтронов в области резонанса примет вид:

$$\Sigma_t(E) \cdot \Phi(E) = \frac{1}{\xi \Sigma_{sp}} \cdot \left[ \frac{\Sigma_s^{\text{зам}}}{1 - \alpha_{\text{зам}}} \cdot \int_E^{E/\alpha_{\text{зам}}} \frac{dE'}{E'^2} + \frac{\Sigma_p}{1 - \alpha_{\Pi}} \cdot \int_E^{E/\alpha_{\Pi}} \frac{dE'}{E'^2} \right]. \quad (4.2.8)$$

Интегрируя уравнение (4.2.8) и учитывая, что  $\int_E^{E/\alpha} \frac{dE'}{E'^2} = -\frac{1}{E'} \Big|_E^{E/\alpha} = \frac{1}{E} - \frac{\alpha}{E} = \frac{1-\alpha}{E}$ , получим окончательное уравнение для определения потока нейтронов в области действия резонанса:

$$\Sigma_t(E) \cdot \Phi(E) = \frac{\Sigma_s^{\text{зам}}}{\xi^{\text{зам}} \cdot \Sigma_s^{\text{зам}} \cdot E} + \frac{\Sigma_p}{\xi^{(\Pi)} \cdot \Sigma_p \cdot E} = \frac{\Sigma_{sp}}{\xi \cdot \Sigma_{sp} \cdot E}, \quad (4.2.9)$$

решение которого имеет вид  $\Phi(E) = \frac{1}{\xi \cdot \Sigma_t(E) \cdot E}$ .

Полученное решение носит название спектра Вигнера, которое, в отличие от спектра Ферми, описывает спектр нейтронов в области действия сильного резонанса.

Вблизи энергии резонанса сечение резонансного взаимодействия, как и полное сечение  $\Sigma_t(E)$ , резко возрастает, что приводит к падению потока резонансных нейтронов. Таким образом, оказывается, что чем выше сечение резонансного взаимодействия, тем ниже поток нейтронов в этой области энергий. Этот эффект называется резонансной блокировкой (рис. 4.3). В результате действия этого эффекта поглощение резонансных нейтронов осуществляется примерно с одинаковой интенсивностью во всей области действия резонанса, поскольку резонансное поглощение определяется произ-

ведением сечения поглощения на поток нейтронов в рассматриваемой области энергий. В той области энергий, где сечение взаимодействия ниже, поток нейтронов выше, поэтому произведение этих величин изменяется в существенно меньшей степени, чем изменяется само сечение резонансного взаимодействия. Следовательно, в резонансном поглощении важную роль играет не только высота резонанса, но и ширина области действия резонанса.

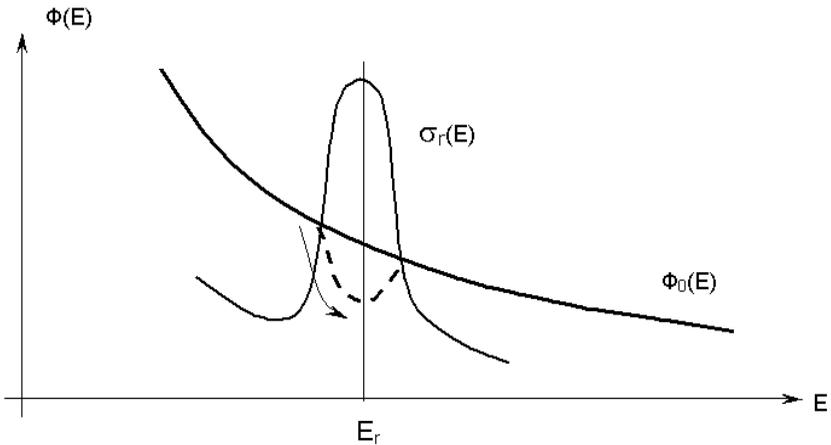


Рис. 4.3. Блокировка резонанса

Для вычисления вероятности избежать резонансного поглощения  $p_i$  на  $i$ -м резонансе воспользуемся выражением для величины вероятности поглощения, которая для случая единичного источника нейтронов вдали от резонанса имеет вид:

$$p_i = \int_{\Delta E_i} dE' \cdot \Sigma_a(E') \cdot \Phi(E') = \frac{\rho_{\Pi} \cdot J_{ef,i}}{\xi \Sigma_{sp}}, \quad (4.2.10)$$

$$J_{ef}^i = \int_{\Delta E_i} dE' \cdot \sigma_a(E') \cdot \frac{\xi \Sigma_{sp}}{\xi \cdot \Sigma_t(E') \cdot E'}$$

Тогда  $\varphi_i = 1 - p_i$ , но поглощение на одном резонансе крайне мало  $p_i \ll 1$  и  $\varphi_i \approx \exp(-p_i)$ . Величина  $J_{efi}$  носит название эффективного резонансного интеграла. Из выражения (4.2.10) следует, что это есть резонансный интеграл от некоторого эффективного сечения резонансного поглощения, которое отличается от истинного резонансного сечения множителем

$$\sigma_{a,ef} = \sigma_{ar}(E) \cdot \frac{\xi \Sigma_{sp}}{\xi \Sigma_t} = \sigma_{ar}(E) \cdot \frac{\Phi(E)}{\Phi_0(E)}. \quad (4.2.11)$$

Таким образом, эффективное сечение учитывает депрессию потока нейтронов в сильном резонансе. Пренебрегая интерференционным членом потенциального и резонансного взаимодействия, запишем  $\Sigma_t(E) = \rho_{\Pi} \cdot \sigma_r(E) + \Sigma_{sp}$ . После подстановки  $\Sigma_t(E)$  в (4.2.10) получим выражение для эффективного резонансного интеграла в интегральной форме:

$$J_{ef}^i = \int_{\Delta E_i} dE' \cdot \sigma_a(E') \cdot \frac{\Sigma_{sp}}{(\Sigma_r(E') + \Sigma_p) \cdot E'}. \quad (4.2.12)$$

Для вычисления этого интеграла произведем стандартную замену переменных:

$$x = \frac{E - E_i}{\Gamma/2}, \quad dE = \frac{\Gamma \cdot dx}{2}, \quad \sigma_a(x) = \frac{\sigma_{0i}}{1 + x^2} \cdot \frac{\Gamma_a}{\Gamma},$$

после чего выражение для эффективного резонансного интеграла примет вид:

$$\begin{aligned}
J_{ef}^i &\cong \int_{\Delta E_i} \frac{\sigma_{0i} \cdot \Gamma_a}{2 \cdot E_i} \cdot \frac{dx}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{0i} \cdot \rho_{\Pi}}{(1+x^2) \cdot \Sigma_{sp}}} = \\
&= \frac{\sigma_{0i} \cdot \Gamma_a}{2 \cdot E_i} \cdot \int_{\Delta E_i} \frac{dx}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{0i} \cdot \rho_{\Pi}}{(1+x^2) \cdot \Sigma_{sp}}} = \frac{\sigma_{0i} \cdot \Gamma_a}{2 \cdot E_i} \cdot \frac{\frac{\Delta E_i}{\Gamma}}{\frac{\Delta E_i}{\Gamma} \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{\sigma_{0i} \cdot \rho_{\Pi}}{\Sigma_{sp}}}.
\end{aligned}$$

Если обозначить  $\beta_i = \frac{\sigma_{0i} \cdot \rho_{\Pi}}{\Sigma_{sp}}$  и ввести новую переменную интегрирования

$y = \frac{x}{\sqrt{1+\beta_i}}$ ,  $dy = \frac{dx}{\sqrt{1+\beta_i}}$ , то в результате получим:

$$\begin{aligned}
J_{ef}^i &= \frac{\sigma_{0i} \cdot \Gamma_a}{2 \cdot E_i} \cdot \frac{\frac{\Delta E_i}{\Gamma \cdot \sqrt{1+\beta_i}}}{\frac{-\Delta E_i}{\Gamma \cdot \sqrt{1+\beta_i}}} \int dy \cdot \sqrt{1+\beta_i} \cdot \frac{1}{(1+\beta_i) + y^2 \cdot (1+\beta_i)} = \\
&= \frac{\sigma_{0i} \cdot \Gamma_a}{2 \cdot E_i \cdot \sqrt{1+\beta_i}} \cdot \frac{\frac{\Delta E_i}{\Gamma \cdot \sqrt{1+\beta_i}}}{\frac{-\Delta E_i}{\Gamma \cdot \sqrt{1+\beta_i}}} \int \frac{dy}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Если  $|y| \gg 1$ , то  $\frac{1}{1+y^2} \ll 1$ . Поэтому главный вклад в интеграл

дадут те значения  $y$ , для которых  $|y| \leq 1$ , т.е. значения энергии в пределах  $|\Delta E_i| \leq \Gamma \cdot \sqrt{1+\beta_i}$ . Последнее соотношение позволяет оценить область действия резонанса по энергетической шкале  $\Delta E_i = \Gamma \cdot \sqrt{1+\beta_i}$ . Таким образом, область действия резонанса  $\Delta E_i$  оказывается значительно больше истинной ширины резонанса  $\Gamma$ .

Так как резонанс изолированный, то пределы интегрирования можно распространить на интервал  $(-\infty, \infty)$ , в результате получим

окончательное выражение для эффективного резонансного интеграла:

$$J_{ef}^i = \frac{\sigma_{0i} \cdot \Gamma_a}{2 \cdot E_i \cdot \sqrt{1 + \beta_i}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma_{0i} \cdot \Gamma_a}{E_i \cdot \sqrt{1 + \beta_i}} = \frac{J_R^i}{\sqrt{1 + \beta_i}}. \quad (4.2.13)$$

Нетрудно заметить, что  $J_{ef}^i \leq J_R^i$ . Ранее введенный параметр  $\beta_i$  носит название фактора блокировки и зависит от соотношения резонансного и потенциального макросечения взаимодействия. По этому параметру все резонансы для заданной композиции размножающей среды можно разделить на две предельные группы: сильные и слабые.

**Слабый резонанс.** Слабый резонанс характеризуется малой величиной фактора блокировки:

$$\beta_i \ll 1, \quad \frac{\sigma_{0i} \cdot \rho_{\Pi}}{\Sigma_{sp}} \ll 1, \quad \sigma_{0i} \cdot \rho_{\Pi} \ll \Sigma_{sp} \rightarrow J_{ef}^i \approx J_R^i.$$

Для слабого резонанса эффективный резонансный интеграл совпадает с резонансным интегралом. Это связано с тем фактом, что для слабого резонанса депрессия потока резонансных нейтронов практически отсутствует. В результате вероятность резонансного поглощения нейтронов на этом резонансе будет возрастать пропорционально концентрации резонансного поглотителя.

**Сильный резонанс.** В противоположность слабому резонансу, сильный резонанс характеризуется большими значениями фактора блокировки:

$$\beta_i \gg 1, \quad \frac{\sigma_{0i} \cdot \rho_{\Pi}}{\Sigma_{sp}} \gg 1, \quad \sigma_{0i} \cdot \rho_{\Pi} \gg \Sigma_{sp},$$

$$J_{ef}^i = J_{R,i} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma_{sp}}{\sigma_{0i} \cdot \rho_{\Pi}}} = J_{R,i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma_{0i}}} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma_{sp}}{\rho_{\Pi}}}.$$

Величина  $\sigma_0^* = \frac{\Sigma_{sp}}{\rho_{\Pi}} = \sigma_p + \frac{\rho_{\text{зам}}}{\rho_{\Pi}} \cdot \sigma_s^{\text{зам}}$  имеет смысл сечения рас-

сеяния гомогенной среды, приходящегося на одно ядро резонансного поглотителя. Эта величина зависит от разбавления среды  $C$ , причем с ростом концентрации поглотителя, то есть с уменьшением разбавления среды, величины  $\sigma_0^*$  и  $J_{ef}^i$  уменьшаются. Очевидно, что вероятность резонансного поглощения нейтронов при этом также будет возрастать, однако рост будет пропорциональным  $\sqrt{\rho_{\Pi}}$ . Соответственно, в той же степени будет уменьшаться вероятность избежать резонансного поглощения нейтронов на этом резонансе. Эффект самоэкранировки (блокировки) резонанса оказывается весьма большим. Например, для первого резонанса  $^{238}\text{U}$   $E_i = 6.7\text{эВ}$ ,  $\sigma_{r0} = 23000\text{ б}$ , так что при  $\sigma_0^* = 25\text{ б}$   $J_{ef}^i$  оказывается в 30 раз меньше  $J_{R,i}$ .

Будем считать, что область действия резонанса по энергетической шкале  $\Delta E_i$  определяется из условия  $\Sigma_{ri}(E_0 \pm \frac{\Delta E_i}{2}) = \Sigma_{sp}$ . Это условие означает, что величина резонансного сечения на крыльях резонанса совпадает с сечением потенциального рассеяния среды. Подставим в это условие выражение для резонансного сечения в форме Брейта – Вигнера:  $\frac{\rho_{\Pi} \cdot \sigma_{0i}}{1 + (\Delta E_i / \Gamma)^2} = \Sigma_{sp}$ , получим, считая

$(\Delta E / \Gamma) \gg 1$ :

$$\Delta E_i \cong \sqrt{\left( \frac{\sigma_{0i}}{\sigma_0^*} \right)} \cdot \Gamma.$$

Эффективная ширина сильных резонансов мало меняется от резонанса к резонансу и составляет при небольших разбавлениях  $\sim 1\text{ эВ}$ .

Необходимо подчеркнуть, что свойство резонанса быть сильным или слабым определяется не только параметрами резонанса,

но и свойствами размножающей среды, главным образом величиной разбавления. Один и тот же резонанс может считаться в одной среде сильным, а в другой – слабым. То же самое относится и к области действия резонанса.

**Интерполяционная формула для системы узких резонансов.**

Рассмотрим замедление в среде с поглотителем, имеющим изолированные резонансы при энергиях  $E_i$ . Поскольку резонансы не перекрываются, то вероятность избежать поглощения на каждом резонансе не зависит от наличия других резонансов. Тогда вероятность избежать резонансного поглощения при замедлении на всей рассматриваемой совокупности резонансов  $\varphi$  будет равна произведению вероятностей:  $\varphi = \prod_i \varphi_i = \prod_i \exp(-p_i) = \exp(-\sum_i p_i)$ .

Учитывая, что  $p_i = \frac{\rho_{\Pi} \cdot J_{ef}^i}{\bar{\xi} \Sigma_{sp}}$ , получим:

$$\varphi = \frac{\rho_{\Pi} \cdot \sum_i J_{ef}^i}{\bar{\xi} \Sigma_{sp}} = \frac{\rho_{\Pi} \cdot J_{ef}}{\bar{\xi} \Sigma_{sp}},$$

$$J_{ef} = \sum_i J_{ef}^i.$$

Таким образом, в этом приближении эффективный резонансный интеграл  $J_{ef}^i$  оказывается аддитивной величиной и можно ввести суммарный эффективный резонансный интеграл  $J_{ef} = \sum_i J_{ef}^i$ , при-

чем  $\varphi = \exp\left(-\frac{\rho_{\Pi} \cdot J_{ef}}{\bar{\xi} \Sigma_{sp}}\right)$ .

Предположим, что всю рассматриваемую совокупность резонансов можно разделить на две группы: сильные и слабые резонансы. Конечно, граница между группами достаточно неопределенна и зависит от концентрации поглотителя  $\rho_{\Pi}$ . Для этого случая получим простейшую аппроксимацию для  $J_{ef}$ :

$$J_{ef} = \sum_i J_{ef}^i + \sum_j J_{R,j}. \quad (4.2.14)$$

Первая сумма берется по сильным резонансам ( $\Sigma_{ri} \gg \Sigma_{sp}$ ), а вторая по слабым ( $\Sigma_{ri} \ll \Sigma_{sp}$ ). Подставляя в (4.2.14) выражения для  $J_{ef}^i$  по сильным и слабым резонансам, получим выражение, описывающее величину  $J_{ef}$ :

$$J_{ef} = \sqrt{\sigma_0^*} \cdot \sum_i \frac{\pi \cdot \Gamma_\gamma^i \cdot \sqrt{\sigma_{r0}^i}}{2 \cdot E_i} + \sum_j \frac{\pi \cdot \sigma_{r0}^j \cdot \Gamma_\gamma^j}{2 \cdot E_j}. \quad (4.2.15)$$

Каждая из сумм в (4.2.15) является ядерной константой для данного поглотителя, не зависящей от его концентрации резонансного поглотителя  $\rho_{II}$ . Обозначим их через  $b$  и  $a$  соответственно, тогда

$$J_{ef} = a + b \cdot \sqrt{\sigma_0^*}.$$

Константы  $a$  и  $b$  могут быть вычислены с помощью резонансных параметров или найдены путем обработки результатов измерений эффективного резонансного интеграла. Для  $^{238}\text{U}$  эта зависимость имеет вид  $J_{ef} = 2.95 + 2.1 \cdot \sqrt{\sigma_0^*}$ .

При максимальной концентрации  $^{238}\text{U}$  (нулевое разбавление)  $\sigma_0^* = \sigma_{sp} = 11$ , так что минимальная величина  $J_{ef} = 10$  б, тогда как  $J_R = 280$  б. С разбавлением  $^{238}\text{U}$  замедлителем  $\sigma_0^*$  и  $J_{ef}$  растут, но при очень малых концентрациях  $^{238}\text{U}$  сильные резонансы становятся слабыми и полученная формула, строго говоря, неприменима.

**Приближение широких резонансов. Промежуточный резонанс.** Основное предположение теории узких резонансов выполняется в широком энергетическом интервале. Однако при рассмотре-

нии резонансов в области энергий эпитеплогового и теплового спектров, ступенька замедления на резонансном поглотителе становится сравнимой с шириной резонанса и даже может быть много меньше ширины резонанса. Случай, когда ступенька замедления на резонансном поглотителе оказывается много меньше ширины резонанса, называется широким резонансом. Такая ситуация имеет место для резонансов  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{241}\text{Pu}$  при энергии  $E = 0.3$  эВ, а также для резонанса  $^{240}\text{Pu}$  при энергии  $E = 0.1$  эВ. Отметим, что ступенька замедления на замедлителе всегда много больше ширины резонанса. Итак, для модели широкого резонанса должны выполняться условия:

$$\Delta E_i \gg E_i \cdot (1 - \alpha_{\Pi}), \quad \Delta E_i \ll E_i \cdot (1 - \alpha_{\text{зам}}).$$

Для резонансного поглотителя рассеяние резонансного нейтрона не выводит его из области действия резонанса. Будем считать, что рассеяние нейтрона на ядре поглотителя не меняет энергии налетевшего нейтрона. С физической точки зрения это может быть в том случае, когда масса ядер поглотителя бесконечно большая. Поэтому приближение широких резонансов называют также приближением «бесконечной массы поглотителя». Математически это можно трактовать как равенство нулю сечения рассеяния на резонансном поглотителе, причем как для потенциального рассеяния, так и для резонансного рассеяния. Следовательно, для широкого резонанса  $\Sigma_t(E) = \Sigma_{ar}(E) + \Sigma_s^{\text{зам}}$ . Уравнение баланса резонансных нейтронов в этом случае имеет вид:

$$\Sigma_t(E) \cdot \Phi(E) = \int_E^{E/\alpha_{\text{зам}}} \frac{\Sigma_s^{(\text{зам})}(E') \cdot \Phi(E') dE'}{(1 - \alpha_{\text{зам}}) \cdot E'}. \quad (4.2.16)$$

Сечение рассеяния замедлителя можно считать величиной постоянной внутри ступеньки замедления, но поскольку сама ступенька замедления на замедлителе предполагается существенно больше ширины резонанса, то поток нейтронов в подынтегральном выражении можно заменить распределением Ферми, в результате получим

$$\Sigma_t(E) \cdot \Phi(E) = \frac{\Sigma_s^{\text{зам}}}{\xi \Sigma_{sp} \cdot E}; \quad \Phi(E) = \frac{\Sigma_s^{\text{зам}}}{\Sigma_t(E) \cdot \xi \Sigma_{sp} \cdot E}. \quad (4.2.17)$$

Зная спектр нейтронов в приближении широкого резонанса, можно получить выражение (4.2.17) эффективного резонансного интеграла в той же форме, как и для случая узкого резонанса:

$$J_{ef}^{\text{ШП}} = \int_{\Delta E_i} \frac{dE'}{E'} \cdot \sigma_{ar}(E') \cdot \frac{\Sigma_s^{\text{зам}}}{\Sigma_{ar}(E') + \Sigma_s^{\text{зам}}}. \quad (4.2.18)$$

Подставляя в (4.2.18) выражение (4.2.1), получим окончательное выражение для эффективного резонансного интеграла в модели широкого резонанса:

$$J_{ef}^{\text{ШП}} = \frac{J_R}{\sqrt{1 + \beta^{\text{ШП}}}}; \quad \beta^{\text{ШП}} = \frac{\sigma_{ar} \cdot \rho_{\Pi}}{\Sigma_s^{\text{зам}}}. \quad (4.2.19)$$

Сравнивая выражения факторов блокировки в случаях узкого и широкого резонанса, отметим, что в модели широкого резонанса сечение резонансного взаимодействия заменяется на сечение резонансного поглощения  $\sigma_{0r} \rightarrow \sigma_{ar}$  вследствие того, что не учитывается сечение резонансного рассеяния, а  $\Sigma_{sp} \rightarrow \Sigma_s^{\text{зам}}$ , поскольку пренебрегается и сечением потенциального рассеяния поглотителя.

Вводя в рассмотрение, как и для модели узкого резонанса, сечение рассеяния на одно ядро поглотителя

$$\sigma_o^* = \Sigma_s^{\text{зам}} / \rho_{\Pi} = \sigma_s^{\text{зам}} \cdot \left( \frac{\rho_{\text{зам}}}{\rho_{\Pi}} \right),$$

эффективный резонансный интеграл в модели широкого резонанса можно представить в той же форме, как и в модели узкого резонанса:

$$J_{ef}^{\text{ШП}} = J_R \cdot \sqrt{\frac{\sigma_o^*}{\sigma_o^* + \sigma_{ar}}}. \quad (4.2.20)$$

В принципе, наряду с узкими и широкими резонансами существуют и промежуточные резонансы, которые характеризуются тем, что для них ступенька замедления на резонансном поглотителе сравнима с эффективной шириной резонанса. Как было отмечено выше, для самого нижнего резонанса  $^{238}\text{U}$  при энергии  $E = 6.7 \text{ эВ}$  ступенька замедления на уране сопоставима с эффективной шириной резонанса. Сравнивая выражение эффективного резонансного интеграла для двух предельных случаев узкого и широкого резонанса, можно отметить, что они имеют один и тот же вид, но отличаются лишь значениями сечения рассеяния на одно ядро поглотителя  $\sigma_0^*$  и фактором блокировки  $\beta_i$ . Эти отличия можно учесть, введя некоторый коэффициент  $K$ , который в общем случае зависит от массы рассеивающего тяжелого ядра  $A$ , так что  $\Sigma_p^* = K(A) \cdot \Sigma_p$  и  $\sigma_{sr}^* = K(A) \cdot \sigma_{sr}$ , причем для узких резонансов  $K(A) \cong 1$ , а для широких резонансов  $K(A) \cong 0$ . В результате  $J_{ef}^i$  будет зависеть от атомных весов ядер, входящих в состав размножающей среды:

$$\sigma_o^* = \frac{\Sigma_p^* + \Sigma_s^{(\text{зам})}}{\rho_{\Pi}}, \quad \sigma_{0r}^* = \sigma_{ar} + \sigma_{sr}^*,$$

$$J_{ef} = J_R \cdot \sqrt{\frac{\sigma_0^*}{\sigma_0^* + \sigma_{0r}^*}}.$$

Для простейшей двухкомпонентной размножающей среды множитель  $K(A)$  можно выразить через фактор  $\lambda = \frac{\Delta E_{\max}}{\Delta E_i}$ , который равен отношению ширины ступеньки замедления  $\Delta E_{\max} = (1 - \alpha_{\Pi}) \cdot E$  для данного ядра к эффективной ширине резонанса  $\Delta E = \Gamma \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{0r}^*}{\sigma_0^*}}$ . Функция  $K(\lambda)$  должна быть определена для всех значений  $\lambda \in [0, \infty)$  и удовлетворять предельным соотношениям

ям  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} K(\lambda) = 0$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} K(\lambda) = 1$ . Этим требованиям удовлетворяет

$$\text{функция } K(\lambda) = 1 - \frac{\arctg \lambda}{\lambda}.$$

Однако практическое применение этого подхода требует выполнения итерационной процедуры, поскольку величины  $\sigma_0^*$  и фактор блокировки  $\beta$  зависят от значения  $K(\lambda)$ . Практика показала, что эта процедура довольно быстро сходится и требует выполнения всего нескольких шагов. В качестве начального приближения можно выбрать величину  $K(\lambda)$ , предполагая резонанс узким, то есть, полагая  $K = 1$ , после чего находим эффективную ширину резонанса и начальное значение параметра  $\lambda$ :

$$\Delta E_i = \sqrt{\frac{\Sigma_{r0}}{\Sigma_{sp}}}; \quad \lambda^{(0)} = \frac{\Delta E_{\max}}{\Delta E_i}.$$

Далее осуществляется следующая итерационная последовательность расчетов:

$$K^{(n)} = K(\lambda^{(n-1)}),$$

$$\Sigma_p^* = K^{(n)} \cdot \Sigma_p, \quad \sigma_{sr}^* = K^{(n)} \cdot \sigma_{sr},$$

$$\sigma_0^* = \frac{\Sigma_p^* + \Sigma_s^{3AM}}{\rho_{\Pi}}, \quad \sigma_{0r}^* = \sigma_{ar} + \sigma_{sr}^*,$$

$$J_{ef} = J_R \cdot \sqrt{\frac{\sigma_0^*}{\sigma_0^* + \sigma_{0r}^*}}, \quad \Delta E = \Gamma \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{0r}^*}{\sigma_0^*}},$$

$$\lambda^{(n+1)} = \frac{\Delta E_{\max}}{\Delta E}.$$

Итерации ведутся до тех пор, пока не будет достигнуто совпадение двух последовательных значений  $\lambda$  с заданной степенью точности

$$|\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}| < \varepsilon.$$

После этого рассчитывается эффективный резонансный интеграл для последнего значения параметра  $\lambda$ .

**Эффект Доплера.** Формула Брейта – Вигнера правильно описывает сечение резонансного взаимодействия нейтрона в системе координат, связанной с центром масс системы нейтрон-ядро мишени (при  $A \gg 1$  центр масс практически совпадает с положением ядра). Ядра среды совершают тепловое движение и поэтому в каждом акте столкновения нейтрона с ядром должна вводиться своя система отсчета движущаяся вместе с ядром, в то время как энергия нейтрона  $E$  в наших расчетах рассматривается в единой лабораторной системе. В принципе, энергия замедляющегося нейтрона существенно выше энергии теплового движения ядер. Поэтому при изучении процесса замедления нейтронов пренебрегают энергией движения ядер и рассматривают процесс столкновения нейтронов с неподвижными ядрами среды. Однако в случае резонансного взаимодействия нейтронов с ядром естественная ширина резонанса  $\Gamma$  сравнима со средней энергией теплового движения ядер  $E_T = kT$ , где  $T$  – температура среды по шкале Кельвина.

При определенной энергии нейтрона  $E$  в лабораторной системе энергия его относительного движения в системе центра масс испытывает разброс: она больше  $E$  при движении ядра навстречу нейтрону и меньше  $E$ , когда нейтрон «догоняет» ядро. Кроме того, скорости движения ядер лежат в широком диапазоне различных направлений относительно скорости нейтрона. Поэтому для каждого конкретного случая взаимодействия нейтрона с движущимся ядром сечение взаимодействия будет принимать различные значения. При большом числе взаимодействий вводится понятие среднего сечения взаимодействия для нейтрона с фиксированной энергией в лабораторной системе отсчета. Энергетическая зависимость этого сечения от энергии нейтрона в лабораторной системе отсчета будет иметь черты резонансной кривой, но ее параметры будут отличаться от естественной (брейт-вигнеровской) линии. За счет усреднения по скоростям ядер происходит размазывание резонанса – уширение и понижение его, причем эти факторы зависят от температуры среды (так называемый эффект Доплера). Эффект Доплера в резонансном поглощении приводит к важным для физики реакторов следствиям.

Для понимания сути явления рассмотрим одномерную и одно-скоростную модель движения ядер среды, а именно, будем считать, что все ядра среды имеют одинаковую по величине скорость движения, причем половина из них движется по направлению движения нейтрона, а другая половина движется в противоположном направлении.

Полное число взаимодействий нейтронов с ядрами резонансного поглотителя в лабораторной системе отсчета, равное  $\sigma_r(E) \cdot \rho_{\Pi} \cdot \Phi(E)$ , можно представить в виде суммы, слагаемые которой представляют собой число взаимодействий нейтронов с ядрами резонансного поглотителя, движущимися по определенному направлению относительно скорости нейтрона. Для выбранной модели эта сумма включает всего два слагаемых:

$$\bar{\sigma}_r(E) \cdot \rho_{\Pi} \cdot V(E) \cdot N(E) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_r(E'_{(+)}) \cdot \rho_{\Pi} \cdot V'(E'_{(+)}) \cdot N(E'_{(+)}) + \frac{1}{2} \cdot \sigma_r(E'_{(-)}) \cdot \rho_{\Pi} \cdot V'(E'_{(-)}) \cdot N(E'_{(-)}). \quad (4.2.21)$$

где  $E$  – энергия нейтрона в лабораторной системе координат;

$\bar{\sigma}_r(E)$  – усредненное резонансное сечение, выраженное относительно энергии нейтрона в лабораторной системе координат;

$V(E)$  – скорость нейтрона в лабораторной системе координат;

$N(E)$  – плотность нейтронов с энергией  $E$ ;

$E'_{(+)}, E'_{(-)}$  – энергия относительного движения нейтрона в системе центра масс для ядер, движущихся «по» и «против» направления движения нейтрона соответственно;

$V'(E'_{(+)}, V'(E'_{(-)})$  – скорость относительного движения нейтрона в системе центра масс для ядер, движущихся «по» и «против» направления движения нейтрона соответственно. Так как плотность нейтронов не зависит от того, в какой системе отсчета рассматривается энергия нейтрона, то усредненное по скоростям движения ядер сечение будет иметь вид:

$$\bar{\sigma}_r(E) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_r(E'_{(+)}) \cdot \frac{V'(E'_{(+)})}{V(E)} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_r(E'_{(-)}) \cdot \frac{V'(E'_{(-)})}{V(E)}. \quad (4.2.22)$$

В системе центра масс скорость нейтрона и его энергия выражаются через скорость движения ядер следующим образом:

$$V'(E'_{(+)}) = \frac{A}{A+1} \cdot (V - v_{\Pi}), \quad V'(E'_{(-)}) = \frac{A}{A+1} \cdot (V + v_{\Pi}),$$

$$E'_{(+)} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{A}{A+1} \right)^2 \cdot (V - v_{\Pi})^2, \quad E'_{(-)} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{A}{A+1} \right)^2 \cdot (V + v_{\Pi})^2.$$

Поскольку для ядер резонансного поглотителя  $A \gg 1$ , то  $A/(A+1) \cong 1$ . Кроме того, скорость теплового движения ядер  $v_{\Pi} \ll V$ , поэтому

$$\frac{V'}{V} = 1 \pm \frac{v_{\Pi}}{V} \cong 1, \quad E' = \frac{V^2}{2} \mp V \cdot v_{\Pi} + \frac{v_{\Pi}^2}{2} \approx E \mp V \cdot v_{\Pi}$$

Учитывая эти соотношения, получим

$$\bar{\sigma}_r(E) = \frac{1}{2} [\sigma_r(E - V \cdot v_{\Pi}) + \sigma_r(E + V \cdot v_{\Pi})]. \quad (4.2.23)$$

Рассмотрим случай, когда энергия нейтрона в лабораторной системе отсчета в точности равна энергии  $E = E_0$ . Для всех ядер поглотителя, независимо от их направления движения, энергия взаимодействия в системе центра масс будет отлична от энергии резонанса  $E'_{(+)} < E_0 < E'_{(-)}$ , а сечения взаимодействия для обоих случаев будет меньше максимального значения ( $\sigma(E'_{(-)}) < \sigma_0$  и  $\sigma(E'_{(+)}) < \sigma_0$ ). Поэтому усредненное по всем направлениям движения ядер сечение будет меньше, чем сечение при энергии резонанса  $\bar{\sigma}_r(E_0) < \sigma_{r0}$ .

Рассмотрим другой случай, когда энергия нейтрона  $E$  в лабораторной системе соответствует спадающей ветви резонанса. Для тех ядер поглотителя, которые движутся в направлении нейтрона, энергия взаимодействия будет меньше  $E'_{(+)} < E$ , как и сечение ре-

зонансного взаимодействия  $\sigma(E'_{(+)}) < \sigma(E)$ . Для ядер противоположного направления движения энергия взаимодействия будет больше  $E'_{(-)} > E$ , но сечение резонансного взаимодействия  $\sigma(E'_{(-)}) > \sigma(E)$ . Однако спад сечения на крыльях резонанса уменьшается по мере снижения энергии взаимодействия, поэтому усредненное по всем направлениям движения ядер сечение будет больше, чем сечение при энергии резонанса  $\bar{\sigma}_r(E) > \sigma_r(E)$ . Таким образом, на крыльях резонанса усредненное сечение выше резонансного, а в центре резонансной кривой – ниже резонансного. Поскольку полученный результат не зависит от выбора энергии движения ядер поглотителя, то это общий факт. Тем самым показано, что усредненное сечение резонансного взаимодействия нейтрона с ансамблем ядер, движущихся с разными скоростями, будет ниже вблизи пика резонанса и выше на его краях, то есть происходит уменьшение резонанса при одновременном его уширении.

Рассмотрим общий случай, когда скорости движения ядер различаются как по величине, так и по направлению движения. Будем считать, что ядра поглотителя имеют максвелловское распределение скоростей движения ядер:

$$N(v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{A}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \exp \left( - \frac{A \cdot (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right), \quad (4.2.24)$$

где  $T$  – температура среды (резонансного поглотителя);

$A$  – масса ядер резонансного поглотителя;

$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$  – скорость ядер поглотителя.

Выберем в качестве оси  $x$  лабораторной системы координат направление движения нейтрона. В этой системе координат картина взаимодействия нейтрона с ядрами среды выглядит следующим образом: на нейтрон, летящий в направлении оси  $x$ , налетает ансамбль ядер с максвелловским распределением скоростей по величине и равновероятным распределением по направлениям. Наша задача – выразить усредненное сечение резонансного взаимодействия как функцию энергии нейтрона в лабораторной системе координат, если эта зависимость в системе центра масс известна и дает-

ся формулой Брейта – Вигнера. Обозначим плотность нейтронов в среде, имеющих скорость движения  $V$  как  $n(V)$ , тогда полное число взаимодействий этих нейтронов с ядрами резонансного поглотителя

$$\begin{aligned} n(V) \cdot V \cdot \rho_{\Pi} \cdot \bar{\sigma}(V) = \\ = n(V) \cdot V \cdot \rho_{\Pi} \iiint dv_x dv_y dv_z N(v_x, v_y, v_z) \cdot \sigma_r(V_{\text{отн}}), \end{aligned}$$

где  $V_{\text{отн}} = \sqrt{(V - v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2}$ .

Среднее число взаимодействий на один нейтрон и на одно ядро поглотителя

$$v \cdot \bar{\sigma}(v) = \iiint dv_x dv_y dv_z N(v_x, v_y, v_z) \cdot V_{\text{отн}} \cdot \sigma_r(V_{\text{отн}}).$$

Зависимость сечения резонансного взаимодействия от относительной скорости движения нейтронов в системе центра масс будет иметь вид:

$$\sigma_r(V_{\text{отн}}) = \frac{\sigma_{r0}}{1 + \left( \frac{(V - v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2 - E_0}{\Gamma/2} \right)^2}. \quad (4.2.25)$$

Выражение для энергии нейтрона в системе центра масс имеет вид:

$$\frac{(V - v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} = \frac{V^2}{2} - V \cdot v_x + \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}. \quad (4.2.26)$$

Принимая во внимание тот факт, что скорость ядер поглотителя существенно меньше скорости нейтрона, это выражение с точностью до членов первого порядка малости можно записать в виде

$$\frac{(V - v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \cong E - Vv_x. \quad (4.2.27)$$

Кроме того, в области энергий вблизи энергии резонанса имеем отношение

$$\frac{V_{\text{отн}}}{V} = \frac{\sqrt{(V - v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2}}{V} \cong 1 - \frac{v_x}{V} \approx 1.$$

Подставляя (4.2.27) в формулу Брейта – Вигнера (4.2.25) и интегрируя по всевозможным значениям проекций скоростей ядер, перпендикулярных к скорости нейтрона, получим:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(V) &= \left( \frac{A}{2\pi kT} \right)^{3/2} \sigma_{r0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x \frac{\exp\left( -\frac{A(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right)}{1 + \left( \frac{E - Vv_x - E_0}{\Gamma/2} \right)^2} = \\ &= \left( \frac{A}{2\pi kT} \right)^{1/2} \sigma_{r0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x \frac{\exp\left( -\frac{A(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right)}{1 + \left( \frac{E - Vv_x - E_0}{\Gamma/2} \right)^2}. \end{aligned}$$

Для дальнейшего нам потребуются следующие обозначения:

$$X = \frac{E - E_0}{\Gamma/2}, \quad Y = \frac{Vv_x}{\Gamma/2}, \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{E \cdot kT}{A}}, \quad \xi = \frac{\Gamma}{\Delta},$$

с помощью которых выражение для среднего сечения резонансного взаимодействия можно представить в виде

$$\bar{\sigma}_r(\xi, X) = \frac{\xi \cdot \sigma_{r0}}{2\sqrt{\pi}} \Psi(\xi, X),$$

$$\bar{\sigma}_{ar}(\xi, X) = \sigma_0 \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \Psi(\xi, X), \quad (4.2.28)$$

$$\Psi(\xi, X) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} e^{-\frac{\xi^2 \cdot (X-u)^2}{4}} du.$$

Отметим, что величины  $\xi$  и  $X$  выражаются через энергию нейтрона в лабораторной системе отсчета  $E$  и температуру среды  $T$  (рис. 4.4).

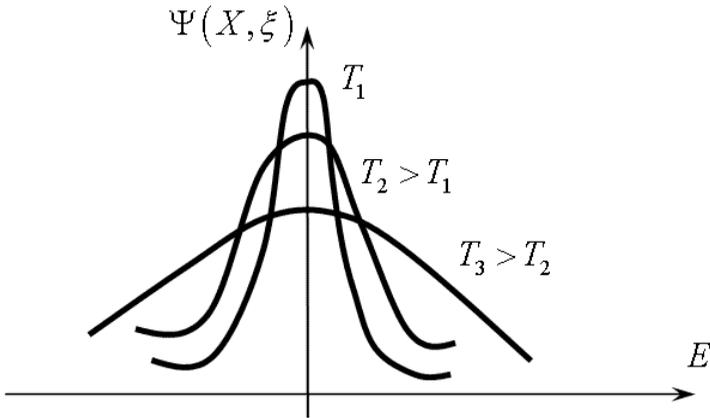


Рис. 4.4. Иллюстрация эффекта Доплера

Анализируя выражение для усредненного сечения резонансного взаимодействия, можно отметить следующие факты:

1.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma}(X) dX = \pi \cdot \sigma_{r0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(X) dX$ , то есть площадь под резонансной кривой, как в системе центра масс, так и в лабораторной системе координат, не изменяется, а следовательно, не изменяется и величина резонансного интеграла  $J_R$ . Отсюда следует, что доплеровский эффект не оказывает влияния на поглощение нейтронов

слабыми резонансами, то есть слабое резонансное поглощение не зависит от температуры среды.

$$2. \bar{\sigma}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \cdot \exp\left(\frac{\xi^2}{4}\right) \cdot \xi \cdot \sigma_{r0},$$

где  $\Phi(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X \exp(-t^2) dt$  – интеграл вероятности. При  $\xi \ll 1$

$$\bar{\sigma}(0) \cong \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \cdot \sigma_{r0} < \sigma_{r0}; \text{ а при } \xi \gg 1 \bar{\sigma}(0) \rightarrow \sigma(0).$$

С ростом температуры среды  $T$  величина  $\xi$  уменьшается, а вместе с ней уменьшается и резонансное сечение в центре резонансной линии. Поскольку площадь под резонансной линией сохраняется, это означает, что происходит уширение резонанса. Таким образом, обычный резонансный интеграл отвечает условию  $T = 0$ .

Как было отмечено ранее, в силу резонансного блок эффекта, величина резонансного интеграла определяется шириной области действия резонанса. Для эффективного резонансного интеграла уширение резонансной линии в лабораторной системе координат приводит к росту его значения. Поскольку средняя энергия теплового движения ядер резонансного поглотителя зависит от его температуры, причем растет с ростом температуры, то и уширение резонансной линии тем больше, чем выше температура нейтронов. Значит, с ростом температуры увеличивается эффективный резонансный интеграл, а это приводит к увеличению числа замедляющихся нейтронов, поглощенных в области резонанса. В общем случае имеет место следующее соотношение:

$$\frac{J_R}{\sqrt{1+\beta}} = J_{ef}(T=0) < J_{ef}(T) < \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} J_{ef}(T)} = J_R, \quad (4.2.29)$$

причем для сильных резонансов, для которых  $\beta \gg 1$ , эффективный резонансный интеграл  $J_{ef}(T)$  при изменении температуры среды меняется в более широких пределах, чем для слабых резонансов.

Наличие монотонно возрастающей температурной зависимости эффективного резонансного интеграла играет большую роль в обеспечении устойчивой и безопасной работы ядерных реакторов. Действительно, если по каким-либо причинам происходит неконтролируемое повышение мощности, выделяемой в активной зоне, то это вызывает повышение температуры топлива. Поскольку топливо является основным резонансным поглотителем, то эффективный резонансный интеграл будет возрастать, то есть резонансное поглощение нейтронов в активной зоне увеличится. Этот эффект можно трактовать как появление в активной зоне некоторого добавочного поглотителя нейтронов. Этот поглотитель должен уменьшить коэффициент размножения среды, из которой состоит активная зона реактора, причем в тем большей степени, чем сильнее нагреется топливо. Следовательно, сам реактор в силу физических законов, а не по желанию управляющего персонала, будет тормозить развитие аварийной ситуации и возвращать реактор в режим нормальной эксплуатации. Это так называемое свойство внутренней безопасности реактора.

С другой стороны, этот эффект позволяет автоматически поддерживать уровень мощности в реакторе неизменным. Действительно, пусть мощность реактора отклонилась от заданного уровня, например повысилась. Это приведет к росту температуры топлива, повышению эффективного резонансного интеграла и снижению величины вероятности избежать резонансного поглощения нейтронов  $\phi$ . В свою очередь снизится и величина  $K_{\infty}$  размножающей среды, из которой состоит активная зона реактора. Если реактор был критическим, то после уменьшения  $K_{\infty}$  он станет подкритическим и поток нейтронов и мощность, выделяемая активной зоной, начнут снижаться, возвращаясь к прежнему значению. Если же мощность понизилась, то топливо слегка охладится, то есть его температура уменьшится. При понижении температуры топлива резонансное поглощение нейтронов уменьшится, что эквивалентно повышению  $K_{\infty}$ . Это будет приводить к росту мощности реактора до тех пор, пока она не вернется на прежний уровень. Такой эффект саморегулирования реактора называется отрицательной обратной связью по температуре топлива.

### 4.3. Эффективное число вторичных нейтронов

По определению,  $\nu_{ef}$  есть среднее число нейтронов деления, появляющихся в результате захвата одного теплового нейтрона в топливе. Для топлива на основе обогащенного урана эта величина будет определяться выражением:

$$\nu_{ef} = \frac{\nu_f^5 \cdot \sigma_f^5 \cdot \rho_5}{\sigma_a^5 \cdot \rho_5 + \sigma_a^8 \cdot \rho_8} = \frac{\nu_f^5 \cdot \sigma_f^5 \cdot x}{\sigma_a^5 \cdot x + \sigma_a^8 \cdot (1-x)} = \frac{\eta_5}{1 + \frac{\sigma_a^8}{\sigma_a^5} \cdot \frac{1-x}{x}}, \quad (4.3.1)$$

где  $\eta_5 = \nu_{f5} \cdot \frac{\sigma_{f5}}{\sigma_{a5}} = \frac{\nu_{f5}}{1 + \alpha_5}$ ,  $\alpha_5 = \frac{\sigma_{e5}}{\sigma_{f5}}$ .

Эффективное число вторичных нейтронов зависит от обогащения топлива  $x$ . С повышением обогащения  $\nu_{ef}$  довольно сильно растет и в пределе достигает своего максимального значения, равного для  $^{235}\text{U}$   $\eta_5 \approx 2.42$  (рис. 4.5).

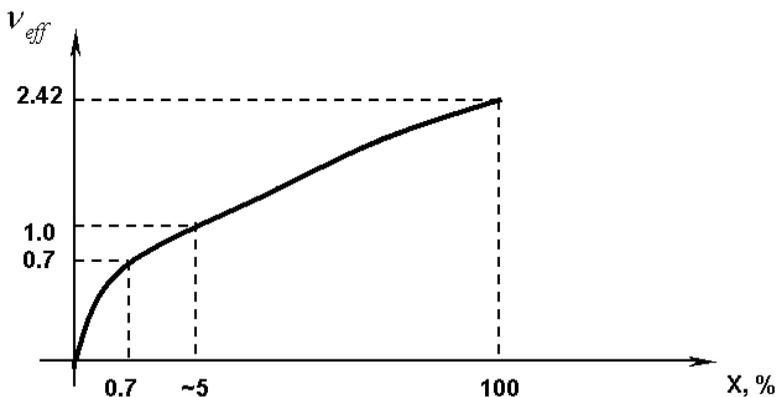


Рис. 4.5. Зависимость эффективного числа вторичных нейтронов от обогащения топлива по  $^{235}\text{U}$

В явном виде  $\nu_{ef}$  не зависит от разбавления размножающей среды  $C$ . Однако разбавление оказывает влияние на спектр тепло-

вых нейтронов, по которому производится усреднение микросечений, входящих в выражение (4.3.1). Если бы зависимость тепловых сечений  $^{235}\text{U}$  и  $^{238}\text{U}$  от энергии имели одинаковый вид, например  $\sigma(E) \approx \frac{1}{\sqrt{E}}$ , то  $v_{ef}$  не зависело бы от спектра тепловых нейтронов.

Но сечения делящихся нуклидов, как правило, имеют резонансы в тепловой области спектра, то есть энергетическая зависимость сечений отличается от закона  $\frac{1}{\sqrt{E}}$ . Поэтому, величина  $v_{ef}$  в слабой степени, но все же зависит от спектра тепловых нейтронов, который для максвелловского распределения определяется температурой нейтронного газа.

#### 4.4. Коэффициент использования тепловых нейтронов

По определению, коэффициент использования тепловых нейтронов для гомогенной среды есть вероятность поглощения теплового нейтрона в топливе:

$$\theta = \frac{\Sigma_a^{\text{топл}}}{\Sigma_a^{\text{топл}} + \Sigma_a^{\text{зам}}} = \frac{1}{1 + q} . \quad (4.4.1)$$

Величина  $q = \frac{\Sigma_a^{\text{зам}}}{\Sigma_a^{\text{топл}}}$  определяет относительный захват нейтронов в замедлителе. Поэтому чем выше поглощение в замедлителе, тем меньше величина  $\theta$ . Наибольшим сечением поглощения для замедлителей обладает водород, для которого  $\sigma_a^{\text{H}}(E_0 = 0.0253 \text{ эВ}) = 0.33 \text{ б}$ , что много больше, чем для графитового или тяжеловодного замедлителя. При одинаковых разбавлениях величина  $\theta$  для легководного замедлителя будет ниже, чем для графитового.

С ростом разбавления топлива  $\theta$  падает. Зависимость величины  $q$  от разбавления имеет следующий вид:

$$q = \frac{\sigma_a^{\text{зам}} \cdot \rho_{\text{зам}}}{(\sigma_a^5 \cdot x + \sigma_a^8 \cdot (1-x)) \cdot \rho_{\text{топл}}} = \frac{\sigma_a^{\text{зам}}}{\sigma_a^{\text{топл}}} C, \quad (4.4.2)$$

где  $\sigma_a^{\text{топл}} = \sigma_a^5 \cdot x + \sigma_a^8 \cdot (1-x)$  – микросечение поглощения топлива.

Сами микросечения, а именно  $\bar{\sigma}_a^{\text{зам}}$ ,  $\bar{\sigma}_a^5$  и  $\bar{\sigma}_a^8$ , получаютcя усреднением по спектру тепловых нейтронов. Если бы функциональная зависимость сечений от энергии для всех нуклидов была одинаковой, то отношение средних сечений не зависело бы от спектра тепловых нейтронов. Для большинства замедляющих и конструкционных материалов  $\sigma(E) \sim 1/V$ , то есть изменяется обратно пропорционально скорости нейтронов. Однако для делящихся нуклидов, имеющих резонансы в тепловой области, эта зависимость отличается от закона  $1/V$ , поэтому  $\theta$  зависит не только от разбавления, но и от температуры нейтронного газа, которая всегда выше, чем температура замедлителя.

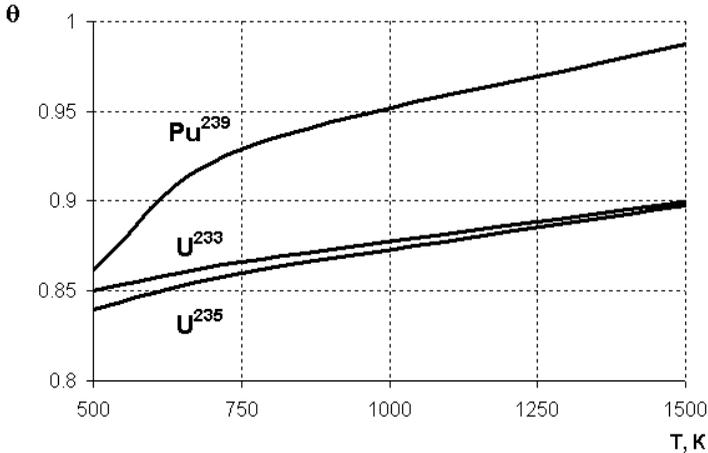


Рис. 4.6. Температурная зависимость  $\theta$  для гомогенной смеси графита с различными типами топлива на основе смеси делящихся нуклидов и изотопа  $^{238}\text{U}$

Наиболее сильно  $\theta$  зависит от температуры нейтронного газа для топлива, содержащего  $^{239}\text{Pu}$  или  $^{241}\text{Pu}$ , у которых имеется

сильный резонанс в сечении при энергии нейтронов  $E = 0.3$  эВ. Поэтому с повышением температуры среды растёт и температура нейтронного газа, а следовательно, и величина среднего сечения поглощения в топливной композиции, что, в свою очередь, вызывает уменьшение величины  $q$  и рост  $\theta$  (рис. 4.6). Следовательно,  $\theta$  будет расти с температурой среды. Это имеет очень важное, но неприятное значение для безопасности реакторов. В случае аварийного нарастания нейтронного потока температура размножающей среды растёт. Это, с одной стороны, приводит к увеличению резонансного поглощения и уменьшению  $\phi$ , а с другой стороны, будет возрастать  $\theta$ , что может привести к росту коэффициента размножения нейтронов. Кроме того, с ростом температуры размножающей среды плотность замедлителя падает, то есть разбавление  $C$  уменьшается, что приводит к росту  $\theta$  и  $K_\infty$  (так называемая положительная обратная связь).

## Глава 5 ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЭФФЕКТЫ В РАЗМНОЖАЮЩИХ СРЕДАХ

### *5.1. Условие критичности гомогенного реактора в одногрупповом диффузионном приближении*

Ранее рассматривались бесконечные однородные размножающие среды, в которых главную роль играет энергетическое распределение нейтронов. Теперь мы перейдем к изучению чисто пространственных эффектов в размножающих системах, для чего необходимо исключить из рассмотрения энергетическую и угловую переменную в распределении нейтронов.

Наиболее полное описание процессов взаимодействия нейтронов с веществом, определяющих их пространственное, энергетическое и угловое распределение, дается уравнением Больцмана. Для выяснения чисто пространственных эффектов необходимо выбрать ряд упрощающих предположений. Как правило, в однородных размножающих системах для описания углового распределения нейтронов используется процедура разложения потока нейтронов в ряд по сферическим гармоникам (для одномерного приближения это будут полиномы Лежандра), ограничиваясь двумя первыми членами разложения ( $P_1$ -приближение). В результате получаем два момента разложения: нулевой момент  $\Phi_0(\vec{r}, E) = \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ , называемый полным потоком, и первый момент  $\vec{I}(\vec{r}, E) = \int_{4\pi} \vec{\Omega} \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}$ , который называется векторным током нейтронов, так что имеет место соотношение

$$\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \cong \frac{1}{4\pi} \left( \Phi_0(\vec{r}, E) + 3\vec{\Omega} \cdot \vec{I}(\vec{r}, E) \right). \quad (5.1.1)$$

Если в размножающей среде нет сильных локальных поглотителей, то для областей активной зоны, удаленных от границы реактора с пустотой, существует связь векторного тока и полного потока в виде так называемого закона Фика:

$$\bar{I} = -D\nabla\Phi_0 \quad \text{где} \quad D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}, \quad \Sigma_{tr} = \Sigma_t - \mu\Sigma_s.$$

Ограничиваясь, кроме того, одnogрупповым приближением по энергетической переменной, получим диффузионное приближение для уравнения Больцмана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= -\text{div}\bar{I}(\vec{r}, t) - \Sigma_a \cdot \Phi_0(\vec{r}, t) + \nu_f \Sigma_f \cdot \Phi_0(\vec{r}, t), \\ \bar{I}(\vec{r}, t) &= -D\nabla\Phi_0(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Рассмотрим вначале стационарный случай  $\Phi_0(r, t) \equiv \Phi(r)$ , когда однородная размножающая среда ограниченных размеров допускает стационарное решение, то есть, воспроизводит каждое новое поколение нейтронов без умножения или снижения их численности. Для этого необходимо, чтобы поток нейтронов  $\Phi(r)$  удовлетворял уравнению:

$$D\Delta\Phi(\vec{r}) - \Sigma_a \cdot \Phi(\vec{r}) + \nu\Sigma_f \cdot \Phi(\vec{r}) = 0. \quad (5.1.3)$$

Уравнение (5.1.3) необходимо дополнить граничным условием на естественной границе реактора (активной зоны). Рассмотрим простейший случай так называемого «голового» реактора, когда размножающая среда граничит с вакуумом. Для этого случая введем в рассмотрение односторонние токи нейтронов через некоторую фиксированную площадку:

$$\begin{aligned} i^+(\vec{r}, E, \vec{n}) &= \int_{(\vec{n}\vec{\Omega}) > 0} (\vec{n}\vec{\Omega}) \cdot \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}, \\ i^-(\vec{r}, E, \vec{n}) &= \int_{(\vec{n}\vec{\Omega}) < 0} |(\vec{n}\vec{\Omega})| \cdot \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Для этих токов выполняется следующее соотношение:  
 $(\vec{n}\vec{I}) = i^+ - i^-.$

Точное граничное условие для выпуклой границы с пустотой имеет вид  $\Phi(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega}) = 0$  при  $(\vec{\Omega}\vec{n}) < 0$ . Это означает, что нейтроны из пустоты не влетают в реактор. В одностороннем диффузионном приближении точное граничное условие можно заменить приближенным соотношением  $i^-(\vec{r}_s) = 0$ . В теории переноса нейтронов показано, что выражение для односторонних токов имеет вид:

$$i^\pm = \frac{\Phi}{4} \pm \frac{1}{2}(\vec{n}\vec{I}), \quad \vec{I} = -D\nabla\Phi,$$

$$i^-(\vec{r}_s) = \frac{\Phi_0}{4} + \frac{1}{2}D\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}(\vec{r}_s) = 0, \quad 2D\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}(\vec{r}_s) = -\Phi(\vec{r}_s),$$

$$\frac{\partial\ln\Phi}{\partial n}(\vec{r}_s) = -\frac{1}{\gamma}, \quad \text{где } \gamma = 2D = \frac{2}{3}\lambda_{tr}.$$

Это граничное условие задается с помощью логарифмической производной от потока нейтронов. Разлагая решение вблизи границы с вакуумом в ряд до линейного члена, получим:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\vec{r}_s + x \cdot \vec{n}) &\cong \Phi_0(\vec{r}_s) + \frac{\partial\Phi_0}{\partial n}(\vec{r}_s) \cdot x = \\ &= \Phi_0(\vec{r}_s) - \frac{1}{2D}\Phi_0(\vec{r}_s) = \Phi_0(\vec{r}_s) \left(1 - \frac{x}{\gamma}\right). \end{aligned}$$

Если теперь экстраполировать распределение нейтронов за пределы среды в пустоту, то экстраполированный поток нейтронов обратится в нуль на расстоянии  $x = \gamma = \frac{2}{3}\lambda_{tr}$  от геометрической границы реактора. Величина  $\lambda_{extr} = \frac{2}{3}\lambda_{tr}$  называется экстраполированной добавкой среды (рис. 5.1).

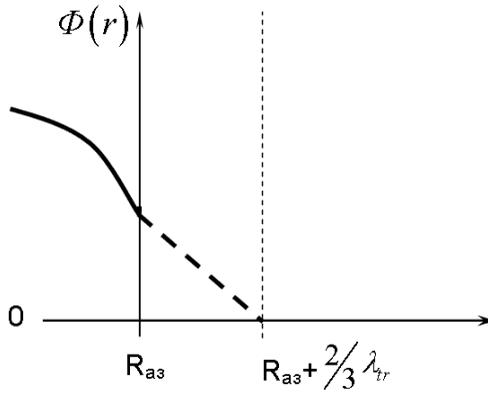


Рис. 5.1. Экстраполированная граница активной зоны реактора

Пользуясь этим понятием, можно поступить следующим образом: искусственно увеличить размеры размножающей среды, перенести ее границу на расстояние  $x_0$  от истинной границы (она называется экстраполированной границей среды) и поставить на ней однородное граничное условие  $\Phi(r_{extr}) = 0$ . Более точный анализ показывает, что величину экстраполированной добавки надо взять равной  $\lambda_{extr} = 0.71 \cdot \lambda_{tr}$ .

Итак, общая постановка задачи в одногрупповом приближении такова: требуется найти ограниченное положительное решение задачи:

$$\begin{aligned} D\Delta\Phi(\vec{r}) - \Sigma_a \cdot \Phi(\vec{r}) + v\Sigma_f \cdot \Phi(\vec{r}) &= 0, \\ \Phi(r_{extr}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Для однородной среды это уравнение можно упростить, вводя следующие обозначения:  $\chi^2 = \frac{K_\infty - 1}{L^2}$ ;  $K_\infty = \frac{v\Sigma_f}{\Sigma_a}$ ,  $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$ , при этом само уравнение диффузии примет наиболее простой вид:

$$\Delta\Phi + \chi^2\Phi = 0. \quad (5.1.6)$$

Величина  $\chi^2 = \frac{K_\infty - 1}{L^2}$  называется материальным параметром и яв-

ляется свойством размножающей среды, а  $L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}}$  – длиной диф-

фузии той же размножающей среды.

С математической точки зрения сформулированная выше задача (5.1.5) является задачей на определение собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа:

$$\Delta\Psi(\vec{r}) = -\alpha^2\Psi(\vec{r}), \quad \Psi(\vec{r}_{extr}) = 0. \quad (5.1.7)$$

Как правило, эта задача имеет счетное множество линейно независимых решений  $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_n, \dots$ , причем каждой собственной функции  $\Psi_n(\vec{r})$  соответствует собственное число  $\alpha_n^2$ , и для этих чисел имеет место следующее соотношение:  $\alpha_0^2 < \alpha_1^2 < \dots < \alpha_n^2$ .

Наименьшему собственному значению  $\alpha_0^2$  соответствует знакопостоянная собственная функция  $\Psi_0(\vec{r})$ , а все остальные собственные функции являются знакопеременными в области изменения координат внутри активной зоны. Следовательно, поставленная стационарная задача имеет решение только в том случае, когда выполнено соотношение:

$$\chi^2 = \alpha_0^2, \quad (5.1.8)$$

причем функция распределения потока нейтронов имеет вид  $\Phi(\vec{r}) = C \cdot \Psi_0(\vec{r})$ , где  $C$  – произвольное положительное число.

Наименьшее по абсолютной величине собственное число задачи называют геометрическим параметром, поскольку он зависит только от размеров и формы активной зоны, но не зависит от свойств мультиплицирующей среды. Равенство (5.1.8) является условием критичности реактора и означает, что для размножающей среды заданной геометрической формы существуют такие размеры, при

которых в этой среде возможен стационарный процесс деления ядер. Соответствующие размеры такой среды называются критическими размерами, а отвечающий этим размерам объем мультиплицирующей среды – критическим объемом. Масса делящегося вещества в такой среде называется критической массой.

Если нам заданы размножающие свойства среды, то условие критичности позволяет найти геометрические размеры активной зоны, состоящей из заданной размножающей среды. В другом случае, когда заданы форма и размеры активной зоны, из условия критичности можно определить, каким для этого должен быть коэффициент размножения среды  $K_\infty$ . Сам коэффициент размножения среды  $K_\infty$  можно изменить, выбирая нужные значения обогащения топлива  $x$  и разбавление среды замедлителем  $C$ .

Найдем критические размеры размножающей среды для различных геометрических форм активной зоны, граничащей с вакуумом.

### ***5.2. Распределение плотности потока нейтронов в реакторах различных геометрий***

Рассмотрим теперь частные случаи решения задачи (5.1.5) для реакторов с типичной геометрической конфигурацией активной зоны. К таким типам геометрии относятся сферическая, цилиндрическая и прямоугольная.

**Сферический реактор.** В сферически симметричном случае (рис. 5.2) лапласиан имеет вид:  $\Delta\Psi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\Psi}{dr}$  и геометрический параметр определяется из решения волнового уравнения:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\Psi}{dr} + \alpha^2 \Psi = 0, \tag{5.2.1}$$

$$\Psi(r_{extr}) = 0.$$

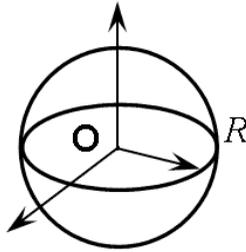


Рис. 5.2. Реактор в сферической геометрии

С помощью стандартной замены переменных  $\Psi(\vec{r}) = \frac{f(\vec{r})}{r}$  исходное уравнение преобразуется относительно функции  $f(\vec{r})$  к простейшему виду:  $\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \alpha^2 f(r) = 0$ . Общее решение этого уравнения:

$$f(r) = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot r) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot r),$$

$$\Psi(r) = C_1 \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot r)}{r} + C_2 \cdot \frac{\cos(\alpha \cdot r)}{r}.$$

Поскольку  $\Psi(r)$  – ограниченная функция, то  $C_2 = 0$ , и общее решение можно записать в виде:  $\Psi(r) = C \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot r)}{r}$ . Воспользуемся граничным условием  $\Psi(r_{extr} = R) = 0$ , где  $R$  – радиус шара:

$$\sin(\alpha \cdot R) = 0; \quad \alpha_n \cdot R = \pi \cdot (n+1), \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{R} \cdot (n+1), \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{R}.$$

Таким образом, для сферической однородной размножающей среды критическое условие можно записать в виде:

$$\frac{K_{\infty} - 1}{L^2} = \left( \frac{\pi}{R} \right)^2, \quad (5.2.2)$$

из которого следует, что реактор может находиться в стационарном состоянии только при строго определенном значении  $R$ :

$$R = \frac{\pi}{\chi}, \quad R = \frac{\pi}{\sqrt{(K_{\infty} - 1)}} \cdot L. \quad (5.2.3)$$

Критический радиус для сферической активной зоны  $R_0 = R - \lambda_{extr}$ . Общее решение для потока нейтронов имеет произвольную константу  $C$ , которая характеризует уровень потока нейтронов в реакторе. В свою очередь, уровень потока нейтронов определяет мощность, выделяемую в объеме активной зоны:

$$W = E_f \int_0^{R_0} \Sigma_f \cdot \Phi(r) \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \cdot C \cdot E_f \cdot \Sigma_f \int_0^{R_0} \sin(\alpha_0 \cdot r) r^2 dr. \quad (5.2.4)$$

Произвольность константы отражает тот факт, что критический реактор может иметь произвольную мощность.

Пространственное распределение потока нейтронов (рис. 5.3) характеризуется спадом потока нейтронов к границе реактора, поскольку через границу реактора происходит утечка нейтронов в вакуум.

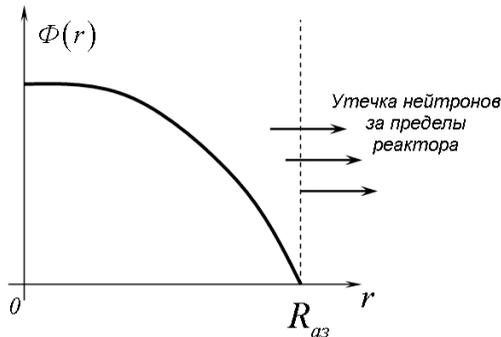


Рис. 5.3. Пространственное распределение потока нейтронов в сферическом реакторе

**Реактор цилиндрической формы.** Рассмотрим теперь цилиндрическую активную зону радиуса  $R$  и высоты  $H$  (рис. 5.4). Учитывая вид лапласиана в цилиндрической геометрии, получим следующее уравнение на собственные значения:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \alpha^2 \Psi = 0, \quad \Psi = \Psi(r, z), \quad (5.2.5)$$

$$\Psi(R, z) = 0 \quad \forall z, \quad \Psi(r, \pm \frac{H}{2}) = 0 \quad \forall r, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r}(0, z) = 0 \quad \forall z.$$

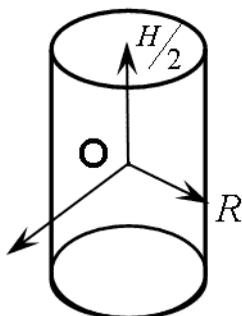


Рис. 5.4. Реактор в цилиндрической геометрии

Решение уравнения (5.2.5) в частных производных будем искать методом разделения переменных, представив решение в виде  $\Psi(r, z) = Y(r) \cdot Z(z)$ . После подстановки решения в разделенных переменных в исходное уравнение

$$\frac{1}{Y} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dY}{dr} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\alpha^2.$$

Представляя геометрический параметр в виде суммы двух чисел  $\alpha^2 = \alpha_r^2 + \alpha_z^2$ , исходное уравнение можно представить в виде системы двух обычных дифференциальных уравнений с соответствующими краевыми условиями:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dY}{dr} + \alpha_r^2 \cdot Y = 0, \quad \frac{dY}{dr}(0) = 0, \quad Y(R) = 0,$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \alpha_z^2 \cdot Z = 0, \quad \frac{dZ}{dz}(0) = 0, \quad Z\left(\pm \frac{H}{2}\right) = 0.$$

Общее решение первого уравнения системы:

$$Y(r) = C_1 J_0(\alpha_r \cdot r) + C_2 \cdot N_0(\alpha_r \cdot r),$$

где  $J_0(x)$  – функция Бесселя нулевого индекса,  $N_0(x)$  – функция Неймана нулевого индекса, которая имеет логарифмическую особенность при  $x \rightarrow 0$ . Для выполнения условия ограниченности потока нейтронов необходимо положить  $C_2 = 0$ , так что решение этой задачи будет представлено в виде  $Y(r) = C_1 \cdot J_0(\alpha_r \cdot r)$ . Для второго уравнения общее решение имеет вид:

$$Z(z) = D_1 \cdot \sin(\alpha_z \cdot z) + D_2 \cdot \cos(\alpha_z \cdot z).$$

Помещая начало координат в центр активной зоны, мы будем рассматривать симметричное по аксиальной переменной решение этой задачи. Это решение отвечает условию  $D_1 = 0$ ;  $Z(z) = D_2 \cos(\alpha_z \cdot z)$ . Соответствующие собственные числа и собственные функции задачи находим из выполнения краевых условий, при этом размеры цилиндра выбраны с учетом экстраполированной добавки:

$$J_0(\alpha_r \cdot R) = 0, \quad \rightarrow \alpha_r \cdot R = \xi_n, \quad \rightarrow \alpha_r^{(n)} = \frac{\xi_n}{R},$$

$$\cos\left(\alpha_z \cdot \frac{H}{2}\right) = 0, \quad \rightarrow \alpha_z \cdot \frac{H}{2} = \frac{\pi}{2}(n+1), \quad \rightarrow \alpha_z^{(n)} = \frac{\pi}{H}(n+1).$$

где  $\xi_n$  – корни функции Бесселя нулевого порядка.

Отбрасывая все знакопеременные гармоники, получим геометрический параметр для цилиндрической активной зоны и распределение плотности потока нейтронов в реакторе:

$$\alpha_r^{(0)} = \frac{\xi_0}{R}, \quad \alpha_z^{(0)} = \frac{\pi}{H}, \quad \alpha_0^2 = \left(\frac{\xi_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2, \quad (5.2.6)$$

$$\Psi(r, z) = C \cdot J_0\left(\frac{\xi_0}{R} \cdot r\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{H} \cdot z\right), \quad \xi_0 \approx 2.405.$$

Условие критичности будет иметь вид:

$$\left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 = \frac{K_\infty - 1}{L^2}. \quad (5.2.7)$$

Заметим, если радиус цилиндра таков, что выполняется условие  $\alpha_r^2 = \chi^2$ ,  $R = \frac{\xi_0}{\chi}$ , то критичность реактора достигается при бесконечной высоте  $H \rightarrow \infty$ . В этом случае получаем решение для бесконечного цилиндра в виде  $\Phi(r) = C \cdot J_0\left(\frac{\xi_0}{R} r\right)$ . Для тех цилинд-

ров, радиус которых  $R < \frac{\xi_0}{\chi}$ , критичность не достигается ни при

каком значении высоты цилиндра  $H$ . Это один из примеров некритического объема, который обладает тем свойством, что при любом количестве размножающего материала в форме цилиндра с данным радиусом, этот объем размножающего материала заведомо будет подкритичен. Этот объем может быть использован для безопасного хранения размножающего материала с данным материальным параметром. Аналогично, если высоту цилиндра взять из условия  $\frac{\pi}{H} = \chi$ , то критичность такого реактора достигается только при бесконечно большом радиусе цилиндра и получаем решение задачи на критичность для бесконечной пластины толщиной  $H$ :

$$H = \frac{\pi}{\sqrt{K_{\infty} - 1}} \cdot L, \quad \Phi(z) = C \cdot \cos\left(\frac{\pi}{H} \cdot z\right). \quad (5.2.8)$$

Таким образом, критический размер пластины равен критическому размеру шара, однако для шара критический объем конечен, а для пластины – бесконечен.

**Реактор в форме прямоугольного параллелепипеда.** Рассмотрим активную зону в форме прямоугольного бруса с длинами сторон соответственно  $a$ ,  $b$  и  $c$  (рис. 5.5). Для трехмерной прямоугольной геометрии уравнение для потока нейтронов и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \alpha^2 \cdot \Phi = 0, \quad (5.2.9)$$

$$\Phi\left(\pm \frac{a}{2}, y, z\right) = \Phi\left(x, \pm \frac{b}{2}, z\right) = \Phi\left(x, y, \pm \frac{c}{2}\right) = 0.$$

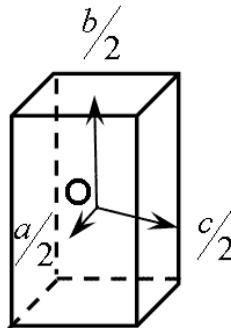


Рис. 5.5. Реактор в прямоугольной геометрии

Применяя к задаче (5.2.9) метод разделения переменных в виде

$$\Phi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z),$$

$$\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2.$$

Поместим начало координат в центр бруса и преобразуем исходное уравнение в систему трех обычных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha_x^2 \cdot X = 0, \quad X\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha_y^2 \cdot Y = 0, \quad Y\left(\pm \frac{b}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \alpha_z^2 \cdot Z = 0, \quad Z\left(\pm \frac{c}{2}\right) = 0.$$

Решение каждого из этих уравнений аналогично решению для одномерной пластины. С учетом граничных условий общее решение для призматического реактора запишем в виде:

$$\Phi(x, y, z) = C \cdot \cos(\alpha_x \cdot x) \cdot \cos(\alpha_y \cdot y) \cdot \cos(\alpha_z \cdot z), \quad (5.2.10)$$

где  $\alpha_x = \frac{\pi}{a}$ ,  $\alpha_y = \frac{\pi}{b}$ ,  $\alpha_z = \frac{\pi}{c}$ .

Критическое условие принимает вид:

$$\chi^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2. \quad (5.2.11)$$

**Минимальная критическая масса.** Сравним между собой минимальные критические размеры реакторов различных геометрических форм для одной и той же размножающей среды, характеризующейся материальным параметром  $\chi^2$ . Для цилиндрического и призматического «голового» реакторов получены следующие условия критичности:

$$\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{\xi_0}{R}\right)^2 = \chi^2,$$

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2 = \chi^2.$$

Если размеры активной зоны удовлетворяют условию критичности, то для заданной размножающей среды критический объем будет равен

$$V_{\text{кр}} = \pi \cdot R^2 H \quad \text{— для цилиндрической активной зоны,}$$

$$V_{\text{кр}} = a \cdot b \cdot c \quad \text{— для призматической активной зоны.}$$

Следовательно, при заданных свойствах размножающей среды можно получить бесконечное множество критических активных зон, как в цилиндрической геометрии, так и в плоской. Возникает вопрос, при каких соотношениях между размерами реактора получается минимальный критический объем?

Для призматической активной зоны ответ легко получить из общих соображений – ни одно измерение не является выделенным, поэтому оптимальное соотношение удовлетворяет условию  $a = b = c$ . Из условия критичности можно определить размер стороны куба, обладающего минимальной критической массой:

$$\chi^2 = 3 \cdot \left(\frac{\pi}{a}\right)^2, \quad a = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{\chi}, \quad V_{\text{кр}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \pi^3}{\chi^3}. \quad (5.2.12)$$

Для сферической активной зоны, имеющей только одно измерение, минимальный критический объем

$$V_{\text{кр}} = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad R = \frac{\pi}{\chi}, \quad V_{\text{кр}} = \frac{4\pi^4}{3\chi^3}, \quad \frac{V_{\text{кр}}^{\text{(призм)}}}{V_{\text{кр}}^{\text{(сфер)}}} = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} = 1.24. \quad (5.2.13)$$

Для цилиндрической активной зоны симметрия измерений отсутствует, то есть симметрии между высотой и радиусом не существует. В этом случае для получения ответа необходимо решить задачу на условный экстремум, а именно: найти минимум функции

двух переменных  $V = \pi R^2 H$  с учетом условия связи между переменными  $\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{\xi_0}{R}\right)^2 = \chi^2$ . Чтобы решить эту задачу, выразим, используя ограничение, одну из переменных через другую и подставим это соотношение в выражение для объема цилиндра. Объем цилиндра при такой операции будет функцией только одной переменной:

$$R^2 = \frac{\xi_0^2 \cdot H^2}{\chi^2 \cdot H^2 - \pi^2}, \quad V = \frac{\pi \cdot \xi_0^2 \cdot H^3}{\chi^2 \cdot H^2 - \pi^2}.$$

Условие экстремальности критического объема

$$\frac{dV}{dH} = \pi \cdot \xi_0^2 \left[ \frac{3H^2 \cdot (\chi^2 H^2 - \pi^2) - 2\chi^2 H^4}{(\chi^2 H^2 - \pi^2)^2} \right] = 0,$$

из которого находим радиус и высоту оптимального цилиндра:

$$H = \frac{\sqrt{3}\pi}{\chi}, \quad R = \frac{2\xi_0}{\sqrt{3}\chi}, \quad V_{\text{кр}}^{(\text{цил})} = \frac{3\sqrt{3}\pi^2\xi_0^2}{\chi^3}, \quad \frac{V_{\text{кр}}^{(\text{цил})}}{V_{\text{кр}}^{(\text{сфер})}} = \frac{9\sqrt{3}\xi_0^2}{4\pi^2} = 1.14.$$

Итак, окончательно имеем следующее соотношение между оптимальными критическими объемами для различных геометрий:

$$V_{\text{кр}}^{(\text{призм})} : V_{\text{кр}}^{(\text{цил})} : V_{\text{кр}}^{(\text{сф})} = 1.24 : 1.14 : 1.00. \quad (5.2.14)$$

**Влияние плотности размножающей среды на критический объем.** Для простоты рассмотрим сферу конечного радиуса. Если известен критический радиус, то критический объем сферы  $V_{\text{кр}} = \frac{4}{3}\pi R_{\text{кр}}^3$ , где  $R_{\text{кр}} = \frac{\pi}{\sqrt{(K_\infty - 1)}}L$ . Тогда критическая масса будет

равна  $M_{\text{кр}} = \gamma_{\text{топл}} \cdot V_{\text{кр}}$ , где  $\gamma_{\text{топл}}$  – плотность топлива в размножающей среде. Предположим, что плотность размножающей среды изменилась, а разбавление среды  $C = \rho_{\text{зам}}/\rho_{\text{топл}}$  осталось неизмен-

ным. Коэффициент размножения среды  $K_\infty$  не изменится, поскольку эта величина есть отношение усредненных макросечений:

$$K_\infty = \frac{v\bar{\Sigma}_f}{\bar{\Sigma}_a} = \frac{v\bar{\sigma}_f \cdot \rho_{\text{топл}}}{\bar{\sigma}_a^{(\text{топл})} \cdot \rho_{\text{топл}} + \bar{\sigma}_a^{(\text{зам})} \cdot C \cdot \rho_{\text{топл}}} = \frac{v\bar{\sigma}_f}{\bar{\sigma}_a^{(\text{топл})} + \bar{\sigma}_a^{(\text{зам})} \cdot C}.$$

Заметим, что мы пренебрегаем изменением спектра нейтронов в среде при изменении плотности. Изменится и величина длины диффузии. Из выражения для длины диффузии

$$L = \sqrt{\frac{D}{\bar{\Sigma}_a}} = \sqrt{\frac{1}{3\bar{\Sigma}_{tr} \cdot \bar{\Sigma}_a}} = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{1}{3 \cdot \bar{\sigma}_{tr} \cdot \bar{\sigma}_a}}.$$

следует, что  $L \sim 1/\rho$ , где  $\rho$  – ядерная плотность размножающей среды. Но тогда и  $R_{\text{кр}} \sim 1/\rho$ , а  $V_{\text{кр}} \sim 1/\rho^3$ . Учитывая, что  $\rho \sim \gamma$ , получим  $M_{\text{кр}} \sim 1/\gamma^2$ . Так, например, если плотность ядерного материала увеличить в два раза, то критическая масса уменьшится в четыре раза, то есть для создания критичности потребуется в четыре раза меньше топлива. Именно на этом принципе построены ядерные заряды малого размера, так называемого «имплозивного» типа.

### ***5.3. Нестационарное уравнение диффузии нейтронов, эффективный коэффициент размножения***

Как было показано ранее, условие стационарности цепной реакции деления в реакторе выражается через равенство геометрического и материального параметра размножающей среды  $\alpha_0^2 = \chi^2$ . Предположим, что это условие каким-либо образом нарушено, например введением в активную зону поглотителя нейтронов равномерно по всему объему. В этом случае в активной зоне начнется нестационарный процесс, для описания которого воспользуемся нестационарным уравнением диффузии в одностороннем приближении:

$$D\Delta\Phi(\vec{r},t) - \Sigma_a \cdot \Phi(\vec{r},t) + K_\infty \cdot \Sigma_a \cdot \Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{V} \frac{\partial\Phi(\vec{r},t)}{\partial t}. \quad (5.3.1)$$

Краевые условия для нестационарной задачи те же самые, что и для стационарной, то есть поток нейтронов равен нулю на экстраполированной границе активной зоны  $\Phi(R_{extr},t) = 0$ . Предполагается, что все нейтроны деления являются мгновенными, без учета запаздывающих нейтронов.

Для однозначности решения требуется задать начальные условия задачи. Предположим, что при  $t < 0$  реактор находился в стационарном состоянии, а в момент времени  $t = 0$  скачкообразно изменился материальный параметр размножающей среды. Поэтому в качестве начального условия принимается распределение потока нейтронов в стационарном состоянии:

$$\Phi(\vec{r},t=0) = \Phi_0(r). \quad (5.3.2)$$

Вводя материальный параметр среды  $\chi^2 = \frac{K_\infty - 1}{L^2}$ , уравнение (5.3.1) запишем в виде

$$\Delta\Phi(r,t) + \chi^2 \cdot \Phi(r,t) = \frac{1}{D \cdot V} \frac{\partial\Phi(r,t)}{\partial t}.$$

Будем решать это уравнение методом разложения по собственным функциям оператора Лапласа  $\Phi(\vec{r},t) = \sum_{n=0} T_n(t) \cdot \Psi_n(\vec{r})$ , где  $\Psi_n(t)$  – собственные функции оператора Лапласа, удовлетворяющие условию

$$\begin{aligned} \Delta\Psi_n(\vec{r}) + \alpha_n^2 \cdot \Psi_n(\vec{r}) &= 0, \\ \Psi_n(\vec{r} = \vec{R}_{extr}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Подставим разложение в уравнение (5.3.1) и, учитывая, что  $\Delta\Psi_n(\vec{r}) = -\alpha_n^2 \cdot \Psi_n(\vec{r})$ , получим

$$\sum_{n=0} T_n(t) \cdot (\chi^2 - \alpha_n^2) \cdot \Psi_n(\vec{r}) = \sum_{n=0} \frac{1}{D \cdot \nu} \frac{dT_n(t)}{dt} \cdot \Psi_n(\vec{r}).$$

Используя условие ортогональности собственных функций оператора Лапласа можно получить уравнение для определения временных составляющих  $T_n(t)$ :

$$\frac{1}{D \cdot \nu} \frac{dT_n(t)}{dt} = (\chi^2 - \alpha_n^2) \cdot T_n(t). \quad (5.3.4)$$

Решение этих уравнений имеет вид:

$$T_n(t) = T_n(0) \cdot e^{\omega_n \cdot t} \quad \omega_n = D \cdot \nu \cdot (\chi^2 - \alpha_n^2).$$

Используя это решение, запишем общее решение нестационарного уравнения:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \sum_{n=0} T_n(0) \cdot e^{\omega_n \cdot t} \cdot \Psi_n(\vec{r}). \quad (5.3.5)$$

Для определения величин  $T_n(0)$  примем во внимание начальное условие:  $\Phi(\vec{r}, 0) = \sum_{n=0} T_n(0) \cdot \Psi_n(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r})$ . Разложим начальное ус-

ловие в ряд по собственным функциям оператора Лапласа  $\Phi_0(\vec{r}) = \sum_{n=0} \langle \Phi_0 \cdot \Psi_n \rangle \cdot \Psi_n(\vec{r})$ , где коэффициенты разложения есть

скалярное произведение функций  $\langle \Phi_0 \cdot \Psi_n \rangle = \int_V \Phi_0(\vec{r}) \cdot \Psi_n(\vec{r}) dV$ .

Получим, что  $T_n(0) = \langle \Phi_0 \cdot \Psi_n \rangle$ .

Таким образом, общее решение нестационарного уравнения диффузии в одногрупповом приближении при заданных краевых и начальных условиях

$$\Phi(\vec{r}, t) = \sum_{n=0} \langle \Phi_0 \cdot \Psi_n \rangle \cdot e^{\omega_n \cdot t} \cdot \Psi_n(\vec{r}). \quad (5.3.6)$$

является суперпозицией частных решений вида  $\langle \Phi_0 \cdot \Psi_n \rangle \cdot e^{\omega_n t} \cdot \Psi_n(\vec{r})$ . Выделим из общего решения первый член

$$\Phi(\vec{r}, t) = \langle \Phi_0 \cdot \Psi_0 \rangle \cdot e^{\omega_0 t} \left[ \Psi_0(\vec{r}) + \sum_{n=1} \langle \Phi_0 \cdot \Psi_n \rangle e^{(\omega_n - \omega_0)t} \right]. \quad (5.3.7)$$

Поскольку собственные числа оператора Лапласа расположены в порядке возрастания  $\alpha_0^2 < \alpha_1^2, \dots < \alpha_n^2 < \dots$  и  $\alpha_n^2 \rightarrow \infty$ , то все экспоненциальные решения в квадратных скобках выражения (5.3.7) будут затухающими, так как  $\omega_n - \omega_0 = -D \cdot \nu \cdot (\alpha_n^2 - \alpha_0^2) < 0$ .

Таким образом, нестационарный процесс в некритической среде будет происходить в два этапа. На первом этапе происходит изменение пространственного распределения нейтронов в реакторе, причем в разложении (5.3.7) необходимо учитывать большое число членов. Однако, с течением времени все гармоники, кроме первой, затухнут и выделится асимптотическое решение вида:

$$\Phi_{as}(\vec{r}, t) = \langle \Phi_0 \cdot \Psi_0 \rangle \cdot \Psi_0(\vec{r}) \cdot e^{t/T_{as}}. \quad (5.3.8)$$

Пространственное распределение для асимптотического решения в (5.3.8) будет соответствовать главной собственной функции  $\Psi_0(\vec{r})$ , а период временного изменения амплитуды потока нейтронов  $T_{as}$  равен  $T_{as} = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{D \cdot \nu \cdot (\chi^2 - \alpha_0^2)}$ .

Время установления нового распределения нейтронного поля, называемого периодом релаксации  $T_p$ , можно оценить, рассматривая период затухания второй гармоники (в нашем обозначении она имеет номер  $n = 1$ ), а именно  $T_p = \frac{1}{|\omega_1 - \omega_0|} = \frac{1}{D \cdot \nu \cdot (\alpha_1^2 - \alpha_0^2)}$ .

Таким образом, если  $\omega_0 > 0$ , то в реакторе будет происходить экспоненциальный рост нейтронного потока, а сам реактор считается надкритическим ( $\chi^2 > \alpha_0^2$ ), если  $\omega_0 < 0$  – экспоненциальный

спад нейтронного потока, а реактор считается подкритическим ( $\chi^2 < \alpha_0^2$ ). В том случае, когда  $\omega_0 = 0$  после периода релаксации нейтронный поток в реакторе не будет меняться со временем. Тогда этот реактор называется критическим ( $\chi^2 = \alpha_0^2$ ).

Итак, для надкритического реактора поток нейтронов возрастает экспоненциально, что может привести к катастрофическим последствиям. Для управления реактором необходимо уметь оценивать степень некритичности реактора. В качестве такой меры могут выступать: показатель экспоненты  $\omega_0$ , разница величин материального и геометрического параметра ( $\chi^2 - \alpha_0^2$ ), период разгона реактора  $T_{as}$ . Если период разгона мал, то степень некритичности реактора достаточно большая, и, наоборот, при большом периоде разгона степень некритичности мала. При большом периоде увеличения потока нейтронов можно успеть остановить рост мощности введением системы аварийной защиты в активную зону реактора.

За меру некритичности бесконечной среды принимают отличие  $K_\infty$  от единицы. Для ограниченных размножающих сред также можно ввести понятие коэффициента размножения, так называемый эффективный коэффициент размножения  $K_{эф}$ . Пусть имеется некритический реактор. Некритичность связана с тем, что нарушен баланс между числом нейтронов в предыдущем и последующих поколениях нейтронов, то есть новых нейтронов рождается либо меньше, либо больше, чем тех, которые были поглощены ядрами размножающей среды и покинули пределы активной зоны.

С формальной точки зрения эффективным коэффициентом размножения называется такое число, на которое надо разделить источник нейтронов деления, чтобы реактор стал критическим, то есть искусственно уравнивать число рожденных в единицу времени нейтронов в активной зоне и число поглощенных нейтронов с учетом утечки их за пределы активной зоны. Тогда имеем

$$D\Delta\Phi - \Sigma_a \cdot \Phi + \frac{\nu_f \Sigma_f \cdot \Phi}{K_{эф}} = 0. \quad (5.3.9)$$

Производя обычные преобразования, приведем уравнение (5.3.9) к виду:

$$D\Delta\Phi + \left( \frac{K_\infty}{K_{\text{эф}}} - 1 \right) \cdot \Sigma_a \cdot \Phi = 0. \quad (5.3.10)$$

Уравнение (5.3.10) называется уравнением условно-критического реактора. Если первоначально реактор был критическим, то  $K_{\text{эф}} = 1$ . Следовательно, эта величина подобна коэффициенту размножения бесконечной среды. Условие критичности реактора позволяет выразить эффективный коэффициент размножения через нейтронно-физические характеристики размножающей среды и геометрический параметр активной зоны, а именно:

$$\chi^2 = \frac{K_\infty / K_{\text{эф}} - 1}{L^2} = \alpha_0^2, \quad (5.3.11)$$

$$K_{\text{эф}} = \frac{K_\infty}{1 + \alpha_0^2 \cdot L^2}.$$

Таким образом, эффективный коэффициент размножения учитывает не только размножающие свойства среды, но и форму, и размеры активной зоны реактора. Для бесконечного реактора  $\alpha_0^2 = 0$ ,  $K_{\text{эф}} = K_\infty$ , то есть для бесконечной среды обе величины совпадают. Для выяснения физического смысла множителя  $1/(1 + \alpha_0^2 \cdot L^2)$  проинтегрируем уравнение условно-критического реактора по объему активной зоны. В результате получим следующее соотношение:

$$-I - N_a + \frac{K_\infty}{K_{\text{эф}}} N_a = 0, \quad (5.3.12)$$

где  $I$  – утечка нейтронов из реактора, равная числу нейтронов, покидающих активную зону реактора в единицу времени:

$$\int_{V_{\text{аз}}} D \Delta \Phi dV = \int_{V_{\text{аз}}} \nabla D \nabla \Phi dV = - \oint_{S_{\text{аз}}} \vec{J} d\vec{S} = -I,$$

$N_a = \int_{V_{\text{аз}}} \Sigma_a \Phi(\vec{r}) dV$  – скорость поглощения, равная числу нейтронов, поглощенных в активной зоне в единицу времени,  $K_\infty \cdot N_a = N_f$  – скорость генерации нейтронов деления, то есть число нейтронов, рождающихся в результате реакции деления в активной зоне в единицу времени. Таким образом, равенство (5.3.12) описывает баланс скоростей процессов в активной зоне конечных размеров, то есть скорость рождения новых нейтронов равна скорости поглощения и скорости утечки нейтронов из активной зоны. Из этого баланса выразим эффективный коэффициент размножения:

$$K_{\text{эф}} = \frac{N_f}{N_a + I} = \frac{N_f}{N_a} \cdot \frac{N_a}{N_a + I} = K_\infty \cdot P_a,$$

где  $\frac{N_f}{N_a} = K_\infty$ , а  $\frac{N_a}{N_a + I} = P_a$  – вероятность нейтрону, рожденному в активной зоне, поглотится в ней. Сравнивая это выражение для эффективного коэффициента размножения с выражением (5.3.11), получим:  $P_a = \frac{1}{1 + \alpha_0^2 \cdot L^2}$ .

Из соотношения (5.3.12) следует, что в активной зоне условно-критического реактора, в котором  $K_{\text{эф}} = 1$ , скорость рождения нейтронов равна скорости поглощения и утечки нейтронов. В этом случае

$$K_{\text{эф}} = \frac{K_\infty}{1 + \alpha_0^2 \cdot L^2} = 1 \rightarrow \alpha_0^2 = \frac{K_\infty - 1}{L^2} = \chi^2 \rightarrow \omega_0 = D \cdot \nu (\chi^2 - \alpha_0^2) = 0.$$

В общем случае  $K_{\text{эф}} \neq 1$  и тогда

$$\omega_0 = D \cdot v \cdot (\chi^2 - \alpha_0^2) = D \cdot v \cdot \left( \frac{K_\infty - 1}{L^2} - \frac{K_\infty / K_{эф} - 1}{L^2} \right) = \frac{K_\infty \cdot \rho}{T_a},$$

где величина  $\rho = \frac{K_{эф} - 1.0}{K_{эф}}$  называется реактивностью реактора, а

$$T_a = \frac{1}{v \cdot \Sigma_a} = \frac{\lambda_a}{v} - \text{средним временем жизни нейтрона в активной}$$

зоне. Величина реактивности  $\rho$  также выступает в качестве меры некритичности реактора. Процесс управления цепной реакцией деления можно рассматривать как воздействие на  $K_{эф}$  или на реактивность.

#### 5.4. Условие критичности реактора с отражателем

Ранее было рассмотрено условие критичности для так называемого «голого» реактора, в котором все нейтроны, вылетающие из реактора через границу, теряются безвозвратно. Очевидно, что если на границе с активной зоной поставить некоторую рассеивающую среду, то часть нейтронов, пересекающих границу активной зоны, может вернуться в нее, испытав одно или несколько рассеивающих столкновений в этой среде. Эту среду обычно называют отражателем. Оценим, как изменится условие критичности и сам критический размер при наличии отражателя. Для простоты ограничимся рассмотрением задачи в одномерной плоской геометрии.

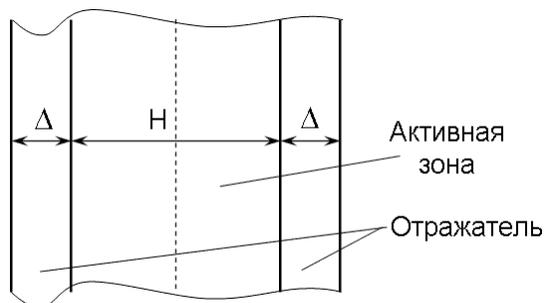


Рис. 5.6. Реактор с отражателем в плоской геометрии

Имеется размножающая среда в виде бесконечной пластины толщиной  $H$ , которая окружена с двух сторон отражателями (рис. 5.6). Обычно считается, что отражатель – чисто рассеивающая среда без размножения нейтронов. Обозначим толщину отражателя  $\Delta$ . Как в активной зоне, так и в отражателе будем рассматривать одноклассовое диффузионное приближение (однородные среды). Поток нейтронов в этом приближении описывается уравнениями:

$$D_1 \cdot \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} - \Sigma_a^{(1)} \cdot \Phi_1 + \nu \Sigma_f^{(1)} \cdot \Phi_1 = 0; \quad 0 < x < \frac{H}{2}; \quad \text{а. з.} \\ D_2 \cdot \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} - \Sigma_a^{(2)} \cdot \Phi_2 = 0; \quad \frac{H}{2} < x < \frac{H}{2} + \Delta; \quad \text{отр.} \quad (5.4.1)$$

Граничные условия:  $\frac{d\Phi_1}{dx} = 0$ ;  $\Phi_2 \left( \frac{H}{2} + \Delta \right) = 0$ , причем будем считать, что  $\Delta$  есть эффективная толщина отражателя с учетом экстраполированной добавки  $\left( \Delta \rightarrow \Delta + \frac{2}{3} \lambda_{tr} \right)$ . Кроме того, необходимо задать условия сшивки на границе активной зоны и отражателя. Они следуют из того факта, что односторонние токи на границе двух сред должны быть равны, так как токи и потоки, по определению, функции непрерывны:

$$\frac{\Phi_1}{4} \pm \frac{D_1}{2} \nabla \Phi_1 \Big|_{x=\frac{H}{2}} = \frac{\Phi_2}{4} \mp \frac{D_2}{2} \nabla \Phi_2 \Big|_{x=\frac{H}{2}},$$

откуда следует, что:

$$\Phi_1 \left( \frac{H}{2} \right) = \Phi_2 \left( \frac{H}{2} \right), \\ D_1 \cdot \nabla \Phi_1 \Big|_{x=\frac{H}{2}} = D_2 \cdot \nabla \Phi_2 \Big|_{x=\frac{H}{2}}.$$

Таким образом, условия сшивки означают непрерывность потока и полного тока нейтронов на границе активной зоны и отражателя. Учитывая граничные условия, запишем распределение потока нейтронов в активной зоне и отражателе:

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= A_1 \cdot \cos(\chi_1 \cdot x), \\ \Phi_2(x) &= A_2 \cdot \text{Sh} \left( \frac{H/2 + \Delta - x}{L_2} \right).\end{aligned}\tag{5.4.2}$$

где  $\chi_1^2 = \frac{K_\infty - 1}{L_1^2}$  – материальный параметр размножающей среды в активной зоне,  $L_1^2 = \frac{D_1}{\Sigma_a^{(1)}}$ ;  $L_2^2 = \frac{D_2}{\Sigma_a^{(2)}}$  – длины диффузии в активной зоне и отражателе соответственно. Для нахождения неизвестных констант  $A_1$  и  $A_2$  подставим эти выражения в условия сшивки потока и тока нейтронов на границе активной зоны и отражателя, предварительно вычислив производные этих функций на границе:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_1}{dx} &= -A_1 \cdot \chi_1 \cdot \sin(\chi_1 \cdot x), \\ \frac{d\Phi_2}{dx} &= -\frac{A_2}{L_2} \text{ch} \left( \frac{H/2 + \Delta - x}{L_2} \right).\end{aligned}$$

Искомые константы удовлетворяют системе линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\cos \left( \chi_1 \cdot \frac{H}{2} \right) \cdot A_1 - \text{Sh} \left( \frac{\Delta}{L_2} \right) \cdot A_2 &= 0, \\ D_1 \cdot \chi_1 \sin \left( \frac{\chi_1 \cdot H}{2} \right) \cdot A_1 + \frac{D_2}{L_2} \text{ch} \left( \frac{\Delta}{L_2} \right) \cdot A_2 &= 0.\end{aligned}$$

Для существования нетривиального решения этой системы ее определитель должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\chi_1 \cdot H}{2}\right), & \operatorname{Sh}\left(\frac{\Delta}{L_2}\right), \\ D_1 \cdot \chi_1 \cdot \sin\left(\frac{\chi_1 \cdot H}{2}\right), & -D_2 \cdot \frac{1}{L_2} \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta}{L_2}\right), \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим условие критичности реактора:

$$\chi_1 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\chi_1 \cdot H}{2}\right) = \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{1}{L_2} \operatorname{cth}\left(\frac{\Delta}{L_2}\right). \quad (5.4.3)$$

Это условие критичности имеет более сложный вид, чем для случая «голового» реактора. Для активной зоны, состоящей из нескольких областей с различными нейтронно-физическими свойствами, понятие геометрического параметра теряет свой смысл, в то время как понятие материального параметра для каждой области остается в силе.

Если заданы свойства размножающей среды и отражателя  $(\chi_1, D_1, D_2, L_2)$ , то это условие позволяет вычислить критический размер активной зоны с отражателем:

$$\frac{H}{2} = \frac{1}{\chi_1} \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\chi_1} \cdot \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{1}{L_2} \cdot \operatorname{cth}\left(\frac{\Delta}{L_2}\right)\right].$$

В другом случае, когда задан размер активной зоны  $H$ , из этого уравнения определяем, каким должен быть материальный параметр размножающей среды  $\chi_1^2$ . В обоих рассмотренных случаях диффузионные свойства отражателя  $(D_2, L_2)$  считаются известными.

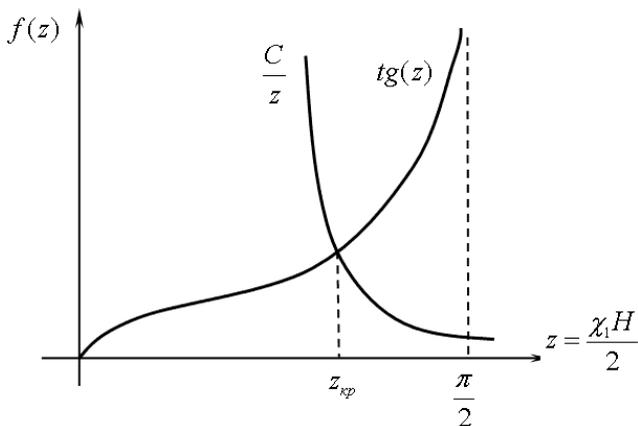


Рис. 5.7. Графический смысл определения критического размера реактора с отражателем

Для нахождения  $\chi_1^2$  необходимо решить трансцендентное уравнение, получаемое из условия (5.4.3):

$$z \cdot \text{tg}z = \frac{H}{2} \cdot \frac{D_2}{D_1} \frac{1}{L_2} \text{cth} \left( \frac{\Delta}{L_2} \right), \quad z = \frac{\chi_1 \cdot H}{2}. \quad (5.4.4)$$

Решение этого уравнения таково:  $\frac{\chi \cdot H}{2} < \frac{\pi}{2}$  или  $\chi < \frac{\pi}{H}$ . Графический смысл этого решения показан на рисунке 5.7. Таким образом, при наличии отражателя критический размер размножающей среды меньше, чем для «голой» размножающей среды, что очевидно следует из физического смысла.

### 5.5. Эффекты отражателя

Пусть имеется размножающая среда с заданным значением материального параметра  $\chi_1^2$ . Для случая реактора без отражателя критический размер пластины находится так:

$$\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 = \chi^2, \quad H = \frac{\pi}{\chi}, \quad \frac{H}{2} = \frac{\pi}{2 \cdot \chi}.$$

Если пластину окружить отражателем, то критический размер пластины уменьшится и будет определяться выражением

$$\frac{H}{2} = \frac{1}{\chi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{D_2}{D_1 \cdot \chi \cdot L_2} \operatorname{cth} \frac{\Delta}{L_2}\right). \quad (5.5.1)$$

Разность критического размера пластины без отражателя и пластины с отражателем называется эффективной добавкой отражателя, хотя более естественно эту величину называть эффективной «отбавкой» отражателя. Имеем с учетом (5.5.1):

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\pi}{2 \cdot \chi} - \frac{1}{\chi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{D_2}{D_1 \cdot \chi \cdot L_2} \operatorname{cth} \frac{\Delta}{L_2}\right) = \frac{1}{\chi} \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{D_2}{D_1 \cdot \chi \cdot L_2} \operatorname{cth} \frac{\Delta}{L_2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\chi} \operatorname{arctg}\left(\frac{D_2}{D_1 \cdot \chi \cdot L_2} \operatorname{cth} \frac{\Delta}{L_2}\right) = \frac{1}{\chi} \operatorname{arctg}\left(\frac{D_1 \cdot \chi \cdot L_2}{D_2} \operatorname{th} \frac{\Delta}{L_2}\right). \end{aligned}$$

При отсутствии отражателя  $\Delta = 0$ , добавка отражателя получается с помощью предельного перехода  $\Delta \rightarrow 0$ ,  $\operatorname{th}\left(\frac{\Delta}{L_2}\right) \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , то

есть при отсутствии отражателя добавка равна нулю.

Рассмотрим теперь случай, когда отражатель имеет очень большую толщину, так что  $\Delta/L_2 \rightarrow \infty$  (бесконечный отражатель). Тогда  $\operatorname{th}(\Delta/L_2) \rightarrow 1$ , и выражение для добавки отражателя будет

иметь вид:  $\delta = \frac{1}{\chi_1} \operatorname{arctg}\left(\frac{D_1}{D_2} \chi_1 \cdot L_2\right)$ . Это выражение дает значение

максимальной величины добавки отражателя при фиксированной толщине отражателя.

Для практически важного случая физически большого реактора, в котором  $K_\infty - 1 \ll 1$ ,  $\chi_1^2 \ll 1$ , выражение для добавки отражателя получается, если перейдем к пределу при  $\chi_1 \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\chi_1 \rightarrow 0} \delta = \lim_{\chi_1 \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\chi_1} \operatorname{arctg} \left( \frac{D_1}{D_2} \chi_1 \cdot L_2 \right) \right) = \frac{D_1}{D_2} \cdot L_2. \quad (5.5.2)$$

Следовательно, для физически большого реактора максимальная величина эффективной добавки равна длине диффузии тепловых нейтронов в отражателе.

Отражающая способность различных материалов, используемых в качестве отражателей, обычно характеризуется величиной альбедо, которая по определению есть отношение числа нейтронов, отраженных от поверхности отражателя, к числу падающих на поверхность отражателя нейтронов:

$$\beta = \frac{i^{(-)}}{i^{(+)}} \quad \text{где} \quad i^{(-)} = \frac{\Phi_2}{4} + \frac{D_2}{2} \nabla \Phi_2, \quad i^{(+)} = \frac{\Phi_2}{4} - \frac{D_2}{2} \nabla \Phi_2,$$

$$\beta = \frac{\frac{1}{4} \cdot \Phi_2 \left( \frac{H}{2} \right) + \frac{D_2}{2} \frac{d\Phi_2}{dx} \Big| \left( \frac{H}{2} \right)}{\frac{1}{4} \cdot \Phi_2 \left( \frac{H}{2} \right) - \frac{D_2}{2} \frac{d\Phi_2}{dx} \Big| \left( \frac{H}{2} \right)}. \quad (5.5.3)$$

Для того чтобы получить выражение для альбедо через характеристики отражателя, воспользуемся распределением потока нейтронов в отражателе:

$$\Phi_2(x) = A_2 \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{H/2 + \Delta - x}{L_2} \right), \quad (5.5.4)$$

$$\Phi_2 \left( \frac{H}{2} \right) = A_2 \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{\Delta}{L_2} \right), \quad \frac{d\Phi_2}{dx} \left( \frac{H}{2} \right) = -\frac{A_2}{L_2} \operatorname{ch} \left( \frac{\Delta}{L_2} \right).$$

Подставляя (5.5.4) в выражение для альбедо (5.5.3), получим явную зависимость альбедо от свойств и размеров отражателя:

$$\beta = \frac{1 + 2 \cdot D_2 \cdot \frac{1}{\Phi_2} \cdot \frac{d\Phi_2}{dx}}{1 - 2 \cdot D_2 \cdot \frac{1}{\Phi_2} \cdot \frac{d\Phi_2}{dx}} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{D_2}{L_2} \cdot \operatorname{cth}\left(\frac{\Delta}{L_2}\right)}{1 + 2 \cdot \frac{D_2}{L_2} \cdot \operatorname{cth}\left(\frac{\Delta}{L_2}\right)}. \quad (5.5.5)$$

Используя величину альbedo  $\beta$ , можно поставить граничное условие на границе активной зоны в другой форме:

$$\beta = \frac{1 + 2 \cdot D_1 \cdot \frac{1}{\Phi_1} \cdot \frac{d\Phi_1}{dx}}{1 - 2 \cdot D_1 \cdot \frac{1}{\Phi_1} \cdot \frac{d\Phi_1}{dx}}, \quad \frac{1}{\Phi_1} \cdot \frac{d\Phi_1}{dx} \left(\frac{H}{2}\right) = -\frac{1}{2D_1} \cdot \frac{1 - \beta}{1 + \beta}. \quad (5.5.6)$$

с помощью которого выразить добавку отражателя:

$$\operatorname{cth} \frac{\Delta}{L_2} = \frac{1 - \beta}{2 \cdot \frac{D_2}{L_2} \cdot (1 + \beta)}, \quad \delta = \frac{1}{\chi} \operatorname{arctg} \left[ 2 \cdot \chi \cdot D_1 \cdot \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right]. \quad (5.5.7)$$

В выражении (5.5.7) присутствуют свойства активной зоны (размножающей среды)  $\chi$ ,  $L^2$  и отражателя ( $\beta$ ). Для бесконечно большого реактора  $\lim_{\chi \rightarrow 0} \delta = 2 \cdot D_1 \cdot \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$ . Это выражение можно использовать и для случая границы с вакуумом, для чего необходимо положить  $i^{(-)} = 0$ ,  $\beta = 0$ , тогда  $\beta = 0$ ,  $\delta = 2 \cdot D_1 = \frac{2}{3} \lambda_{tr}$ , то есть получилась экстраполированная добавка.

Существуют и дополнительные преимущества отражателя. Рассмотрим однородную активную зону с отражателем. Если нам известно распределение  $\Phi(\vec{r})$  и активная зона состоит из однородной мультиплицирующей среды, то поле энерговыделения  $Q(\vec{r}) = A \cdot \Sigma_f \cdot \Phi(\vec{r})$  пропорционально  $\Phi(\vec{r})$ . Под коэффициентом неравномерности поля энерговыделения понимают величину

$$K_V = \frac{Q^{\max}}{\bar{Q}}, \quad (5.5.8)$$

где  $\bar{Q} = \frac{1}{V_{\text{аз}} V_{\text{аз}}} \int Q(\vec{r}) d\vec{r}$  – среднее значение энерговыделения в активной зоне, а  $W = \int_{V_{\text{аз}}} Q(\vec{r}) d\vec{r} = \bar{Q} \cdot V_{\text{аз}}$  – мощность активной зоны.

При заданных размерах активной зоны мощность, снимаемая с активной зоны, пропорциональна ее объему:  $W = \frac{Q^{\max}}{K_V} \cdot V_{\text{аз}}$ , и, обратно пропорциональна коэффициенту неравномерности энерговыделения. Поскольку величина  $Q^{\max}$  определяется температурным режимом работы, ее значение считается известным и определенным для каждого реактора. При проектировании реакторов, как правило, стремятся к выравниванию поля энерговыделения в активной зоне, что приводит к снижению величины коэффициента неравномерности  $K_V$ . Итак, если размеры активной зоны заданы, то снижение величины  $K_V$  приводит к повышению мощности, снимаемой с данного объема активной зоны, и наоборот, если фиксирована мощность активной зоны, то при снижении величины  $K_V$  можно уменьшить объем активной зоны.

Рассмотрим влияние отражателя на коэффициент неравномерности. Так как  $Q(\vec{r}) \sim \Phi(\vec{r})$ , то  $K_V = \frac{\Phi^{\max}}{\bar{\Phi}}$ . Поскольку поток нейтронов определен с точностью до константы, то без ограничения общности можно считать, что  $\Phi^{\max} = 1$ . Для реактора без отражателя в самом простом случае,  $\Phi(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ , и среднее значение потока нейтронов

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{2}{\pi}. \quad (5.5.9)$$

В результате коэффициент неравномерности поля нейтронов и энергосвыделения в «голом» реакторе будет  $K_V = \frac{\pi}{2}$ .

Для реактора с отражателем поток нейтронов и его среднее значение по активной зоне определяются выражениями:

$$\Phi(x) = \cos(\chi \cdot x), \quad \bar{\Phi} = \frac{2 \cdot \cos(\chi \cdot \delta)}{\pi - 2\chi \cdot \delta}.$$

так что коэффициент неравномерности

$$K_z = \frac{\pi - 2\chi \cdot \delta}{2 \cdot \cos(\chi \cdot \delta)} \approx \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{\chi \cdot \delta}{\pi}\right) < \frac{\pi}{2}. \quad (5.5.10)$$

Таким образом, наличие отражателя не только снижает критический размер реактора, но и способствует выравниванию поля энергосвыделения.

### ***5.6. Диффузионно-возрастное приближение***

При использовании однопруппового диффузионного приближения неявно предполагается, что нейтрон деления становится тепловым в том месте, где он появился. На самом деле, прежде чем стать тепловым нейтроном, быстрый нейтрон смещается от места своего рождения примерно на расстояние, равное  $\sqrt{\tau_{th}}$ , где  $\tau_{th}$  – возраст тепловых нейтронов. В реакторах, размеры активной зоны которых существенно больше, чем  $\tau_{th}$ , отличие в местоположении источника тепловых нейтронов и рождения быстрых не играет существенной роли, поскольку пространственные изменения потока тепловых нейтронов происходит на расстояниях, больших чем длина замедления тепловых нейтронов. Рассмотрим модель, которая позволяет учитывать смещение нейтронов в процессе замедления от той точки, где они родились как быстрые нейтроны. Для описания пространственно-энергетического распределения замедляющихся нейтронов воспользуемся уравнением возраста для функции плотности

замедления  $q(\vec{r}, t)$ , причем энергетическая переменная  $E$  заменена на возраст нейтронов:

$$\begin{aligned} \tau(E) &= \int_E^{E_0} \frac{\lambda_{tr}(E') \cdot \lambda_s(E')}{3\xi} \cdot \frac{dE'}{E'} = \{u = \text{Ln}(E_0/E)\} = \\ &= \tau(u) = \int_0^u \frac{D(u') du'}{\xi \Sigma_s(u')}. \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

Как известно из теории переноса нейтронов, уравнение возраста для замедляющихся нейтронов имеет вид  $\Delta q = \frac{\partial q}{\partial \tau}$ . Для реакторов на тепловых нейтронах пренебрежение нерезонансным поглощением нейтронов при замедлении вполне приемлемо. Поток тепловых нейтронов определяется обычным диффузионным уравнением, но теперь уже с источником:

$$D\Delta\Phi(\vec{r}) - \Sigma_a\Phi(\vec{r}) + q_{th}(\vec{r}) = 0. \quad (5.6.2)$$

Начальное условие для плотности замедления есть  $q(\vec{r}, \tau = 0) = \nu\theta\Sigma_a\Phi$ . Резонансное поглощение нейтронов в этой модели учитывается с помощью предположения о том, что резонансный захват сосредоточен по энергетической оси на границе между замедляющимися и тепловыми нейтронами, то есть

$$q_{Th}(\vec{r}) = q(\vec{r}, \tau_T) \cdot \varphi, \quad \text{где} \quad \tau_T = \int_0^{u_T} \frac{D(u') du'}{3\xi\Sigma_s(u')};$$

– возраст нейтронов деления, достигших тепловой области энергий.

Таким образом, условно-критическую задачу в диффузионно-возрастном приближении можно сформулировать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial q}{\partial \tau} = \Delta q, \\ D\Delta\Phi - \Sigma_a\Phi = \varphi \cdot q(\vec{r}, \tau_{th}), \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} q(\vec{r}, 0) = \frac{K_\infty}{K_{\text{эф}}} \Sigma_a\Phi, \\ q(\vec{r}_{extr}, \tau) = 0; \quad \Phi(\vec{r}_{extr}) = 0. \end{array} \right. \quad (5.6.3)$$

Будем искать решение системы уравнений (5.6.3) в разделенных переменных:

$$\begin{aligned} q(\vec{r}, \tau) &= q(\tau) \cdot \Psi_0(\vec{r}), \\ \Phi(\vec{r}) &= A \cdot \Psi_0(\vec{r}), \end{aligned}$$

где  $\Psi_0(\vec{r})$  – собственная функция оператора Лапласа, отвечающая минимальному собственному значению:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_0(\vec{r}) + \alpha_0^2 \cdot \Psi_0(\vec{r}) &= 0, \\ \Psi_0(\vec{r}_{extr}) &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя разложения по переменным в систему (5.6.3), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\tau} &= -\alpha_0^2 q(\tau), \\ (\alpha_0^2 \cdot D + \Sigma_a) \cdot A &= \varphi \cdot q(\tau_{th}), \\ q(0) &= \frac{K_\infty}{\varphi \cdot K_{эф}} \Sigma_a \cdot A. \end{aligned}$$

Энергетическое распределение замедляющихся нейтронов будет иметь вид:  $q(\tau) = q(0) \cdot e^{-\alpha_0^2 \cdot \tau} = \frac{K_\infty}{\varphi \cdot K_{эф}} \Sigma_a \cdot A \cdot e^{-\alpha_0^2 \cdot \tau}$ , а эффективный коэффициент размножения  $K_{эф}$  определяется из соотношения:

$$(\alpha_0^2 \cdot D + \Sigma_a) \cdot A = \varphi \frac{K_\infty}{\varphi \cdot K_{эф}} \Sigma_a \cdot A \cdot e^{-\alpha_0^2 \cdot \tau}.$$

Из решения этого уравнения получим выражение для эффективного коэффициента размножения с учетом миграции быстрых нейтронов в активной зоне:

$$K_{\text{эф}} = \frac{K_{\infty} \cdot e^{-\alpha_0^2 \cdot \tau_T}}{1 + \alpha_0^2 \cdot L^2}. \quad (5.6.4)$$

Для реактора большого размера выполняются следующие соотношения:

$$\alpha_0^2 \cdot \tau_T \ll 1, \quad e^{-\alpha_0^2 \cdot \tau_T} \approx 1 - \alpha_0^2 \cdot \tau_T \cong \frac{1}{1 + \alpha_0^2 \cdot \tau_T},$$

из которых следует, что

$$K_{\text{эф}} \cong \frac{K_{\infty}}{(1 + \alpha_0^2 \cdot L^2)(1 + \alpha_0^2 \cdot \tau_T)} \cong \frac{K_{\infty}}{1 + \alpha_0^2 (L^2 + \tau_T)}. \quad (5.6.5)$$

Величина  $M^2$ , определяемая как сумма  $M^2 = L^2 + \tau_T$ , носит название квадрата длины миграции и характеризует величину среднего квадрата смещения нейтрона от места его рождения до места поглощения. Таким образом, поправка в коэффициенте размножения реактора, связанная с учетом миграции быстрого нейтрона в процессе замедления, сводится к замене длины диффузии на длину миграции  $L^2 \rightarrow M^2$ . Величина  $\frac{1}{1 + \alpha_0^2 \cdot M^2}$  имеет смысл вероятности нейтрону избежать утечки в процессе как замедления, так и диффузии в тепловой области энергий.

### 5.7. Многогрупповое диффузионное приближение

В случае, когда размножающая среда характеризуется большой долей захвата нейтронов в области замедления, для описания пространственного распределения потока нейтронов применяется многогрупповое приближение, для которого система уравнений имеет следующий вид:

$$-D_g \Delta \Phi_g + \Sigma_{ad}^g \cdot \Phi_g = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_s^{g' \rightarrow g} \cdot \Phi_{g'} + \frac{\chi_g}{K_{\text{эф}}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_f^{g'} \cdot \Phi_{g'}. \quad (5.7.1)$$

Сечение увода из группы  $\Sigma_{ad}^g$  включает в себя наряду с сечением поглощения нейтронов в данной группе и перевод нейтронов из данной группы во все остальные. Рассмотрим реактор без отражателя. Если размеры активной зоны много больше длины миграции, то экстраполированная добавка слабо влияет на распределение нейтронов в активной зоне. Поэтому будем считать, что нулевое граничное условие для всех групп выполняется на одной и той же экстраполированной границе  $\Phi_g(\vec{r}_{extr}) = 0 \quad \forall g$ . В этом случае решение системы (5.7.1) можно представить в следующем виде:

$$\Phi_g(\vec{r}) = A_g \cdot \Phi_0(\vec{r}),$$

где  $\Phi_0(\vec{r})$  – первая собственная функция оператора Лапласа, отвечающая задаче

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_0 + \alpha_0^2 \cdot \Phi_0 &= 0, \\ \Phi_0(\vec{r}_{extr}) &= 0. \end{aligned}$$

Такое представление с физической точки зрения означает, что пространственное распределение нейтронов во всех группах одинаковое, причем собственное число  $\alpha_0^2$  есть геометрический параметр активной зоны. Искомые константы играют роль амплитудного множителя, определяющего долю нейтронов данной группы в суммарном потоке нейтронов, то есть его спектральное распределение. Подставляя разложение в систему (5.7.1), получим алгебраическую систему уравнений для нахождения числовых коэффициентов:

$$\left( D_g \cdot \alpha_0^2 + \Sigma_{ad}^g \right) A_g = \sum_{g'=1}^{g-1} A_{g'} \cdot \Sigma_s^{g' \rightarrow g} + \frac{\chi_g}{K_{эф}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_f^{g'} \cdot \Phi_{g'}. \quad (5.7.2)$$

Система (5.7.2) является системой линейных однородных уравнений и ее решение определяется с точностью до константы. Выбирая константу таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{g=1}^G \nu_f \Sigma_f^g \cdot A_g = K_{\text{эф}},$$

тем самым сведем систему однородных уравнений (5.7.2) к системе неоднородных уравнений, матрица которой имеет нижнетреугольную структуру:

$$(\alpha_0^2 \cdot D^g + \Sigma_{ad}^g) \cdot A_g - \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_s^{g' \rightarrow g} \cdot A_{g'} = \chi_g. \quad (5.7.3)$$

Решение этой системы получается последовательно, начиная с первой группы:

$$\begin{cases} (\alpha_0^2 \cdot + \Sigma_1^{(yB)}) \cdot A_1 = \chi_1; & A_1 = \frac{\chi_1}{\alpha_0^2 \cdot + \Sigma_1^{(yB)}}; \\ (\alpha_0^2 \cdot + \Sigma_2^{(yB)}) \cdot A_2 = A_1 \cdot \Sigma_s^{1 \rightarrow 2} + \chi_2; & A_2 = \frac{A_1 \cdot \Sigma_s^{1 \rightarrow 2} + \chi_2}{\alpha_0^2 \cdot + \Sigma_2^{(yB)}}. \end{cases}$$

Определив все коэффициенты, находим эффективный коэффициент размножения, который соответствует первому собственному

числу оператора Лапласа  $\alpha_0^2$ :  $K_{\text{эф}} = \sum_{g=1}^G \nu_f \Sigma_f^g \cdot A_g$ .

Таким образом, решение задачи для однородной размножающей среды в конечном объеме осуществляется тем же способом, как и для бесконечной среды, поскольку пространственное распределение нейтронов во всех группах одинаковое.

**Общая схема численного решения многогрупповой задачи с пространственной зависимостью констант.** Основная цель численного расчета реактора – определить  $K_{\text{эф}}$  и найти пространственное распределение потока нейтронов. Уравнения для потока  $g$ -й группы в многогрупповом диффузионном приближении имеют вид:

$$\begin{cases} -\nabla D_g(\bar{r}) \nabla \Phi_g^{(i)}(\bar{r}) + \Sigma_g(\bar{r}) \Phi_g^{(i)}(\bar{r}) = q_g^{i-1}(\bar{r}), \\ q_g^{i-1}(\bar{r}) = \sum_{g'=G}^{g-1} \Sigma^{g-g'} \Phi_{g'}^{(i-1)}(\bar{r}) + \chi_g \sum_{g'=1}^G (v_f \Sigma_f)_{g'} \Phi_{g'}^{(i-1)}(\bar{r}). \end{cases} \quad (5.7.4)$$

Индекс « $i$ » означает номер итерации расчета потока нейтронов, так как для решения системы уравнений (5.7.4) используется итерационная процедура, состоящая в том, что если начать с некоего источника  $\Phi_g^0$ , то второе уравнение системы позволит найти источники нейтронов, сформированные этим потоком  $q_g^{i-1}(\bar{r})$ . Таким образом, в первом приближении становится известен источник в первом уравнении. Численное решение первого уравнения (схема приводится далее) позволяет определить второе приближение потока нейтронов в данной энергетической группе и второе приближение источника нейтронов. В результате получается итерационная процедура, которая продолжается до тех пор, пока относительное изменение потока нейтронов двух соседних итераций будет превышать заданную точность расчета.

Таким образом, на каждой итерации строится распределение источников, генерируется следующее поколение и, следовательно, новое распределение источников нейтронов. Такой метод расчета реактора носит название метода итераций источника, и является весьма распространенным методом при расчете реакторов. Главным преимуществом данного метода является независимость итогового решения от выбора начального приближения. Коэффициент размножения нейтронов при методе итераций источников может быть определен как отношение просуммированных по группам двух последовательных источников:

$$K_{\text{эф}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{g=1}^G q_g^{(i)}(\bar{r})}{\sum_{g=1}^G q_g^{(i-1)}(\bar{r})} \right). \quad (5.7.5)$$

Очевидно, что для выполнения численных расчетов по методу итерации источника необходимо многократно решать первое уравнение в системе (5.7.4). В самом общем случае будем считать, что реактор имеет произвольное число пространственных зон  $N$ , каждая из которых характеризуется своими ядерными свойствами, постоянными в пределах зоны (рис. 5.8). В качестве пространственных зон обычно выделяют отдельные тепловыделяющие элементы или группы элементов, органы регулирования и т.п. Численная схема решения уравнения представляет собой схему решения дифференциального уравнения 2-го порядка стандартным методом обратной прогонки, суть которого такова.

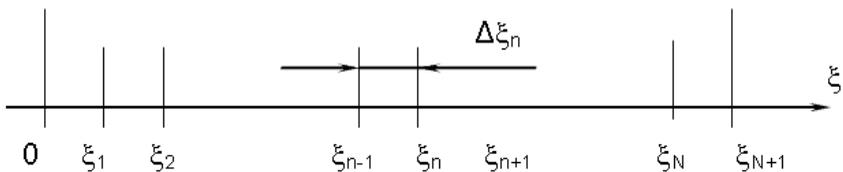


Рис. 5.8. Разбиение реактора на зоны с пространственно-постоянными ядерными свойствами

Представляется следующий вид конечно-разностного уравнения и полученной численной схемы решения:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Phi_2 + A_1 \Phi_1 = f_1, \\ \dots \\ -\Phi_{n+1} + A_n \Phi_n - B_n \Phi_{n-1} = f_n, \\ \dots \\ A_N \Phi_N + B_N \Phi_{N-1} = f_N, \end{array} \right. \quad \text{обозначим} \quad \bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \dots \\ \Phi_N \end{pmatrix}, \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_N \end{pmatrix}.$$

$$\widehat{C}\Phi = \bar{f}, \text{ где } \widehat{C} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \dots & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \dots & \bullet & \bullet \end{pmatrix}, \Phi_{n+1} - A_n \Phi_n + B_n \Phi_{n-1} = -f_n.$$

Будем искать решение в виде  $\Phi_{n+1} = \alpha_n \Phi_n - \beta_n$ . Очевидно, что  $\alpha_1 = A_1$ ,  $\beta_1 = f_1$ ,  $\Phi_{n-1} = \frac{\Phi_n + \beta_n}{\alpha_n}$ , откуда при подстановке получается ключевой блок решения – связь  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  с  $\alpha_{n-1}$  и  $\beta_{n-1}$ :

$$\begin{cases} \alpha_n = A_n - \frac{B_n}{\alpha_{n-1}}, \\ \beta_n = f_n + \frac{B_n \beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}}. \end{cases}$$

Таким образом, задача решается обратным ходом: сначала идет расчет коэффициентов, а потом, в обратном направлении – расчет потоков:

$$\Phi_1 \rightarrow \alpha_1, \beta_1 \rightarrow \alpha_n, \beta_n \rightarrow \Phi_N \rightarrow \Phi_{N-1} \dots \Phi_n$$

**Двухгрупповая система уравнений в диффузионно-возрастном приближении в реакторе с отражателем.** Воспользуемся диффузионно-возрастным приближением, чтобы получить систему двухгрупповых уравнений для реактора на тепловых нейтронах. При описании пространственного распределения нейтронов в диффузионно-возрастном приближении рассматриваются две функции:  $q(\vec{r}, \tau)$  – плотность замедления, зависящая от пространственной и энергетической переменных, и  $\Phi(\vec{r})$  – плотность потока тепловых нейтронов. Для получения системы двухгрупповых уравнений путем усреднения плотности замедления по переменной  $\tau$  свернем все замедляющиеся нейтроны в одну группу:

$$\bar{q}(\vec{r}) = \frac{1}{\tau_T} \int_0^{\tau_T} q(\vec{r}, \tau) d\tau,$$

и проинтегрируем уравнение для плотности замедления по переменной  $\tau$ . В результате получим следующее уравнение:

$$\Delta \bar{q}(\vec{r}) - \frac{1}{\tau_T} [q(\vec{r}, \tau_T) - q(\vec{r}, 0)] = 0. \quad (5.7.6)$$

Принимая во внимание начальное условие  $q(\vec{r}, 0) = \frac{K_\infty \cdot \Sigma_a}{\phi} \cdot \Phi(\vec{r})$ ,

приведем уравнение к виду:

$$\Delta \bar{q}(\vec{r}) - \frac{1}{\tau_T} q(\vec{r}, \tau_T) + \frac{K_\infty \cdot \Sigma_a}{\tau_T \cdot \phi} \cdot \Phi(\vec{r}) = 0. \quad (5.7.7)$$

Предполагая, что справедливо соотношение  $q(\vec{r}, \tau_T) \approx \bar{q}(\vec{r})$ , получим систему двухгрупповых уравнений реактора в диффузионно-возрастном приближении:

$$\begin{cases} \Delta \bar{q}(\vec{r}) - \frac{1}{\tau_T} \bar{q}(\vec{r}) + \frac{K_\infty \cdot \Sigma_a}{\tau_T \cdot \phi} \cdot \Phi(\vec{r}) = 0, \\ D \Delta \Phi(\vec{r}) - \Sigma_a \cdot \Phi(\vec{r}) + \phi \cdot \bar{q}(\vec{r}) = 0. \end{cases} \quad (5.7.8)$$

Применим полученную систему двухгрупповых уравнений для расчета реактора с отражателем. Для упрощения записи системы уравнений воспользуемся обозначениями векторно-матричной формы:

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \bar{q}(\vec{r}) \\ \Phi(\vec{r}) \end{pmatrix}, \quad \Delta \vec{\Phi} + \hat{\chi}^2 \vec{\Phi} = 0,$$

где материальный параметр представляет собой матрицу:

$$\hat{\chi}^2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\tau_T} & \frac{K_\infty \cdot \Sigma_a}{\Phi \cdot \tau_T} \\ \frac{\Phi}{D_T} & -\frac{1}{L^2} \end{vmatrix} \quad \text{для активной зоны,}$$

$$\hat{\chi}^2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\tau_T} & 0 \\ \frac{\Phi}{D_T} & -\frac{1}{L^2} \end{vmatrix} \quad \text{для отражателя.}$$

Будем искать решение векторно-матричного уравнения для активной зоны и отражателя в виде  $\bar{\Phi}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^2 \bar{I}_n \cdot f_n(\vec{r})$ , где  $\bar{I}_n$  - собственные векторы матрицы  $\hat{\chi}^2$ , которые различны для активной зоны и отражателя:  $\hat{\chi}^2 \bar{I}_n = \lambda_n \cdot \bar{I}_n, n=1,2$ , а  $f_n(\vec{r})$  - функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, в котором коэффициент пропорциональности  $\alpha^2 = \lambda_n^2$ :  $\Delta f_n(\vec{r}) + \lambda_n^2 \cdot f_n(\vec{r}) = 0$ .

Поэтому пространственные распределения в активной зоне и отражателе будут также описываться различными функциями. Вид этих функций зависит от геометрии активной зоны и отражателя. Заметим, что это не есть задача на собственные значения, так как не заданы однородные граничные условия. Решение этих уравнений второго порядка будет содержать две функции, зависящие от геометрии реактора, и две произвольные постоянные для каждого значения собственного числа  $\lambda$ .

Применяя стандартную процедуру нахождения собственных чисел матрицы второго порядка, получим для активной зоны:

$$\left( -\frac{1}{\tau_T} - \lambda^2 \right) \cdot \left( -\frac{1}{L^2} - \lambda^2 \right) - \frac{K_\infty \cdot \Sigma_a}{D \cdot \tau_T} = 0,$$

$$\begin{cases} \lambda_1^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{\tau_T}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{\tau_T}\right)^2 + \frac{K_\infty - 1}{L^2 \cdot \tau_T}} > 0, \\ \lambda_2^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{\tau_T}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{\tau_T}\right)^2 + \frac{K_\infty - 1}{L^2 \cdot \tau_T}} < 0. \end{cases}$$

и для отражателя:

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{\tau_T} - \lambda^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{L^2} - \lambda^2\right) = 0, \\ \lambda_1^2 = -\frac{1}{\tau_T}, \quad \lambda_2^2 = -\frac{1}{L^2}. \end{cases}$$

Собственные векторы матриц определяются из однородного уравнения, общее решение которого определено с точностью до константы. Эту константу выберем, полагая первую координату векторов равной 1:  $\vec{I}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ \gamma_1 \end{vmatrix}$ ;  $\vec{I}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ \gamma_2 \end{vmatrix}$ , причем для активной зоны

$$\gamma_n = \frac{\Phi}{\Sigma_a \cdot (1 + \lambda_n^2 \cdot L^2)}, \text{ а для отражателя } \gamma_1 = \frac{1}{\Sigma_a \cdot (1 - L^2/\tau_T)}; \gamma_2 = 1.$$

Поток нейтронов в каждой зоне будет представлен в виде линейной комбинации четырех различных, но известных функций с произвольными коэффициентами:  $\Phi_k(\vec{r}) = \sum_{i=1} A_k^{(i)} \cdot f_i^{(k)}$ ;  $k = 0, 1$ .

Для определения коэффициентов имеются два граничных условия в центре активной зоны, два граничных условия на границе отражателя и четыре условия сшивки потоков и токов в каждой группе на границе активной зоны и отражателя:

$$\begin{aligned}
\Phi_g(0) &< \infty, \\
\Phi_g(\vec{R}_{extr}) &= 0, \\
\Phi_g^{a3}(\vec{R}_{a3}) &= \Phi_g^{отр}(\vec{R}_{a3}), \\
D_g^{a3} \nabla \Phi_g^{a3}(\vec{R}_{a3}) &= D_g^{отр} \nabla \Phi_g^{отр}(\vec{R}_{a3}), \quad g = 1, 2.
\end{aligned}$$

В результате получим систему линейных однородных алгебраических уравнений четвертого порядка, для нетривиальной разрешимости которой требуется обращение в нуль ее определителя. Именно это уравнение играет роль условия критичности, из которого можно найти либо критический размер при заданных свойствах размножающей среды в активной зоне, либо требуемый коэффициент размножения при фиксированных размерах активной зоны и отражателя.

Что касается пространственного распределения нейтронов в реакторе с отражателем, то необходимо отметить следующие два факта. Во-первых, источником быстрых нейтронов в отражателе служит ток нейтронов из активной зоны. В самом отражателе источников нейтронов деления нет. Поэтому скорость спада быстрых нейтронов в отражателе по мере приближения к границе будет существенно выше, чем в активной зоне. Во-вторых, поток тепловых нейтронов в отражателе вблизи границы с активной зоной будет возрастать. Это связано с тем, что макросечение поглощения тепловых нейтронов в отражателе существенно меньше, чем в активной зоне. Поэтому поток тепловых нейтронов в непосредственной близости от активной зоны в отражателе будет возрастать по мере удаления от границы активной зоны и, достигнув максимума, начнет спадать к границе отражателя. Это приведет к увеличению потока тепловых нейтронов в отражателе на границе с активной зоной (рис. 5.9).

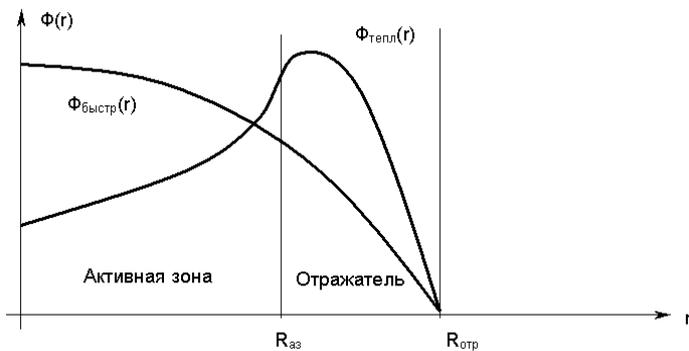


Рис. 5.9. Распределение потоков быстрых и тепловых нейтронов в реакторе с отражателем

Следовательно, полный ток тепловых нейтронов на границе с отражателем, направлен в сторону активной зоны из отражателя. Величина такого всплеска потока тепловых нейтронов в отражателе зависит от свойств отражателя и его размеров.

## Глава 6 ГЕТЕРОГЕННЫЕ СТРУКТУРЫ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

### *6.1. Понятие бесконечно протяженной решетки*

До сих пор рассматривались физические аспекты ядерных реакторов, представляющие собой гомогенные размножающие среды. Однако подавляющее большинство существующих реакторов имеют гетерогенную структуру активной зоны. Во-первых, гетерогенное размещение ядерного топлива в активной зоне позволяет пространственно разделить несовместимые по физико-химическим свойствам материалы топлива, теплоносителя и замедлителя, что способствует повышению надежности и безопасности реакторов. Во-вторых, как будет показано ниже, гетерогенное размещение топлива, замедлителя и теплоносителя приводит к улучшению размножающих свойств активной зоны. Благодаря этому удалось построить первые ядерные реакторы на природном уране.

В настоящее время существует большое разнообразие гетерогенных компоновок активных зон ядерных реакторов. В реакторах на быстрых нейтронах, в которых отсутствует замедлитель, топливные элементы погружены в теплоноситель и омываются им. То же самое имеет место и для реакторов водо-водяного типа (ВВЭР, ВК, PWR и BWR), в которых вода является одновременно и теплоносителем и замедлителем (рис. 6.1). В реакторах, где функции теплоносителя и замедлителя разделены, как, например, в РБМК и CANDU, топливо размещено в каналах и омывается теплоносителем, а сам теплоноситель отделен от замедлителя стенками канала (рис. 6.2). Более сложная гетерогенная структура размещения различных компонентов активной зоны имеет место в газографитовых реакторах, где топливо структурно размещено вместе с замедлителем и такие компакты омываются газообразным теплоносителем.

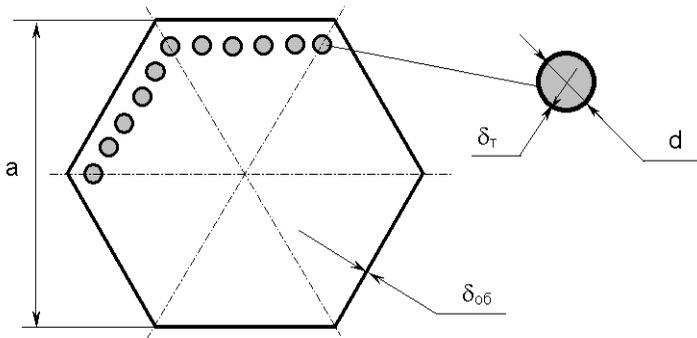


Рис. 6.1. Форма тепловыделяющей сборки реакторов ВВЭР:  
 а – ТВС «под ключ»;  $\delta_{об}$  – оболочка (чехол) ТВС;  $\delta_т$  – оболочка твэла;  $d$  – твэл

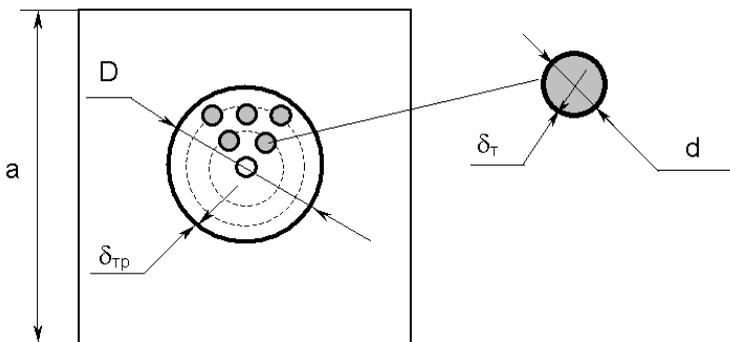


Рис. 6.2. Форма тепловыделяющей сборки реакторов РБМК:  
 а – ячейка;  $\delta_{тр}$  – оболочка трубы канала;  $D$  – труба канала;  
 $\delta_т$  – оболочка твэла;  $d$  – твэл)

Типичный твэл состоит из топливного сердечника (блока) цилиндрической формы, заключенного в металлическую оболочку. В современных энергетических реакторах в качестве оболочки обычно используется либо сплав циркония и ниобия, либо нержавеющая сталь. В высокотемпературных газографитовых реакторах твэл представляет собой микросферу из урана, окруженную несколькими слоями керамических покрытий.

С теплотехнической точки зрения диаметр топливных блоков должен быть как можно меньше, чтобы увеличить поверхность теплоотдачи на единицу массы топлива. Поэтому число твэлов в активной зоне энергетического реактора составляет несколько десятков тысяч. Для удобства загрузки и выгрузки такого количества твэлов их объединяют в сборки, состоящие из десятков и сотен твэл. Сборкой называют конструкцию, представляющую совокупность определенным образом размещенных в решетке твэлов.

Тепловыделяющие элементы в сборках образуют фрагменты периодических решеток. В реакторах ВВЭР и БН решетка – треугольная, поскольку твэлы в ней расположены в вершинах равностороннего треугольника, а в реакторах типа PWR и BWR решетка квадратная, так как твэлы в ней расположены в вершинах квадрата. Квадратную решетку образуют и графитовые блоки в реакторе РБМК. Длина стороны равностороннего треугольника или стороны квадрата называется шагом решетки. Решетки также можно рассматривать как совокупности ячеек. В этом случае говорят, что сборки имеют ячеистую структуру. Как правило, наряду с твэлами, сборки содержат различные регуляторы, расположенные в определенном порядке. Такие сборки в активной зоне можно рассматривать как сложные ячейки (полиячейки).

Бесконечно протяженная решетка называется регулярной, если она периодическая и состоит из ячеек одного сорта (типа). Такие решетки называют также бесконечной гетерогенной средой (см. рис. 6.3). В бесконечно протяженной решетке тепловыделяющие элементы бесконечно длинные.

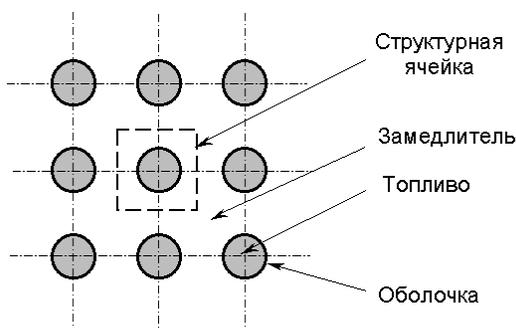


Рис. 6.3. Бесконечно протяженная регулярная решетка

## 6.2. Метод эффективной гомогенизации

Сборки и активные зоны энергетических реакторов содержат большое число твэлов и их можно рассматривать как протяженные решетки. Естественно желание применить расчетные методы реакторов, основанных на гомогенных размножающих средах, к гетерогенным периодическим средам. Для этого используется так называемый метод «эффективной гомогенизации». Основная идея метода заключается в переходе от гетерогенных сред к гомогенным средам с эффективными константами, позволяющими правильно описывать процессы размножения, замедления и диффузии нейтронов в гетерогенных реакторах на основе соотношений, полученных для гомогенных реакторов.

Для бесконечной протяженной решетки пространственное распределение нейтронов будет иметь периодическую структуру. Элементом периодичности выступает пространственное распределение нейтронов в одной ячейке. Если характерный размер ячейки  $R$  существенным образом превышает среднюю длину свободного пробега нейтронов  $R \gg \lambda$ , то для таких нейтронов пространственное распределение будет резко неоднородным. В конечной среде, составленной из периодической решетки твэлов, пространственное распределение нейтронов представляется в виде произведения двух составляющих, одна из которых описывает глобальное распределение нейтронов в гомогенной среде, а вторая – периодическую составляющую, отвечающую бесконечно протяженной решетке.

В результате этого функция пространственного распределения нейтронов будет иметь осцилляции (тонкая структура), обусловленные пространственной неоднородностью самих ячеек (рис. 6.4). Для быстрых и тепловых нейтронов осцилляции могут иметь значительные амплитуды.

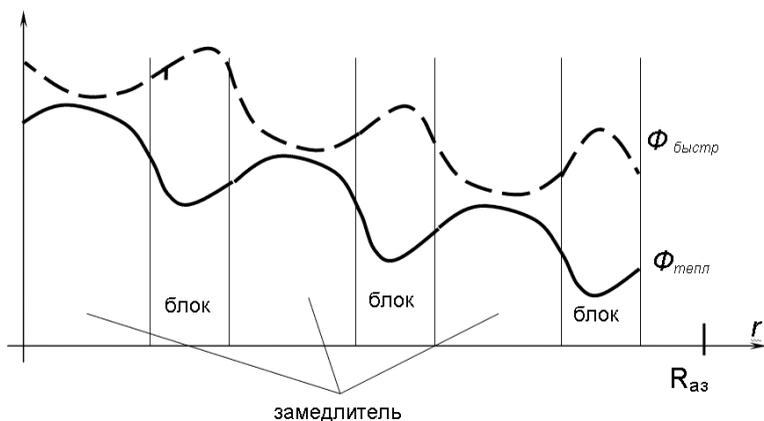


Рис. 6.4. Осцилляции потоков быстрых и тепловых нейтронов в решетке и снижение потока по мере приближения к границе реактора

Влияние пространственных осцилляций на нейтронно-ядерные процессы в гетерогенных зонах удобно анализировать, рассматривая бесконечно протяженные регулярные решетки, отвлекаясь тем самым от общей (гладкой) составляющей пространственного распределения, обусловленной, например, утечкой нейтронов из активной зоны. Распределение нейтронов в бесконечно-протяженной регулярной решетке удобно определять с помощью отдельной ячейки, ставя условие периодичности для потока нейтронов на границе ячеек. Такие ячейки называются замкнутыми. В симметрично замкнутых ячейках условие периодичности заменяется условием зеркального отражения нейтронов на границе ячейки.

На рис. 6.5 сплошной линией показан путь прямопротрельного нейтрона (нейтрона не испытавшего взаимодействия с ядрами среды) от точки  $A$  в ячейке (1) до точки  $B$  на границе ячейки (5) в решетке, состоящей из простых двухзонных ячеек. На этом же рисунке ячейка (1) представлена как замкнутая (закрытая); а пунктирной линией изображен тот же путь нейтрона  $AB$  при условии его зеркального отражения на границе ячейки.

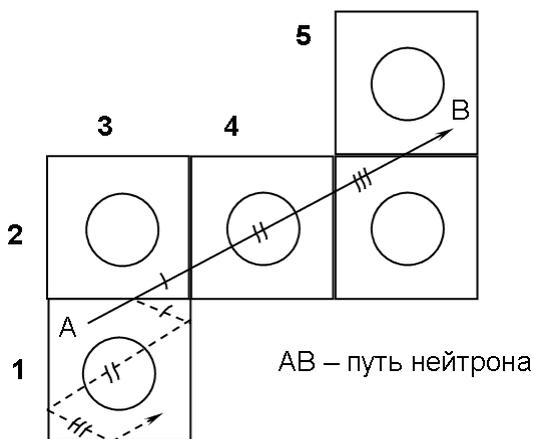


Рис. 6.5. Отображение в замкнутой ячейке пути нейтрона, пролетевшего в решетке без взаимодействия от точки  $A$  до точки  $B$

### 6.3. Эквивалентная ячейка

Как правило, в реакторах используются твэлы, длина которых много больше не только их поперечного размера, но и шага решетки, поэтому переход к бесконечно длинным ячейкам является достаточно хорошим приближением и позволяет рассматривать поток в ячейке как функцию двух переменных. Если толщина замедлителя значительно превышает длину свободного пробега нейтронов, то реальную ячейку можно заменить равной ей по площади (эквивалентной) цилиндрической одномерной ячейкой. Когда толщина замедлителя сравнима с длиной свободного пробега нейтронов, то распределение нейтронов в ячейке более чувствительно к форме границы ячейки. В этом случае сохранение условий зеркального отражения при переходе к эквивалентной ячейке может привести к искаженным результатам.

Опыт расчетов показывает, что погрешности могут быть снижены при использовании условия диффузного отражения (например, в форме равенства односторонних токов) на поверхности эквива-

лентной ячейки. Переход к эквивалентной ячейке позволяет сформулировать одномерную (по пространству) задачу расчета ячейки (рис. 6.6).

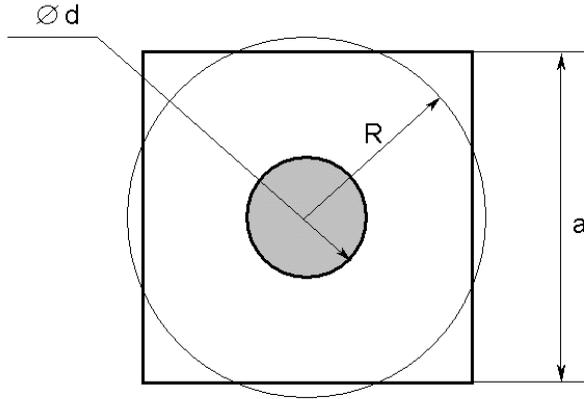


Рис. 6.6. Переход к эквивалентной ячейке

Рассмотрим произвольное макроскопическое сечение  $\Sigma$ , отвечающее определенному типу взаимодействия нейтронов в среде. В гетерогенной ячейке оно имеет не только энергетическую, но и пространственную зависимость:  $\Sigma = \Sigma(\vec{r}, E)$ . Поток нейтронов в ячейке будем описывать интегральной по угловой переменной функцией  $\Phi(\vec{r}, E)$ . Ячейку будем считать эффективно гомогенизированной, если ей можно сопоставить такое, не зависящее от пространственной переменной макросечение  $\bar{\Sigma}^{(яч)}(E)$ , для которого выполняется равенство:

$$\int_{V_{яч}} dV \cdot \Sigma(\vec{r}, E) \cdot \Phi(\vec{r}, E) = \bar{\Sigma}^{(яч)}(E) \cdot \bar{\Phi}_{яч}(E) \cdot V_{яч} . \quad (6.3.1)$$

Левая часть этого равенства представляет интегральную скорость столкновений нейтронов в ячейке, а правая – ее выражение через гомогенизированное макросечение и средний поток  $\bar{\Phi}_{яч}$  в ячейке.

Обычно средний поток нейтронов в ячейке определяют следующим образом:

$$\bar{\Phi}_{\text{яч}}(E) = \frac{1}{V_{\text{яч}}} \int_{V_{\text{яч}}} \Phi(\vec{r}, E) d\vec{r}. \quad (6.3.2)$$

Учитывая, что  $V_{\text{яч}}$  – объем ячейки, то  $\bar{\Phi}_{\text{яч}} \cdot V_{\text{яч}} = \Phi_{\text{яч}}(E)$  есть интегральный по ячейке поток нейтронов:  $\Phi_{\text{яч}}(E) = \int_{V_{\text{яч}}} \Phi(\vec{r}, E) d\vec{r}$ .

Очевидно, что равенство (6.3.1) превращается в тождество, если в качестве гомогенизированного сечения принять величину

$$\bar{\Sigma}^{(\text{яч})}(E) = \frac{\int dV \cdot \Sigma(\vec{r}, E) \cdot \Phi(\vec{r}, E)}{\int_{V_{\text{яч}}} dV \cdot \Phi(\vec{r}, E)}. \quad (6.3.3)$$

Если ячейка представляет собой совокупность гомогенных зон с объемами  $V_m$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ), то пространственная зависимость макросечений является кусочно-постоянной функцией и формула усреднения примет более простой вид:

$$\bar{\Sigma}_{\text{яч}}(E) = \frac{\sum_{m=1}^M \Sigma^{(m)}(E) \cdot \Phi^{V_m}(E)}{\sum_{m=1}^M \Phi^{V_m}(E)}, \quad (6.3.4)$$

где  $\Sigma^{(m)}(E)$  – макросечение в зоне с номером  $m$ , а  $\Phi^{V_m}(E)$  – интегральный поток нейтронов в этой зоне. Таким способом определяются гомогенизированные макросечения для любых процессов, таких, как рассеяния, поглощение и деление, обозначаемые, соответственно,  $\bar{\Sigma}_s^{\text{яч}}$ ,  $\bar{\Sigma}_a^{\text{яч}}$ ,  $\bar{\Sigma}_f^{\text{яч}}$ , а также  $\overline{v_f \Sigma_f^{\text{яч}}}(E)$ .

Если размер ячейки  $R$  существенно меньше длины свободного пробега нейтронов  $\lambda$ , то осцилляции потока нейтронов будут незначительными и можно пренебречь пространственной зависимостью потока нейтронов в ячейке  $\Phi(\vec{r}, E) = \Phi(E)$ . В этом случае бу-

дет иметь место равенство  $\Phi^{V_m}(E) = V_m \cdot \Phi(E)$ , и в результате формула для усреднения макроконстант примет вид:

$$\bar{\Sigma}^{\text{яч}} = \sum_{m=1}^M \Sigma^{(m)} \cdot \frac{V_m}{V_{\text{яч}}} = \sum_{m=1}^M \Sigma^{(m)} \cdot \varepsilon_m, \quad (6.3.5)$$

где  $\varepsilon_m$  – объемная доля  $m$ -й зоны ячейки. Такой способ усреднения применяется для гомогенной смеси всех компонентов ячейки. Соотношение (6.3.5) обычно используется для гомогенизации ячеек в жесткой части спектра для реакторов на быстрых нейтронах, где микросечения различных процессов относительно невелики.

Пусть бесконечная гетерогенная среда представлена решеткой, ячейки которой имеют зонную структуру. Коэффициент размножения нейтронов  $K_{\infty}^{\text{гер}}$  в такой среде определяется формулой:

$$K_{\infty}^{\text{гер}} = \frac{\sum_{m=1}^M \int dE \cdot v_f \Sigma_f^{(m)}(E) \cdot \Phi^{V_m}(E)}{\int dE \cdot \Sigma_a^{(m)}(E) \cdot \Phi^{V_m}(E)}. \quad (6.3.6)$$

Числитель формулы (6.3.6) представляет скорость генерации нейтронов деления в ячейке, а знаменатель – скорость поглощения нейтронов в ячейке.

Принимая во внимание формулы для гомогенизированных макроконстант в ячейке, выражение (6.3.6) можно представить в следующем виде:

$$K_{\infty}^{\text{гер}} = \frac{\int dE \cdot \overline{v_f \Sigma_f^{\text{яч}}}(E) \cdot \Phi^{\text{яч}}(E)}{\int dE \cdot \bar{\Sigma}_a^{\text{яч}}(E) \cdot \Phi^{\text{яч}}(E)}. \quad (6.3.7)$$

При групповом описании нейтронного поля рассматриваются групповые потоки  $\Phi_g = \int_{\Delta E_g} dE \cdot \Phi(E)$ ;  $g = 1, 2, \dots$  В многогруппо-

вом диффузионном приближении коэффициент размножения для гетерогенной среды имеет вид

$$K_{\infty}^{\text{гет}} = \frac{\sum_m \sum_g (v_f \Sigma_f)_g^{(m)} \cdot \Phi_g^{V_m}}{\sum_m \sum_g (\Sigma_a)_g^{(m)} \cdot \Phi_g^{V_m}}. \quad (6.3.8)$$

Итак, расчет гомогенизированных макрохарактеристик среды и коэффициента размножения бесконечной периодической решетки  $K_{\infty}^{\text{гет}}$  сводится к задаче определения интегральных по зонам ячейки потоков нейтронов.

#### ***6.4. Физические особенности гетерогенного расположения топлива и замедлителя***

В гетерогенных реакторах замедление нейтронов пространственно отделено от процесса поглощения, поскольку нейтроны теряют свою энергию в замедлителе, а поглощаются в основном в топливе. Это приводит к пространственной неоднородности распределения потока нейтронов в различных компонентах элементарной ячейки реактора. Влияние распределения потока нейтронов по ячейке на параметры размножения (так называемая физическая гетерогенность) зависит от энергии нейтронов. Элементарная ячейка, физически гетерогенная для одной области энергий нейтронов (например, тепловой), может быть практически гомогенной для нейтронов другой области энергий (например, для нейтронов спектра деления). Рассмотрим на качественном уровне влияние гетерогенности на размножающие свойства бесконечной гетерогенной среды (так называемые эффекты гетерогенности) и начнем это рассмотрение с области энергий быстрых нейтронов.

Каждой элементарной ячейке с гетерогенным расположением топлива и остальных компонентов ячейки сопоставим ячейку тех же размеров, но с гомогенной смесью всех компонентов исходной ячейки. Очевидно, что для гомогенной ячейки с условиями отражения на границе поток нейтронов всех энергий будет постоянным по всей ячейке. В гетерогенной ячейке поток нейтронов всех энергий существенно зависит от пространственной переменной. В принципе, при выводе формулы четырех сомножителей нигде не использовался факт гомогенного расположения топлива и разбавителя в размножающей среде. Поэтому коэффициент размножения в

ячейке также можно представить в виде произведения четырех сомножителей, как это было сделано для гомогенной размножающей среды.

В тесных решетках средняя длина пробега нейтронов до столкновения с ядрами среды, энергия которых выше порога деления  $^{238}\text{U}$ , существенно больше характерных размеров неоднородностей в ячейке. Поэтому поток нейтронов, практически не зависит от координат и для этих решеток коэффициент размножения на быстрых нейтронах практически не отличается от его значения для гомогенной среды, полученной при гомогенном размешивании всех компонентов элементарной ячейки. Однако для широких решеток поток этих нейтронов в блоке существенно выше, чем в замедлителе, поэтому коэффициент размножения на быстрых нейтронах в гетерогенной среде будет больше, чем в эквивалентной ей гомогенной среде (рис. 6.7).

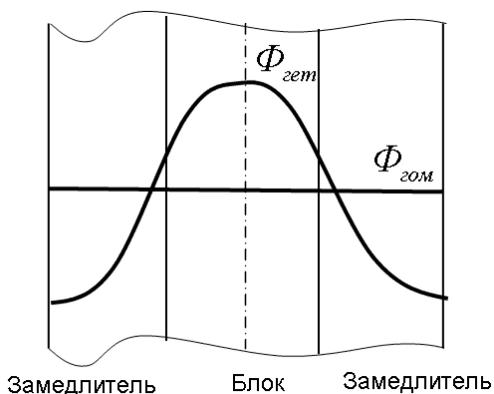


Рис. 6.7. Иллюстрация к выводу о том, что поток быстрых нейтронов в блоке в гетерогенной среде выше, чем в гомогенной среде

Нейтроны резонансных энергий, как и тепловые нейтроны, имеют принципиально другую форму пространственного распределения. Нейтроны резонансных энергий, попавшие в блок, поглощаются в тонком поверхностном слое блока. Во внутренних слоях уранового блока поток нейтронов этих энергий близок к нулю. Значительная экранировка ядер урана, расположенных во внутрен-

них слоях блока, приводит к тому, что они практически не участвуют в процессе поглощении резонансных нейтронов. Поэтому эффективный резонансный интеграл для гетерогенного случая существенно меньше, чем для соответствующей однородной среды. В результате вероятность избежать резонансного поглощения нейтронов в гетерогенной среде существенно выше, чем в однородной среде. Различие в потоке резонансных нейтронов для однородной и гетерогенной среды показаны на рис. 6.8.

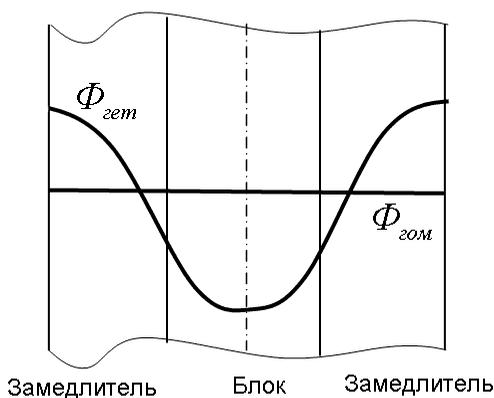


Рис. 6.8. Распределение потока резонансных нейтронов в гетерогенной и однородной ячейках

В реакторах на тепловых нейтронах 80–90% процессов поглощения нейтронов происходит в области энергий тепловых нейтронов, а с точки зрения пространственного распределения, в основном, поглощение нейтронов происходит в топливе. Вследствие этого возникает градиент потока тепловых нейтронов, направленный в сторону блока. Превышение среднего потока тепловых нейтронов в замедлителе над средним потоком тех же нейтронов в блоке приводит к уменьшению суммарного поглощения нейтронов в блоке, то есть в топливе, и, как следствие, к уменьшению величины коэффициента использования тепловых нейтронов. Различие в потоке тепловых нейтронов для однородной и гетерогенной сред аналогично различию резонансных нейтронов (рис. 6.8).

Превышение величины  $\varphi$  – вероятности избежать резонансного поглощения нейтронов в гетерогенной среде – оказывается более значительным, чем снижение коэффициента использования тепловых нейтронов  $\theta$ , так что в итоге коэффициент размножения нейтронов в гетерогенной среде оказывается несколько выше, чем в гомогенной. Именно по этой причине гомогенная смесь из природного урана и графита оказывается подкритической при любом соотношении ядер урана и графита, а в гетерогенной среде из тех же материалов можно подобрать оптимальное соотношение размеров топлива (урана) и замедлителя (графита), при котором гетерогенная среда будет надкритической.

В дальнейшем более подробно будет рассмотрен каждый из слабых формулы четырех сомножителей в гетерогенной среде. При анализе гетерогенных сред широко используется метод вероятностей первых столкновений, с помощью которого существенно упрощается вычисление интегральных потоков нейтронов в различных зонах ячейки.

## Глава 7 МЕТОД ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРВЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

### *7.1. Интегральное описание свободно летящих нейтронов*

При анализе влияния гетерогенных эффектов на отдельные сомножители коэффициента размножения необходимо учитывать пространственное распределение нейтронов в различных зонах элементарной ячейки, относящиеся к определенным энергетическим интервалам. Так, например, при рассмотрении коэффициента размножения на быстрых нейтронах главную роль играют нейтроны, энергия которых выше порога деления, а при анализе вероятности избежать резонансного поглощения – нейтроны резонансных энергий. Поэтому большое внимание уделяется поведению нейтронов с определенной энергией, так называемым, свободнолетающим нейтронам. Изменение энергии нейтронов происходит только в результате актов взаимодействия (столкновения) нейтронов с ядрами среды и большое значение имеет то, где произойдет первое столкновение нейтрона с ядром – в той же зоне, где он родился, или в другой. Действительно, если нейтрон, энергия которого выше порога деления  $^{238}\text{U}$  испытает первое столкновение с ядрами замедлителя, то его энергия в результате столкновения, как правило, будет ниже порога деления и он уже не сможет вызвать деление ядер  $^{238}\text{U}$ . Именно поэтому мы будем изучать пространственное распределение свободно летящих нейтронов в элементарной ячейке, с помощью которого можно получить простые выражения для вероятностей первых столкновений в различных зонах ячейки.

Поставим задачу – рассчитать пространственно-угловое распределение свободно летящих нейтронов в некотором гомогенном объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$  (рис. 7.1).

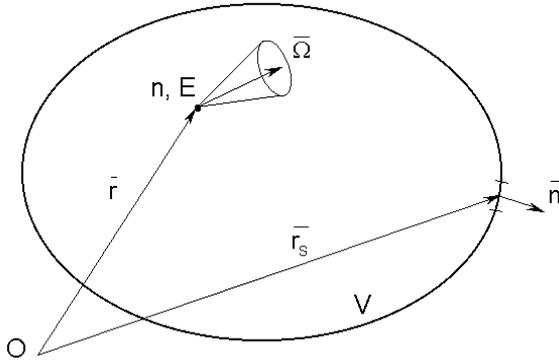


Рис. 7.1. Объем  $V$  с поверхностью  $S$ :

$\vec{n}$  – внешняя нормаль в точке  $\vec{r}_s$ ;  $\vec{\Omega}$  – направление движения нейтрона в точке  $\vec{r}$

Пусть внутри объема  $V$  имеются распределенные источники нейтронов  $q^V(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ , которые связаны как с нейтронами деления, так и с замедляющимися нейтронами. Если энергия рассматриваемых нейтронов  $E$  попадает в интервал спектра деления, то источник деления трактуется следующим образом: в точке объема  $V$  с координатой  $\vec{r}$  произошел акт деления, в результате которого в этой точке появился нейтрон с энергией  $E$  и направлением движения  $\vec{\Omega}$ . В качестве источников  $q^V(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  наряду с нейтронами деления необходимо учитывать и нейтроны, которые в результате рассеяния с энергией  $E' > E$  в точке  $\vec{r}$  приобретут энергию  $E$  и направление движения  $\vec{\Omega}$ . Кроме того, в выделенный объем извне могут влетать нейтроны с данной энергией, и они описываются поверхностным источником  $q^S(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega})$ .

Поток свободно летящих нейтронов в объеме  $V$  подчиняется газокинетическому уравнению и краевым условиям:

$$\vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma_t(E) \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = q^V(\vec{r}, E, \vec{\Omega}), \quad (7.1.1)$$

$$\left| \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \right| \Phi(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega}) = q^{(S)}(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega}), \quad (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0. \quad (7.1.2)$$

Газокинетическое уравнение в стационарных задачах представляет собой баланс скоростей процессов, происходящих со свободно летящими нейтронами, в единичном объеме, в единичном интервале энергий и телесного угла, около некоторых значений  $(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ . Левая часть уравнения (7.1.1) определяет скорость убыли свободно летящих нейтронов за счет пространственного перемещения нейтронов (первый член) и столкновений нейтронов с ядрами среды (второй член левой части). Правая часть характеризует скорость генерации нейтронов объемным источником. Краевое условие (7.1.2) связывает поток нейтронов на поверхности  $S$  с поверхностным источником. В существовании такой связи можно убедиться, раскрыв физический смысл левой части равенства (7.1.2).

По физическому смыслу поверхностного источника, каждая единичная площадка поверхности  $S$  испускает  $q^{(S)}(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega})$  нейтронов энергии  $E$  с направлением полета  $\vec{\Omega}$ . Поэтому  $q^{(S)}(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega})$  можно представить как поток нейтронов через площадку  $dA$ , равную проекции единичной площадки поверхности  $S$  на плоскость, ориентированную нормально к вектору  $\vec{\Omega}$  в точке  $\vec{r}_S$ .

## 7.2. Задача с объемным и поверхностным источниками

Рассмотрим интегральное по пространственной и угловой переменным описание свободно летящих нейтронов в гомогенном объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ . Введем обозначения и определения для следующих величин:

$$\Phi^{(V)}(E) = \int_V dV \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \cdot \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) - \text{интегральный поток};$$

$$Q^{(V)}(E) = \int_V dV \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \cdot q^{(V)}(r, E, \vec{\Omega}) - \text{интегральный объемный источник};$$

точник;

$$Q^{(S)}(E) = - \oint_S dS \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0} d\vec{\Omega} \cdot q^{(S)}(r_S, E, \vec{\Omega}) - \text{интегральный поверхностный источник}.$$

Отметим, что интегрирование на всей сфере направлений движений нейтронов в формулах обозначено знаком  $4\pi$ . Интегрирова-

ние по угловой переменной ведется на полусфере направлений движения нейтронов, влетающих в объем  $V$  с поверхности  $S$ .

Рассмотрим также интегральные односторонние токи на поверхности  $S$ :

$$+J^{(S)}(E) = \oint_S dS \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} \cdot |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \Phi(r_S, E, \vec{\Omega}) - \text{интегральный одно-}$$

сторонний ток вылетающих из объема  $V$  нейтронов через поверхность  $S$ ;

$$-J^{(S)}(E) = \oint_S dS \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0} d\vec{\Omega} \cdot |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \Phi(r_S, E, \vec{\Omega}) - \text{интегральный одно-}$$

сторонний ток влетающих в объем  $V$  нейтронов с поверхности  $S$ .

Учитывая краевое условие (7.1.2), запишем соотношение  $(-)^J^{(S)}(E) = Q^{(S)}(E)$ , т.е. заданный поверхностный источник определяет односторонний ток втекающих в объем  $V$  нейтронов.

Зафиксируем некоторое значение энергии  $E$  и составим баланс скоростей процессов, происходящих со свободно летящими нейтронами с данной энергией во всем объеме  $V$  и для всех направлений полета  $\vec{\Omega}$ . В соответствии с введенным интегральным описанием свободно летящих нейтронов баланс процессов может быть представлен равенством (7.2.1):

$$(^+)J^S(E) + \Sigma(E) \cdot \Phi^V(E) = Q^V(E) + Q^S(E). \quad (7.2.1)$$

Левая часть этого равенства характеризует убыль нейтронов энергии  $E$  в объеме  $V$  за счет утечки за пределы выделенного объема и столкновений с ядрами среды, а правая – скорость появления таких нейтронов за счет объемных и поверхностных источников. Балансное соотношение (7.2.1) может быть получено, если проинтегрировать газокинетическое уравнение (7.1.1) в выделенном объеме  $V$  по пространственной и угловой переменным и при этом учесть краевое условие (7.1.2).

Пусть в рассматриваемом локальном объеме  $V$  (рис. 7.1) поле свободно летящих нейтронов с энергией  $E$  обусловлено единичным объемным источником  $Q^V(E) = 1$ ;  $Q^S(E) = 0$ . В условиях

действия таких источников запишем баланс (7.1.1) в следующей форме:

$$P(S \leftarrow V, E) + P_{\Sigma}(V \leftarrow V, E) = 1. \quad (7.2.2)$$

Первый член в правой части этого равенства определяет число свободно летящих нейтронов от единичного источника, вылетевших из объема  $V$  через поверхность  $S$ . Это число составляет только часть нейтронов источника, т.е. величину меньше единицы. Поэтому в условиях рассматриваемой задачи величина  $P(S \leftarrow V, E)$  трактуется как вероятность нейтрону, рожденному в объеме  $V$ , вылететь из него через поверхность  $S$ , не испытав столкновений с ядрами среды. Аналогичным образом раскрывается физический смысл второго члена в левой части равенства (7.2.2)  $P_{\Sigma}(V \leftarrow V, E)$  как вероятность нейтрону, рожденному в объеме  $V$ , испытать в нем первое столкновение.

Рассмотрим другой случай, когда источником нейтронов в объеме служит только единичный поверхностный источник, т.е.  $Q^S(E) = 1$  и  $Q^V(E) = 0$ . В этом случае балансное соотношение (7.2.2) записывается следующим образом:

$$P^V(S \leftarrow S, E) + P_{\Sigma}(V \leftarrow S, E) = 1, \quad (7.2.3)$$

где локальные вероятности в соответствии с физическим смыслом членов левой части равенства определяются как  $P^V(S \leftarrow S, E)$  – вероятность нейтрону, рожденному на поверхности  $S$  объема  $V$ , вылететь из этого объема, не испытав столкновений с ядрами среды, заполняющей объем  $V$ , а  $P_{\Sigma}(V \leftarrow S, E)$  – это вероятность нейтрону, рожденному на поверхности  $S$  объема  $V$ , испытать в нем первое столкновение.

Итак, определены локальные вероятности и записаны соотношения баланса, которым они удовлетворяют. Однако для того чтобы получить значения введенных вероятностей, необходимо решить газокинетическое уравнение (7.1.1) с граничным условием (7.1.2), причем с источником, который представляет собой единичный источник в интегральном представлении. В дальнейшем будут

получены простые аналитические выражения для этих вероятностей при упрощенных представлениях потока нейтронов и источника.

Имея решение уравнения (7.2.1) для единичных источников в виде локальных вероятностей, можно через них выразить общее решение задачи для произвольных значений интенсивности источников как объемных, так и поверхностных. Рассмотрим вначале задачу с произвольным объемным источником:

$${}^{(+)}J^S(E) + \Sigma(E) \cdot \Phi^V(E) = Q^V(E). \quad (7.2.4)$$

Разделив обе части этого уравнения на интенсивность источника

$$\frac{{}^{(+)}J^S(E)}{Q^V(E)} + \frac{\Sigma(E) \cdot \Phi^V(E)}{Q^V(E)} = 1^V,$$

придем к задаче с единичным источником, решение которой известно. Следовательно,

$$\frac{{}^{(+)}J^S(E)}{Q^V(E)} = P(S \leftarrow V, E), \quad \frac{\Sigma(E) \cdot \Phi^V(E)}{Q^V(E)} = P_{\Sigma}(V \leftarrow V, E).$$

В результате будем иметь следующие соотношения:

$$\begin{aligned} {}^{(+)}J^S(E) &= P(S \leftarrow V, E) \cdot Q^V(E), \\ \Sigma(E) \cdot \Phi^V(E) &= P_{\Sigma}(V \leftarrow V, E) \cdot Q^V(E). \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Применяя аналогичную процедуру для задачи с произвольным поверхностным источником, получим два других соотношения:

$$\begin{aligned} {}^{(+)}J^S(E) &= P^V(S \leftarrow S, E) \cdot Q^S(E), \\ \Sigma(E) \cdot \Phi^V(E) &= P_{\Sigma}(V \leftarrow S, E) \cdot Q^S(E). \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Так как рассматриваемая задача является линейной, то в общем случае, когда действуют как объемные, так и поверхностные ис-

точники произвольной интенсивности, решение представляется в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых отвечает решению только для одного источника. В результате получим общие соотношения в виде:

$$\begin{aligned} {}^{(+)}J^S(E) &= P(S \leftarrow V, E) \cdot Q^V(E) + P^V(S \leftarrow S, E) \cdot Q^S(E), \\ \Sigma(E) \cdot \Phi^V(E) &= P_{\Sigma}(V \leftarrow V, E) \cdot Q^V(E) + P_{\Sigma}(V \leftarrow S, E) \cdot Q^S(E). \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

На практике обычно используются локальные вероятности, определенные для равномерных объемных и поверхностных источников. Единичный объемный источник называют равномерным, если он определен равенством:

$$q^{(V)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot V}. \quad (7.2.8)$$

Нетрудно убедиться, что интегральный источник будет при этом единичным ( $Q^V = 1$ ), т.к.  $\int_V dV = 1$ ;  $\int_{4\pi} d\vec{\Omega} = 4\pi$ . Единичный поверхностный источник будем называть равномерным, если он представлен следующим образом:

$$q^{(S)}(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) = \frac{|\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|}{\pi \cdot S}. \quad (7.2.9)$$

Для такого источника  $Q^S(E) = 1$ , т.к.  $\oint_S dS = S$ ,  $\int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| d\vec{\Omega} = \pi$ .

Локальные вероятности, определенные на равномерных источниках, подчиняются следующему соотношению взаимности:

$$P_{\Sigma}(V \leftarrow S, E) = \frac{4V}{S} \cdot \Sigma(E) \cdot P_{\Sigma}(S \leftarrow V, E). \quad (7.2.10)$$

### 7.3. Средняя хорда блока

Множитель  $\tilde{L}^V = \frac{4 \cdot V}{S}$  в выражении (7.2.10) имеет размерность длины и называется средней хордой объема  $V$ . Для определения средней хорды используют следующий формализм. Хордой  $L(\vec{r}_S, \vec{\Omega})$  называют отрезок пути, который проходит нейтрон, вошедший в пустой объем  $V$  из некоторой точки  $\vec{r}_S$  на поверхности  $S$ , по направлению  $\vec{\Omega}$  до пересечения с другой точкой поверхности  $S$ . Предполагается, что на поверхности объема  $V$  равномерно распределены источники нейтронов с равномерным угловым распределением. При этих условиях выражение для средней хорды  $\tilde{L}^V$  объема  $V$  имеет следующий вид:

$$\tilde{L}^V = \frac{\oint_S dS \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0} d\vec{\Omega} \cdot |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \cdot L(\vec{r}_S, \vec{\Omega})}{\oint_S dS \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0} d\vec{\Omega} \cdot |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|}. \quad (7.3.1)$$

В выражении (7.3.1) плотность вероятности распределения хорд  $L(\vec{r}_S, \vec{\Omega})$  по длине принимается равной величине  $|\vec{\Omega} \times \vec{n}|$ , где  $\vec{n}$  есть вектор нормали к поверхности  $S$  в точке  $\vec{r}_S$ , и интегрирование производится по всем направлениям полета нейтронов  $\vec{\Omega}$ , влетающих в объем  $V$ . Средние хорды для некоторых простейших по форме объемов приведены в табл. 3.

Таблица 7.1

Средние хорды для некоторых простейших объемов

Форма объема	Средняя хорда
Бесконечно протяженная пластина толщиной $h$	$2h$
Бесконечно длинный цилиндр радиуса $R$	$2R$
Сферический объем радиуса $R$	$4/3 R$

#### 7.4. Локальные вероятности в приближении плоского потока (рациональное приближение)

Точный расчет локальных вероятностей (ЛВ) осуществляется с помощью решений уравнения (7.1.1) в условиях действия равномерных единичных объемных и поверхностных источников. Рассмотрим приближенные формулы для ЛВ. Их вид совпадает с формулами, впервые полученные Вигнером, которые называются рациональным приближением. В дальнейшем будем рассматривать поток свободно летящих нейтронов, имеющих энергию  $E$ , усредненный по объему и всем направлениям движения в форме среднего по объему  $V$  и по всем направлениям полета нейтронов  $\bar{\Omega}$ :

$$\Phi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) \cong \frac{\Phi^V(E)}{4 \cdot \pi \cdot V}, \quad (7.4.1)$$

где  $\Phi^V(E)$  – интегральный поток. Поток нейтронов называют плоским, если он не зависит от пространственной и угловой переменной. Рассмотрим плоский поток нейтронов  $\Phi^V$  в объеме  $V$ , который появляется в результате действия только единичного объемного источника  $Q^V = 1$ ,  $Q^S = 0$ . Для этого случая локальные вероятности можно представить в аналитической форме:

$$P_{\Sigma}(V \leftarrow V, E) = \frac{1}{4\pi V} \int_V dV \int_{4\pi} d\bar{\Omega} \cdot \Sigma(E) \cdot \Phi^V(E) = \Sigma(E) \cdot \Phi^V(E),$$

$$P(S \leftarrow V, E) = \int_S dS \int_{(\bar{\Omega} \cdot \bar{n}) > 0} d\bar{\Omega} \cdot |\bar{\Omega} \cdot \bar{n}| \cdot \frac{\Phi^V(E)}{4\pi V} = \frac{S}{4V} \cdot \Phi^V(E), \quad (7.4.2)$$

Амплитудное значение потока  $\Phi^V(E)$  определим из балансных соотношений:

$$\frac{S}{4V} \cdot \Phi^V(E) + \Sigma(E) \cdot \Phi^V(E) = 1, \quad \Phi^V(E) = \frac{4V}{S} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4V}{S} \cdot \Sigma(E)}. \quad (7.4.3)$$

Таким образом, для локальных вероятностей в задаче с объемным источником получаем следующие простейшие формулы:

$$\begin{aligned} P(S \leftarrow V, E) &= \frac{1}{1 + \tilde{L}^V \cdot \Sigma(E)}, \\ P_{\Sigma}(V \leftarrow V, E) &= \frac{\tilde{L}^V \cdot \Sigma(E)}{1 + \tilde{L}^V \cdot \Sigma(E)}. \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

где  $\tilde{L}^V$  – средняя хорда объема.

Ничего принципиально не изменится в случае, когда имеется плоский единичный поверхностный источник  $Q^V = 0$ ,  $Q^S = 1$ . Проводя те же рассуждения, что и в предыдущем случае, приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} P^V(S \leftarrow S, E) &= \frac{1}{1 + \tilde{L}^V \cdot \Sigma(E)}, \\ P_{\Sigma}(V \leftarrow S, E) &= \frac{\tilde{L}^V \cdot \Sigma(E)}{1 + \tilde{L}^V \cdot \Sigma(E)}. \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

Отметим, что полученные вероятности удовлетворяют так называемому соотношению взаимности:

$$P_{\Sigma}(V \leftarrow S, E) = \tilde{L}^V \cdot \Sigma(E) \cdot P(S \leftarrow V, E). \quad (7.4.6)$$

Условие (7.4.6) отражает следующий факт. Вероятность того, что нейтрон, летящий из точки А по направлению АВ, долетит до точки В без столкновения на пути АВ, равна вероятности того, что нейтрон из точки А, летящий по направлению ВА, долетит до точки А без столкновений.

Величину  $\tilde{L}^V \cdot \Sigma(E) \equiv \frac{\tilde{L}^V}{\lambda(E)}$  называют оптической толщиной

объема  $V$  для нейтронов энергии  $E$ , т.к. она является средней хордой, измеренной в длинах свободного пробега нейтронов. Обь-

ем, для которого  $\tilde{L}^V \cdot \Sigma(E) = 0$ , называют абсолютно прозрачным телом. Для такого тела вероятности столкновений равны нулю, а вероятности вылета без столкновений – единице. Обратная картина наблюдается, когда  $\tilde{L}^V \cdot \Sigma(E) = \infty$ . В этом случае объем  $V$  называют абсолютно черным телом, т.к. вероятности вылета равны нулю, а вероятности столкновений – единице.

Нетрудно убедиться, что приведенные выше вероятности (7.4.4) и (7.4.5) имеют правильные предельные значения для прозрачных и черных тел и их можно использовать при качественном анализе эффектов гетерогенности. Однако для конечных значений оптических длин формулы рационального приближения определяют локальные вероятности с некоторой погрешностью, которая имеет тенденцию роста при уменьшении оптической толщины и может достигать величины  $\sim 50\%$  при  $\tilde{L}^V \cdot \Sigma(E) \approx 0.2$ . Более равномерную погрешность в широком диапазоне изменения оптической длины дает следующая формула расчета вероятности первого столкновения:

$$P_{\Sigma}(V \leftarrow V, E) = \frac{\tilde{L}^V \cdot \Sigma(E)}{a + \tilde{L}^V \cdot \Sigma(E)}, \quad (7.4.7)$$

где параметр  $a$  (поправка Белла) зависит от формы тела и оптической длины. Так, например, если для цилиндрического блока принять

$$a = 1.5 \quad \text{при} \quad \tilde{L}^V \cdot \Sigma(E) \leq 2,$$

$$a = 1.16 \quad \text{при} \quad \tilde{L}^V \cdot \Sigma(E) > 2,$$

то во всем диапазоне изменения оптических длин, погрешность расчета локальных вероятностей не будет превышать 5%. Тем не менее расчет локальных вероятностей по формулам (7.4.4) и (7.4.5) позволяет осуществлять количественные оценки гетерогенных эффектов.

### 7.5. Вероятностные уравнения в двухзонной ячейке

Здесь и в дальнейшем будем рассматривать двухзонную замкнутую ячейку, состоящую из блока и замедлителя (рис. 7.2). Локальные вероятности в блоке определяются по формулам, полученным для локального объема  $V$  с учетом замены:

$$\Sigma \rightarrow \Sigma_{\text{бл}}, \quad \tilde{L}^V \rightarrow \tilde{L}^{\text{бл}} = \frac{4V_{\text{бл}}}{S}.$$

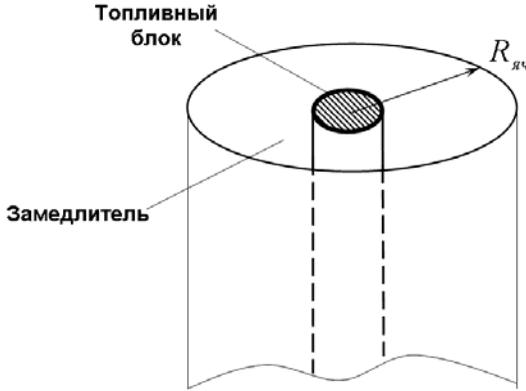


Рис. 7.2. Двухзонная ячейка

Рассмотрим теперь возможность использования формул рационального приближения для локальных объемов в замедлителе замкнутой ячейки. С этой целью составим интегральный баланс в замедлителе с учетом границы  $S_{\text{яч}}$ :

$$\begin{aligned} & {}^{(-)}J^S(E) + {}^{(+)}J^{S_{\text{яч}}}(E) + \Sigma^{\text{зам}}(E) \cdot \Phi^{\text{зам}}(E) = \\ & = Q^{\text{зам}}(E) + Q^S(E) + {}^{(-)}J^{S_{\text{яч}}}. \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

Используя условие отражения тока  ${}^{(+)}J^{S_{\text{яч}}}(E) = {}^{(-)}J^{S_{\text{яч}}}(E)$ , приходим к интегральному балансу, аналогичному балансу в локальном объеме:

$${}^{(-)}J^S(E) + \Sigma^{\text{зам}}(E) \cdot \Phi^{\text{зам}}(E) = Q^{\text{зам}}(E) + Q^S(E). \quad (7.5.2)$$

Отсюда следует, что локальные вероятности в замедлителе в рамках рационального приближения будут определяться по формулам локального объема с учетом замены  $\Sigma \rightarrow \Sigma^{\text{зам}}$ ;  $\tilde{L}^V \rightarrow \tilde{L}^{\text{зам}} = \frac{4V_{\text{зам}}}{S}$ .

Таким образом, при расчете локальных вероятностей для зоны замедлителя не учитывается поверхность, связанная с границей ячейки, так как на этой границе имеет место условие отражения. Именно поэтому средняя хорда для зоны замедлителя будет больше толщины зоны, поскольку средний путь учитывает отражение от границы.

Итак, получены выражения для локальных вероятностей в каждой из зон элементарной ячейки. Однако в тесных решетках нейтрон с данной энергией, рожденный в блоке и вылетавший из него без соударения, имеет вероятность пролететь зону замедлителя также без соударений, попасть в соседний блок и там испытать первое столкновение. Наша цель – получить выражения для вероятностей первых столкновений в блоке и замедлителе с учетом возможности вылета нейтронов из ячейки, где он родился, в ячейку, где он испытал свое первое столкновение.

Для этого запишем выражения баланса нейтронов в блоке и замедлителе соответственно. Для блока эти выражения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \Sigma^{\text{бл}}(E) \cdot \Phi^{\text{бл}}(E) = P_{\Sigma}(V_{\text{бл}} \leftarrow V_{\text{бл}}, E) \cdot Q^{\text{бл}}(E) + \\ + P_{\Sigma}(V_{\text{бл}} \leftarrow S, E) \cdot {}^{(-)}J^S(E), \\ {}^{(+)}J^S(E) = P(S \leftarrow V_{\text{бл}}, E) \cdot Q^{\text{бл}}(E) + P^{\text{бл}}(S \leftarrow S, E) \cdot {}^{(-)}J^S(E). \end{cases} \quad (7.5.3)$$

Левая часть первого уравнения в системе (7.5.3) представляет скорость столкновений нейтронов в блоке, рожденных объемными и поверхностными источниками, а правая часть – сумму скоростей столкновений нейтронов, рожденных каждым из источников в отдельности. При этом поверхностный источник для блока определя-

ется односторонним током из замедлителя в блок. Во втором уравнении его левая часть характеризует полную утечку нейтронов из блока, которые были порождены как объемными, так и поверхностными источниками в блоке. Правая часть этого уравнения содержит составляющие этой утечки, а именно вытекающие нейтроны каждого из источников в отдельности. Отметим, что в качестве поверхностного источника здесь рассматривается односторонний ток  $(^-)J^S(E)$  для нейтронов, летящих в блок из замедлителя.

Аналогичным образом записываются вероятностные уравнения в замедлителе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma^{\text{зам}}(E)\Phi^{\text{зам}}(E) = P_{\Sigma}(V_{\text{зам}} \leftarrow V_{\text{зам}}, E)Q^{\text{зам}}(E) + \\ + P_{\Sigma}(V_{\text{зам}} \leftarrow S, E)(^+)J^S(E), \\ (^-)J^S(E) = P(S \leftarrow V_{\text{зам}}, E) \cdot Q^{\text{зам}}(E) + P^{\text{зам}}(S \leftarrow S, E) \cdot (^+)J^S(E). \end{array} \right. \quad (7.5.4)$$

Отметим, что роль поверхностных источников в замедлителе играют односторонние токи нейтронов, летящих из блока в замедлитель.

В уравнениях для двухзонной ячейки (7.5.3) и (7.5.4) поверхностные источники не являются независимыми, т.к. по существу описывают перетечку нейтронов между зонами, которые появились в результате действия объемных источников в блоке и замедлителе. Если формально исключить из полученных выше уравнений односторонние токи, то получим другую форму записи балансных соотношений (ЛВ-уравнений):

$$\begin{aligned} \Sigma^{\text{бл}}(E)\Phi^{\text{бл}}(E) &= P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ}, E)Q^{\text{бл}}(E) + \\ &+ P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{ЗАМ}, E)Q^{\text{зам}}(E), \\ \Sigma^{\text{зам}}(E)\Phi^{\text{зам}}(E) &= P_{\Sigma}(\text{ЗАМ} \leftarrow \text{БЛ}, E)Q^{\text{бл}}(E) + \\ &+ P_{\Sigma}(\text{ЗАМ} \leftarrow \text{ЗАМ}, E)Q^{\text{зам}}(E). \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

В уравнениях (7.5.5) введены следующие обозначения:

$P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ}, E)$  – вероятность того, что нейтрон, рожденный в каком-либо блоке бесконечной решетки из двухзонных ячеек, ис-

пытает свое первое столкновение в каком-либо блоке решетки, не обязательно в том же самом;

$P_{\Sigma}(\text{ЗАМ} \leftarrow \text{БЛ}, E)$  – вероятность того, что нейтрон, рожденный в каком-либо блоке бесконечной решетки из двухзонных ячеек, испытает свое первое столкновение в зоне замедлителя какой-либо ячейки решетки, не обязательно в той же самой ячейке;

Аналогичный смысл имеют величины,  $P_{\Sigma}(\text{ЗАМ} \leftarrow \text{ЗАМ}, E)$ ,  $P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{ЗАМ}, E)$ . Выражения для этих вероятностей имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ}, E) &= P_{\Sigma}(V_{\text{бл}} \leftarrow V_{\text{бл}}, E) + \\
 &+ \frac{P_{\Sigma}(V_{\text{бл}} \leftarrow S, E) \cdot P^{3\text{ЗАМ}}(S \leftarrow S, E) \cdot P(S \leftarrow V_{\text{бл}}, E)}{1 - P^{3\text{ЗАМ}}(S \leftarrow S, E) \cdot P^{\text{бл}}(S \leftarrow S, E)}, \\
 P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{ЗАМ}, E) &= \frac{P_{\Sigma}(V_{\text{бл}} \leftarrow S, E) \cdot P(S \leftarrow V_{\text{зам}}, E)}{1 - P^{3\text{ЗАМ}}(S \leftarrow S, E) \cdot P^{\text{бл}}(S \leftarrow S, E)}, \\
 P_{\Sigma}(\text{ЗАМ} \leftarrow \text{ЗАМ}, E) &= P_{\Sigma}(V_{\text{зам}} \leftarrow V_{\text{зам}}, E) + \\
 &+ \frac{P_{\Sigma}(V_{\text{зам}} \leftarrow S, E) \cdot P^{\text{бл}}(S \leftarrow S, E) \cdot P(S \leftarrow V_{\text{зам}}, E)}{1 - P^{3\text{ЗАМ}}(S \leftarrow S, E) \cdot P^{\text{бл}}(S \leftarrow S, E)}, \\
 P_{\Sigma}(\text{ЗАМ} \leftarrow \text{БЛ}, E) &= \frac{P_{\Sigma}(V_{\text{зам}} \leftarrow S, E) \cdot P(S \leftarrow V_{\text{бл}}, E)}{1 - P^{3\text{ЗАМ}}(S \leftarrow S, E) \cdot P^{\text{бл}}(S \leftarrow S, E)}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим физический смысл факторов  $P_{\Sigma}$ . Прежде всего отметим, что написанные уравнения отражают принцип суперпозиции объемных источников в замкнутой ячейке: поток нейтронов в любой зоне ячейки равен сумме потоков нейтронов, каждый из которых определяется источником нейтронов в одной из зон ячейки, то есть в блоке и замедлителе независимо друг от друга.

Оставаясь в рамках замкнутой ячейки, величина  $P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ})$  определяет вероятность нейтрону, рожденному в блоке замкнутой ячейки, испытать в нем первое столкновение с учетом возможного вылета свободно летящего нейтрона из блока и возвращения в него после любого числа отражений от границы ячейки. Иными словами,  $P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ})$  – это вероятность нейтрону, образовавшемуся в некотором блоке бесконечно протяженной решетки, испытать первое столкновение в любом блоке этой решетки (не только в том же

блоке, где нейтрон родился). В этом заключается принципиальное отличие  $P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ})$  от локальной вероятности  $P_{\Sigma}(V_{\text{бл}} \leftarrow V_{\text{бл}}, E)$ .

Аналогичным образом определяется вероятность  $P_{\Sigma}(\text{ЗАМ} \leftarrow \text{ЗАМ})$  нейтрону, рожденному в замедлителе, испытать первое столкновение в зоне замедлителя любой ячейки решетки. Фактор  $P_{\Sigma}(\text{ЗАМ} \leftarrow \text{БЛ})$  – это вероятность нейтрону, образовавшемуся в блоке, испытать первое столкновение в замедлителе любой ячейки решетки, а фактор  $P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{ЗАМ})$  характеризует вероятность первого столкновения в любом блоке решетки нейтронов, рожденных в замедлителе.

Рассмотренные вероятности учитывают возможность перелета нейтронов на любые расстояния от места его рождения до столкновения с ядрами среды, и обычно называются вероятностями первых столкновений (ВПС).

На примере вероятности  $P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ})$  рассмотрим другой подход к ее вычислению, проследив за судьбой  $Q^{\text{бл}}$  нейтронов, родившихся в некотором блоке решетки. Полное число нейтронов источника  $Q^{\text{бл}}$ , испытавших первое столкновение в блоках решетки, равно  $P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ}) \cdot Q^{\text{бл}}$ . С другой стороны, это число можно представить следующей суммой:

$$\begin{aligned}
 P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ}) \cdot Q^{\text{бл}} &= P_{\Sigma}(V_{\text{бл}} \leftarrow V_{\text{бл}}) \cdot Q^{\text{бл}} + \\
 &+ P_{\Sigma}(V_{\text{бл}} \leftarrow S) \cdot P^{\text{зам}}(S \leftarrow S) \cdot P(S \leftarrow V_{\text{бл}}) \cdot Q^{\text{бл}} + \\
 &+ P_{\Sigma}(V_{\text{бл}} \leftarrow S) \cdot P^{\text{зам}}(S \leftarrow S) \cdot P^{\text{бл}}(S \leftarrow S) \times \\
 &\times P^{\text{зам}}(S \leftarrow S) \cdot P(S \leftarrow V_{\text{бл}}) \cdot Q^{\text{бл}}.
 \end{aligned} \tag{7.5.6}$$

Первое слагаемое в этой сумме относится к тем нейтронам, которые испытывают первое столкновение в том же блоке, где они родились. Второе слагаемое – это нейтроны источника, которые вылетают без столкновений в замедлитель  $P(S \leftarrow V_{\text{бл}}) \cdot Q^{\text{бл}}$ , пролетают через него  $P^{\text{зам}}(S \leftarrow S)$  и, вновь попадая в блок, испытывают в нем первое столкновение  $P_{\Sigma}(V_{\text{бл}} \leftarrow S)$ . Третье и последующие слагаемые определяют столкновения в блоке нейтронов после двух и более кратного прохождения замедлителя. Все слагаемые, кроме

первого, образуют геометрическую прогрессию. Вероятности первых столкновений удовлетворяют в замкнутой ячейке следующим балансным соотношениям:

$$\begin{aligned} P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ}) + P_{\Sigma}(\text{ЗАМ} \leftarrow \text{БЛ}) &= 1, \\ P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{ЗАМ}) + P_{\Sigma}(\text{ЗАМ} \leftarrow \text{ЗАМ}) &= 1. \end{aligned} \quad (7.5.7)$$

Выполняется также соотношение взаимности:

$$P_{\Sigma}(\text{ЗАМ} \leftarrow \text{БЛ}) \cdot \Sigma^{\text{бл}} \cdot V_{\text{бл}} = P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{ЗАМ}) \cdot \Sigma^{\text{зам}} \cdot V_{\text{зам}}. \quad (7.5.8)$$

Допустим, что локальные вероятности определяются формулами рационального приближения. Тогда, подставляя соответствующие локальные вероятности в полученную выше формулу, приходим к равенству:

$$\begin{aligned} P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ}) &= \Sigma^{\text{бл}} \cdot \bar{L}^{\text{бл}} \cdot \omega^{\text{бл}} + \\ &+ \frac{\Sigma^{\text{бл}} \cdot \bar{L}^{\text{бл}} \cdot C^{\text{зам}} \cdot (\omega^{\text{бл}})^2}{1 - C^{\text{зам}} \cdot \omega^{\text{бл}}}, \end{aligned} \quad (7.5.9)$$

где  $C^{\text{зам}} = P^{\text{зам}}(S \leftarrow S)$ ,  $\omega^{\text{бл}} = \frac{1}{1 + \bar{L}^{\text{бл}} \cdot \Sigma^{\text{бл}}}$ .

После простых преобразований получаем

$$P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ}) = \frac{\Sigma^{\text{бл}}}{\frac{1 - C^{\text{зам}}}{\bar{L}^{\text{бл}}} + \Sigma^{\text{бл}}}. \quad (7.5.10)$$

Формулы (7.5.9) и (7.5.10) правильно отражают предельные переходы к широким и тесным решеткам. Так, при условии  $C^{\text{зам}} \ll 1$  (широкая решетка) нейтроны испытывают первое столкновение в том же блоке, где они родились, т.к. не могут пройти без столкновений до соседних блоков. В этом случае  $P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ}) = P_{\Sigma}(V_{\text{бл}} \leftarrow V_{\text{бл}}, E)$ . Для тесных решеток  $C^{\text{зам}} \rightarrow 0$  и  $P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ}) = 1$ .

## Глава 8

### ФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ГЕТЕРОГЕННЫХ РАЗМНОЖАЮЩИХ СРЕД С ТЕПЛОВЫМ СПЕКТРОМ НЕЙТРОНОВ

#### *8.1. Коэффициент размножения на быстрых нейтронах в тесной и широкой решетках*

Ранее, при рассмотрении влияния гетерогенного расположения топлива и замедлителя было показано, что  $\mu_{\text{гет}} > \mu_{\text{гом}}$ . Теперь рассмотрим подходы к вычислению коэффициента размножения на быстрых нейтронах в двухзонной замкнутой ячейке, используя введенное ранее понятие вероятности первых столкновений.

Во всех реакторах, в том числе и в реакторах на тепловых нейтронах, происходит процесс деления ядер, вызванный нейтронами, энергия которых выше тепловой области, так называемое надтепловое деление ядер. Различают два типа надтеплового деления ядер – резонансное и на быстрых нейтронах. Здесь будет рассмотрен только случай деления нейтронами с энергией  $E$  выше порога деления сырьевых нуклидов  $^{238}\text{U}$  ( $E_{\text{пр}}=1.4$  МэВ) и  $^{232}\text{Th}$  ( $E_{\text{пр}}=1.2$  МэВ). При небольших обогащениях топлива, характерных для реакторов на тепловых нейтронах, делением ядер  $^{235}\text{U}$  быстрыми нейтронами можно пренебречь. Тогда коэффициент размножения на быстрых нейтронах в гетерогенной среде можно представить в виде:

$$\mu_{\text{гет}} = 1 + \frac{\int_{V_{\text{бл}}} dV \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} \left[ v_f^8(E) \cdot \Sigma_f^8(E) - \Sigma_a^8(E) \right] \cdot \Phi(\vec{r}, E) dE}{\int_{V_{\text{бл}}} dV \int_0^{E_{\text{гр}}} v_f^5(E) \cdot \Sigma_f^5(E) \cdot \Phi(\vec{r}, E) dE}. \quad (8.1.1)$$

где  $V_{\text{бл}}$  – объем топливного блока. Обозначим через  $\chi$  - долю нейтронов спектра деления, энергия которых выше значения порога

деления:  $\chi = \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} S(E)dE \bigg/ \int_0^{\infty} S(E)dE$ , где  $S(E)$  – спектр нейтронов

деления. В целях удобства применения вероятностей первых столкновений, запишем  $\mu_{\text{гет}}$  в другой форме. По определению, коэффициент размножения на быстрых нейтронах есть число нейтронов, замедлившихся ниже порога деления  $^{238}\text{U}$ , на один быстрый нейтрон, появившийся в результате деления ядер урана тепловыми нейтронами. Однако вызвать деление  $^{238}\text{U}$  могут только те быстрые нейтроны спектра деления, энергия которых выше порога. Чтобы учесть этот факт, запишем другое выражение для вычисления величины  $\mu_{\text{гет}}$ . Для этого введем следующие обозначения:

$$N_8(E) = \int_{V_{\text{бл}}} dV \left[ v_f^8(E) \cdot \Sigma_f^8(E) - \Sigma_a^8(E) \right] \cdot \Phi(\vec{r}, E),$$

$$N_5(E) = \int_{V_{\text{бл}}} dV v_f^5(E) \cdot \Sigma_f^5(E) \cdot \Phi(\vec{r}, E).$$

В этих обозначениях коэффициент размножения на быстрых нейтронах можно представить в виде:

$$\mu_{\text{гет}} = 1 + \chi \cdot \left\{ \frac{\int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} N_8(E)dE \bigg/ \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} S(E)dE}{\int_0^{E_{\text{пр}}} N_5(E)dE \bigg/ \int_0^{\infty} S(E)dE} \right\}. \quad (8.1.2)$$

Если обозначить выражение в фигурных скобках

$$\left\{ \frac{\int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} N_8(E)dE \bigg/ \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} S(E)dE}{\int_0^{E_{\text{пр}}} N_5(E)dE \bigg/ \int_0^{\infty} S(E)dE} \right\} = \tilde{\mu}_{\text{гет}} - 1,$$

то

$$\mu_{\text{гет}} = 1 + \chi \cdot (\tilde{\mu}_{\text{гет}} - 1) = (1 - \chi) + \chi \cdot \tilde{\mu}_{\text{гет}},$$

$$\tilde{\mu}_{\text{гет}} = 1 + \frac{\int_{V_{\text{бл}}} dV \int_{E_{\text{пр}}}^{\infty} \left[ v_f^8(E) \cdot \Sigma_f^8(E) - \Sigma_a^8(E) \right] \cdot \Phi(\vec{r}, E) dE}{\chi \cdot \int_{V_{\text{бл}}} dV \int_0^{E_{\text{гр}}} v_f^5(E) \cdot \Sigma_f^5(E) \cdot \Phi(\vec{r}, E) dE}.$$

где  $\tilde{\mu}_{\text{гет}}$  – есть число нейтронов, замедлившихся за порог деления, на один быстрый нейтрон с энергией выше порога деления, появившийся в результате деления ядер урана тепловым нейтроном.

Будем рассматривать элементарную ячейку, состоящую всего из двух зон – зоны топлива (0) и зоны замедлителя (1), причем  $\lambda_{\text{зам}} \ll R_{\text{яч}}$ . Пусть в топливной зоне появился один надпороговый нейтрон. Подсчитаем, сколько подпороговых нейтронов вылетит из блока после множества всевозможных столкновений с ядрами среды. Это позволит определить величину  $\tilde{\mu}_{\text{гет}}$ , с помощью которой можно вычислить и само значение  $\mu_{\text{гет}}$ .

В широкой решетке нейтрон, вылетевший из блока в замедлитель, обязательно испытает хоть одно соударение с ядрами замедлителя. Поскольку ядра замедлителя обладают малой массой, то ступенька замедления на них довольно велика, так что после столкновения с ядрами замедлителя надпороговый нейтрон, как правило, станет подпороговым, то есть его энергия будет ниже порога деления  $^{238}\text{U}$ . Фактически это означает, что из замедлителя надпороговые нейтроны не влетают в блок.

Пусть в ячейке появились  $N_0$  надпороговых нейтронов. Подсчитаем, какое количество  $N_1$  подпороговых нейтронов появятся в ячейке от первоначальных надпороговых нейтронов. Отношение этих величин и есть  $\tilde{\mu}_{\text{гет}} = N_1/N_0$ . Обозначим  $P_{\Sigma}(V_{\text{бл}} \leftarrow V_{\text{бл}}) = P_{00}$ . Тогда  $(1 - P_{00}) \cdot N_0$  надпороговых нейтронов вылетят из блока и

сразу станут подпороговыми. Следовательно, в дальнейшем необходимо рассмотреть судьбу оставшихся  $P_{00} \cdot N_0$  нейтронов в блоке. В блоке эти нейтроны будут иметь взаимодействия следующих типов:

деление на ядрах  $^{238}\text{U} - \sigma_f^8$ ;

радиационный захват на ядрах  $^{238}\text{U} - \sigma_c^8$ ;

неупругое рассеяние на ядрах  $^{238}\text{U} - \sigma_{in}^8$ ;

упругое рассеяние  $\sigma_s$ .

Неупругое рассеяние в большинстве случаев выводит нейтроны за порог деления, поэтому  $\frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t} \cdot P_{00} \cdot N_0$  нейтронов после первого столкновения в блоке выйдут за порог деления. Упругое рассеяние на тяжелых ядрах топлива приводит к малой потере энергии. Будем считать, что такое рассеяние оставляет нейтроны надпороговыми.

В результате деления ядер  $^{238}\text{U}$  появляются как надпороговые, так и подпороговые нейтроны. Число подпороговых нейтронов в результате деления будет  $v_f^8 \cdot \frac{\Sigma_f^8}{\Sigma_t} \cdot (1 - \chi) \cdot P_{00} \cdot N_0$ . Таким образом, после первого столкновения надпороговых нейтронов в топливной зоне, а также вылета в замедлитель без столкновения за порог деления уйдет число нейтронов, равное

$$\begin{aligned}
 N^{(1)} &= (1 - P_{00}) \cdot N_0 + \frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t} \cdot P_{00} \cdot N_0 + \\
 &+ v_f^8 \cdot (1 - \chi) \cdot \frac{\Sigma_f^8}{\Sigma_t} \cdot P_{00} \cdot N_0 = \\
 &= \left( 1 + P_{00} \cdot \left( \frac{\Sigma_{in} + (1 - \chi) \cdot v_f^8 \cdot \Sigma_f^8 - \Sigma_t}{\Sigma_t} \right) \right) \cdot N_0.
 \end{aligned} \tag{8.1.3}$$

Оставшиеся после первого столкновения надпороговые нейтроны состоят, во-первых, из упруго рассеянных на ядрах топлива нейтронов, а во-вторых, из вновь появившихся надпороговых нейтронов деления. Суммарное их число

$$\left[ v_f^{(8)} \frac{\Sigma_f^8}{\Sigma_{t0}} \cdot \chi + \frac{\Sigma_s}{\Sigma_{t0}} \right] \cdot P_{00} \cdot N_0 = P_{00} \cdot N_0 \cdot z,$$

где  $z = \left[ v_f^{(8)} \frac{\Sigma_f^8}{\Sigma_{t0}} \cdot \chi + \frac{\Sigma_s}{\Sigma_{t0}} \right]$ .

Судьба этих нейтронов второго поколения аналогична судьбе того первоначального количества нейтронов  $N_0$ , с которого началось рассмотрение процесса размножения быстрых нейтронов. Следовательно, после второго столкновения под порог деления уйдет порция нейтронов, равная

$$N^{(2)} = \left\{ 1 + P_{00} \left[ (1 - \chi) v_f^{(8)} \frac{\Sigma_f^8}{\Sigma_{t0}} + \frac{\Sigma_s}{\Sigma_{t0}} \right] \right\} P_{00} \cdot z \cdot N_0, \quad (8.1.4)$$

а количество надпороговых нейтронов будет равно  $(P_{00} \cdot z)^2 \cdot N_0$  и т.д.

Полное количество подпороговых нейтронов, образовавшихся в результате произвольного числа столкновений и рождений, будет определяться суммой по всем столкновениям:

$$N_1 = N^{(1)} + N^{(2)} + \dots = \left( 1 + P_{00} \cdot \left( \frac{\Sigma_{in} + (1 - \chi) \cdot v_f^8 \cdot \Sigma_f^8 - \Sigma_t}{\Sigma_t} \right) \right) \times \\ \times N_0 + \left( 1 + P_{00} \cdot \left( \frac{\Sigma_{in} + (1 - \chi) \cdot v_f^8 \cdot \Sigma_f^8 - \Sigma_t}{\Sigma_t} \right) \right) \cdot P_{00} \cdot z \cdot N_0 + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( 1 + P_{00} \cdot \left( \frac{\Sigma_{in} + (1-\chi) \cdot v_f^8 \cdot \Sigma_f^8 - \Sigma_t}{\Sigma_t} \right) \right) \cdot N_0 \times \\
&\times \left( 1 + P_{00} \cdot z + (P_{00} \cdot z)^2 + \dots \right) = \\
&= \frac{\left( 1 + P_{00} \cdot \left( \frac{\Sigma_{in} + (1-\chi) \cdot v_f^8 \cdot \Sigma_f^8 - \Sigma_t}{\Sigma_t} \right) \right) \cdot N_0}{1 - (P_{00} \cdot z)}.
\end{aligned}$$

Разделив это количество подпороговых нейтронов на полное число первоначальных надпороговых нейтронов  $N_0$ , получим

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_{\text{гет}} &= \frac{\left( 1 + P_{00} \cdot \left( \frac{\Sigma_{in} + (1-\chi) \cdot v_f^8 \cdot \Sigma_f^8 - \Sigma_t}{\Sigma_t} \right) \right) \cdot N_0}{1 - (P_{00} \cdot z)} \cdot \frac{1}{N_0} = \\
&= \frac{\left( 1 + P_{00} \cdot \left( \frac{\Sigma_{in} + (1-\chi) \cdot v_f^8 \cdot \Sigma_f^8 - \Sigma_t}{\Sigma_t} \right) \right)}{1 - \left( P_{00} \cdot \left[ v_f^{(8)} \frac{\Sigma_f^8}{\Sigma_{t0}} \cdot \chi + \frac{\Sigma_s}{\Sigma_{t0}} \right] \right)}. \tag{8.1.5}
\end{aligned}$$

Искомая величина коэффициента размножения на быстрых нейтронах равна  $\mu_{\text{гет}} = 1 + \chi(\tilde{\mu}_{\text{гет}} - 1)$ . Поэтому вначале вычислим величину в круглых скобках:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{\text{гер}} - 1 &= \frac{1 + P_{00} \left[ \frac{\Sigma_{in} + (1 - \chi) v_f^{(8)} \Sigma_f^8 - \Sigma_t}{\Sigma_t} \right]}{1 - P_{00} \left[ \frac{\Sigma_{in} + (1 - \chi) v_f^{(8)} \Sigma_f^8 - \Sigma_{t0}}{\Sigma_t} \right]} - 1 = \\ &= \frac{P_{00} \cdot \left[ v_f^8 \cdot \Sigma_f^8 - \Sigma_a^8 \right]}{1 - P_{00} \cdot \left[ \frac{\chi \cdot v_f^8 \cdot \Sigma_f^8 + \Sigma_s}{\Sigma_t} \right]}, \end{aligned}$$

после чего получим окончательное выражение для коэффициента размножения на быстрых нейтронах в решетке:

$$\mu_{\text{гер}} = 1 + \chi \cdot \frac{v_f^8 \cdot \Sigma_f^8 - \Sigma_a^8}{\frac{\Sigma_t}{P_{00}} - (\chi \cdot v_f^8 \cdot \Sigma_f^8 + \Sigma_s)}. \quad (8.1.6)$$

Из полученного выражения следует, что основную роль, связанную с гетерогенным расположением топлива, играет величина  $P_{00}$ , которая, по определению, есть вероятность быстрого нейтрону, родившемуся в блоке, испытать в нем первое столкновение. Остальные величины получаются путем усреднения по спектру деления и слабо зависят от размеров топливного блока. Поэтому чем больше диаметр блока, тем больше вероятность нейтрону испытать в нем первое столкновение, а следовательно, тем выше коэффициент размножения на быстрых нейтронах. Заметим, что при определении вероятностей первых столкновений считалось, что они зависят от энергии нейтронов. В области спектра деления сечения всех изотопов слабо зависят от энергии, и эти вероятности можно считать постоянными в этой области энергий.

В случае тесных решеток необходимо учитывать возможность нейтронам, покинувшим блок без столкновений, перелететь через замедлитель и совершить первое столкновение в другом, не обязательно соседнем, блоке. Условие зеркального отражения нейтронов

на границе элементарной ячейки позволяет учесть эти нейтроны, не выходя за границы рассматриваемой ячейки.

Для этого необходимо в (8.1.6) заменить  $P_{00}$  на вероятность  $P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ})$ , полученную ранее при рассмотрении уравнений ВПС для двухзонной замкнутой ячейки. Так как при всех прочих равных условиях  $P_{\Sigma}(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ}) > P_{00}$ , то коэффициент размножения нейтронов в тесной решетке всегда выше, чем в широкой.

## **8.2. Вероятность избежать резонансного поглощения. Модель «тонкого» и «толстого» блока**

Ранее рассматривался процесс резонансного захвата нейтронов в процессе замедления в бесконечной гомогенной среде. Для описания этого явления использовались понятия резонансного и эффективного резонансного интеграла. Рассмотрим процесс резонансного поглощения нейтронов в бесконечной гетерогенной среде, то есть в решетке. Для этого вполне достаточно рассмотреть это явление на уровне элементарной ячейки. В простейшем случае это будет двухзонная ячейка, состоящая из топливного блока, в котором находится резонансный поглотитель, окруженный слоем замедлителя.

Как было показано ранее, в гомогенной бесконечной среде, которая также может моделироваться замкнутой элементарной ячейкой, возмущение спектра Ферми обусловлено равномерным по объему поглощением нейтронов, что приводит к эффекту спектральной экранировки. Этот эффект заключается в том, что в области энергий действия резонанса поток нейтронов сильно депрессирован по сравнению со спектром Ферми. Эффект спектральной экранировки приводит к увеличению вероятности избежать резонансного поглощения нейтроном в возмущенном спектре по сравнению с той же вероятностью для нейтронов невозмущенного спектра.

В гетерогенной ячейке природа экранировки ядер поглотителя носит более сложный характер. Резонансный поглотитель и замедлитель здесь пространственно разделены между собой. Блок является почти черным телом для резонансных нейтронов. Это означает, что поглощение резонансных нейтронов, рождающихся в основном в замедлителе, происходит в поверхностных слоях блока. Поверхностное поглощение нейтронов существенно возмущает

спектр нейтронов внутри блока и приводит к большему, по сравнению с гомогенной средой, экранированию ядер поглотителя, расположенных внутри блока и поэтому  $\Phi_{\text{гер}} > \Phi_{\text{гом}}$ .

Спектром Ферми в бесконечной среде, в которой отсутствует поглощение нейтронов, называют энергетическую зависимость потока нейтронов вида  $1/E$ . Замедляющиеся нейтроны распределяются по спектру Ферми после многократного рассеяния на ядрах среды. Если бы резонансное взаимодействие замедляющихся нейтронов в ячейке отсутствовало ( $\Sigma_r = 0$ ), то в ней также установил-

ся спектр Ферми  $\tilde{\Phi}^{\text{яч}}(E) = \frac{C}{E}$ , где  $C$  – константа. Функцию  $\tilde{\Phi}^{\text{яч}}(E)$

будем рассматривать как невозмущенный резонансами средний по ячейке поток нейтронов. Интегральную по ячейке плотность замедления нейтронов, распределенных по спектру Ферми, определим по аналогии с гомогенной средой:  $J^{\text{яч}} = \overline{\xi \Sigma}_p^{\text{яч}} \cdot E \cdot \tilde{\Phi}^{\text{яч}} \cdot V_{\text{яч}}$ .

Пренебрегая пространственными осцилляциями нейтронов в отсутствии резонансного поглощения, будем использовать формулу простой гомогенизации для усреднения величины  $\overline{\xi \Sigma}_p^{\text{яч}}$ :

$$\overline{\xi \Sigma}_p^{\text{яч}} = (\xi \Sigma_p)^{\text{бл}} \cdot \frac{V_{\text{бл}}}{V_{\text{яч}}} + (\xi \Sigma_p)^{\text{зам}} \cdot \frac{V_{\text{зам}}}{V_{\text{яч}}}. \quad (8.2.1)$$

В случае единичной интенсивности источника (единичная плотность замедления  $J^{\text{яч}} = 1$ ), полученное равенство может быть использовано при определении константы  $C$  в формуле для спектра Ферми в бесконечной решетке:

$$\tilde{\Phi}^{\text{яч}}(E) = \frac{1}{\overline{\xi \Sigma}_p^{\text{яч}} \cdot V_{\text{яч}} \cdot E}. \quad (8.2.2)$$

Ограничимся рассмотрением резонансного поглощения нейтронов на системе изолированных резонансов. Напомним, что резонанс считается изолированным, если расстояние между резонансами много больше ступеньки замедления нейтронов на замедлителе.

Энергетическая зависимость сечения образования составного ядра при резонансном взаимодействии нейтронов для отдельного резонанса в окрестности точки  $E_r$  на шкале энергий описывается формулой Брейта – Вигнера:

$$\sigma_r(E) = \frac{\sigma_0}{1 + \left(\frac{E - E_r}{\Gamma/2}\right)^2}. \quad (8.2.3)$$

Основными характеристиками этой резонансной линии являются амплитуда  $\sigma_0 = \sigma_r(E_r)$  и полная ширина резонанса  $\Gamma$ , определяемая из условия  $\sigma_r(E_0 \pm \Gamma/2) = 1/2 \sigma_0$ . Если резонансное деление ядер отсутствует, то полная ширина  $\Gamma$  может быть представлена суммой парциальных ширин:  $\Gamma = \Gamma_\gamma + \Gamma_n$ , где  $\Gamma_\gamma$  – радиационная ширина, а  $\Gamma_n$  – нейтронная ширина. С помощью парциальных ширин определяются вероятности резонансного радиационного захвата  $\Gamma_\gamma/\Gamma$  и резонансного рассеяния  $\Gamma_n/\Gamma$  при резонансном взаимодействии нейтрона с ядром, а также резонансные сечения захвата и рассеяния:

$$\sigma_{a,r}(E) = \sigma_r(E) \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma}, \quad \sigma_{s,r}(E) = \sigma_r(E) \frac{\Gamma_n}{\Gamma}.$$

Наряду с резонансным рассеянием существует потенциальное рассеяние, которое происходит без образования составного ядра. Если пренебречь квантово-механическим эффектом интерференции между резонансным и потенциальным рассеянием, то полное сечение резонансного поглотителя можно представить суммой  $\sigma(E) = \sigma_r(E) + \sigma_p$ , где сечение потенциального рассеяния имеет слабую зависимость от энергии нейтрона.

Итак, будем считать, что в интервале  $\Delta E_r$  вблизи энергии  $E_r$  имеется изолированный резонанс. При прохождении нейтронами по энергетической шкале резонанса в интервале  $\Delta E_r$  поток замед-

ления уменьшается на величину, определяющую число нейтронов, поглощенных в этом энергетическом интервале блоком ячейки, т.е.

$$J_{r-1}^{\text{яч}} + \int_{V_{\text{бл}}} dV \int_{\Delta E_r} dE \Sigma_a^{\text{бл}}(E) \cdot \Phi^{\text{бл}}(r, E) = J_r^{\text{яч}}(E). \quad (8.2.4)$$

Предположим, что для нейтронов, энергия которых выше резонансной, плотность замедления равна единице. Тогда  $\varphi_r + P_r = 1$ , где  $\varphi_r$  – вероятность избежать резонансного поглощения нейтронов на данном резонансе, а  $P_r$  – вероятность поглощения нейтронов в области действия резонанса  $\Delta E_r$ :

$$P_r = \int_{V_{\text{бл}}} dV \int_{\Delta E_r} dE \Sigma_{a,r}^{\text{бл}}(E) \cdot \Phi^{\text{бл}}(r, E). \quad (8.2.5)$$

Так как вероятность поглощения на изолированном резонансе невелика  $P_r \ll 1$ , то  $1 - P_r \approx \exp(-P_r)$  и выражение для  $\varphi_r$  представляется в следующем виде:  $\varphi_r = e^{-P_r}$ .

Рассмотрим изолированный узкий резонанс, ширина которого  $\Delta E_r$ . Как было показано ранее, вероятность избежать резонансного поглощения нейтронов на резонансе дается выражением  $\varphi_r = e^{-P_r}$ , где  $P_r$  – вероятность нейтрону при замедлении поглотится в этом резонансе. Если нормировка потока нейтронов произведена на один замедляющийся нейтрон, то выражение для  $P_r$  будет иметь следующий вид:

$$P_r = \int_{V_{\text{бл}}} d\vec{r} \int_{\Delta E_r} \Sigma_{ar}^{\text{бл}}(E) \cdot \Phi^{\text{бл}}(\vec{r}, E) dE = V_{\text{бл}} \cdot \rho_{\Pi} \times \\ \times \int_{\Delta E_r} \sigma_{ar}(E) \cdot \tilde{\Phi}^{\text{бл}}(E) dE \quad (8.2.6)$$

где  $\tilde{\Phi}^{\text{бл}}(E)$  – средний по объему блока поток резонансных нейтронов:

$$\tilde{\Phi}^{\text{бл}}(E) = \frac{1}{V_{\text{бл}} V_{\text{бл}}} \int \Phi^{\text{бл}}(\vec{r}, E) d\vec{r}. \quad \text{Для вычисления потока резонансных нейтронов в блоке воспользуемся уравнением баланса нейтронов с применением вероятностей первых столкновений (всюду в дальнейшем индекс «0» относится к блоку, а «1» – к замедлителю):}$$

$$\begin{aligned} V_0 \cdot \Sigma_t^0 \cdot \tilde{\Phi}^0(E) &= P_{00} \cdot V_0 \cdot \int_E^{E/\alpha_0} \Sigma_s^0(E') \cdot \tilde{\Phi}^0(E') dE' + \\ &+ P_{10} \cdot V_1 \cdot \int_E^{E/\alpha_1} \Sigma_s^1(E') \cdot \tilde{\Phi}^1(E') dE'. \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

Если резонанс узкий, то ступенька замедления не только на ядрах замедлителя, но и на ядрах топлива много больше ширины резонанса. Поскольку нейтроны в резонансную область замедляются из всей ступеньки замедления, основной вклад в интегралы дает область энергий далекая от резонансной линии, где поток нейтронов невозмущен резонансом. Следовательно, можно в подынтегральном выражении подставить невозмущенный поток нейтронов

$$\tilde{\Phi}^{\text{яч}}(E) = \frac{1}{\xi \Sigma_p \cdot V_{\text{яч}} \cdot E}. \quad \text{Интегрируя по всей ступеньке замедления,}$$

получим

$$\begin{aligned} V_0 \cdot \Sigma_t^0 \cdot \tilde{\Phi}^0(E) &= P_{00} \cdot V_0 \cdot \Sigma_p^0 \cdot \tilde{\Phi}^{\text{яч}}(E) + \\ &+ P_{10} \cdot V_1 \cdot \Sigma_s^1 \cdot \tilde{\Phi}^{\text{яч}}(E), \\ \tilde{\Phi}^0(E) &= \frac{(P_{00} \cdot V_0 \cdot \Sigma_p^0 + P_{10} \cdot V_1 \cdot \Sigma_s^1)}{V_0 \cdot \Sigma_t^0} \cdot \tilde{\Phi}^{\text{яч}}(E). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу для вероятности нейтрону поглотится в резонансе, получим:

$$P_r = \frac{V_0 \cdot \rho_{\Pi}}{\xi \Sigma_p \cdot V_{\text{яч}}} \cdot J_{ef},$$

$$J_{ef} = \int_{\Delta E_r} \frac{\sigma_{ar}(E) \cdot (P_{00} \cdot V_0 \cdot \Sigma_p^0 + P_{10} \cdot V_1 \cdot \Sigma_s^1)}{V_0 \cdot \Sigma_t^0 \cdot E} dE. \quad (8.2.8)$$

Выражение (8.2.8) можно упростить, если применить теорему взаимности для вероятностей первых столкновений  $P_{10} \cdot V_1 \cdot \Sigma_s^1 = P_{01} \cdot V_0 \cdot \Sigma_t^0$ , откуда следует:

$$P_{10} = P_{01} \cdot \frac{V_0 \cdot \Sigma_0}{V_1 \cdot \Sigma_1}, \quad P_{01} = 1 - P_{00}. \quad (8.2.9)$$

**Модель тонкого блока.** В модели «тонкого блока» принимается, что рассеянием нейтронов в блоке можно пренебречь. Это значит, что основное количество резонансных нейтронов падает на блок из замедлителя. В этом случае можно положить  $\Sigma_p^0 = 0$ , тогда

$$\tilde{\Phi}^0(E) = (1 - P_{00}) \cdot \frac{V_0 \cdot \Sigma_t^0}{V_1 \cdot \Sigma_s^1} \cdot \frac{V_1 \cdot \Sigma_s^1}{V_0 \cdot \Sigma_t^0} \cdot \tilde{\Phi}^{\text{яч}}(E) = (1 - P_{00}) \cdot \tilde{\Phi}^{\text{яч}}(E). \quad (8.2.10)$$

Используя рациональное приближение для вероятностей первых столкновений  $1 - P_{00} = \frac{1}{1 + \bar{L}^0 \cdot \Sigma_t^0}$ , получим

$$\tilde{\Phi}^0(E) = \frac{1}{1 + \bar{L}^0 \cdot \Sigma_t^0} \cdot \tilde{\Phi}^{\text{яч}}(E). \quad (8.2.11)$$

В результате этих преобразований выражение для эффективного резонансного интеграла будет иметь следующий вид:

$$J_{ef} = \int_{\Delta E_r} \frac{\sigma_{ar}(E) \cdot dE}{(1 + \bar{L}^0 \cdot \Sigma_t^0) \cdot E}. \quad (8.2.12)$$

Для вычисления резонансного интеграла применим стандартную замену переменных  $x = ((E - E_0)/\Gamma/2)$ . Представляя формулу Брейта – Вигнера для формы резонансной линии в новой переменной  $\sigma_{ar} = \frac{\sigma_0}{1+x^2}$ , получаем

$$J_{ef} = \frac{\Gamma_n \cdot \sigma_{r0}}{\Gamma \cdot E_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\bar{L}^0 \cdot \rho_{\Pi} \cdot \sigma_{r0}}{1+x^2}}.$$

Вводя обозначение  $\beta_{\text{гет}} = \bar{L}^0 \cdot \rho_{\Pi} \cdot \sigma_{r0}$  и интегрируя в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим аналитическое выражение для эффективного резонансного интеграла для приближения «тонкого блока»:

$$J_{ef} = \frac{\Gamma_{\gamma} \cdot \sigma_{r0}}{2 \cdot E_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2 + \beta_{\text{гет}}} = \frac{J_R}{\sqrt{1+\beta_{\text{гет}}}}, \quad (8.2.13)$$

где  $J_R = \frac{\pi \cdot \Gamma_{\gamma} \cdot \sigma_{r0}}{2 \cdot E_0}$  – обычный резонансный интеграл.

Так как в гомогенной среде замедлителя и резонансного поглотителя  $\beta_{\text{гом}} = \frac{\sigma_{r0} \cdot \rho_{\Pi}}{\Sigma_p}$ , то в гетерогенной среде роль сечения по-

тенциального рассеяния играет величина  $\Sigma_p^{\text{гет}} = \frac{1}{\bar{L}^0}$ .

Слабый резонанс:  $\beta_{\text{гет}} \ll 1 \Rightarrow J_{ef} = J_R$ .

Сильный резонанс:  $\beta_{\text{гет}} \gg 1 \Rightarrow J_{ef} = \frac{J_R}{\sqrt{\beta_{\text{гет}}}}$ .

Поскольку  $\beta_{\text{гет}} = \bar{L}^0 \cdot \rho_{\Pi} \cdot \sigma_{r0} = \frac{4V_0}{S_0} \rho_{\Pi} \cdot \sigma_{r0}$ , а  $\rho_{\Pi} \cdot V_0 = M_0$ , то

имеем выражение:

$$J_{ef}^{гет} \approx \sqrt{\frac{S_0}{M_0}}. \quad (8.2.14)$$

Таким образом, для тонких блоков эффективный резонансный интеграл пропорционален квадратному корню из отношения площади поверхности блока к его массе. Предполагая, что все резонансы можно разделить на сильные и слабые, и учитывая, что полный эффективный резонансный интеграл равен сумме резонансных интегралов по всем резонансам, получим эмпирическую формулу:

$$J_{ef} = A + B\sqrt{\frac{S}{M}}. \quad (8.2.15)$$

**Модель толстого блока.** Случай «толстого» блока характеризуется тем, что рассеянием резонансных нейтронов в блоке пренебречь нельзя. Это следует из того, что  $\bar{L}^0 \cdot \Sigma_p^0 \gg 1$ . Уравнение баланса нейтронов в ячейке для этого случая имеет вид:

$$V_0 \cdot \Sigma_t^0 \cdot \tilde{\Phi}^0(E) = P_{00} \cdot V_0 \cdot \Sigma_s^0 \cdot \tilde{\Phi}^{яч}(E) + P_{10} \cdot V_1 \cdot \Sigma_s^1 \cdot \tilde{\Phi}^{яч}(E). \quad (8.2.16)$$

Используя теорему взаимности:  $P_{01} \cdot V_0 \cdot \Sigma_t^0 = P_{10} \cdot V_1 \cdot \Sigma_s^1$ , запишем  $P_{10} = P_{01} \frac{V_0 \cdot \Sigma_t^0}{V_1 \cdot \Sigma_s^1}$ . Следовательно, поток резонансных нейтронов в блоке имеет вид:

$$\tilde{\Phi}^0(E) = \left( \frac{\Sigma_s^0}{\Sigma_t^0} \cdot P_{00} + P_{01} \right) \cdot \tilde{\Phi}^{яч}(E). \quad (8.2.17)$$

Поскольку  $P_{00} = 1 - P_{01}$ , то

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}^0(E) &= \left[ \frac{\Sigma_s^0}{\Sigma_t^0} (1 - P_{01}) + P_{01} \right] \cdot \tilde{\Phi}^{\text{яч}}(E) = \\ &= \left[ \frac{\Sigma_s^0}{\Sigma_t^0} + P_{01} \left( 1 - \frac{\Sigma_s^0}{\Sigma_t^0} \right) \right] \cdot \tilde{\Phi}^{\text{яч}}(E).\end{aligned}\quad (8.2.18)$$

Зная поток резонансных нейтронов в блоке, можно определить эффективный резонансный интеграл на данном резонансном уровне:

$$J_{ef} = \int_{\Delta E_r} \sigma_{ar}(E) \cdot \left[ \frac{\Sigma_s^0}{\Sigma_t^0} + P_{01} \left( 1 - \frac{\Sigma_s^0}{\Sigma_t^0} \right) \right] \cdot \frac{dE}{E}.$$

Преобразуем первое слагаемое для эффективного резонансного интеграла. Вводя стандартную замену переменных:

$$x = \frac{E - E_{0r}}{\Gamma/2}, \quad dx = \frac{2}{\Gamma} dE, \quad dE = \frac{\Gamma}{2} dx$$

и распространяя интегрирование по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  получим:

$$\begin{aligned}J_{ef}^{(1)} &= \frac{\sigma_{0r} \cdot \Gamma}{2E_{0r}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_{s0}^*}{\sigma_{s0}^* \cdot (1 + x^2) + \sigma_{0r}} dx = \frac{\sigma_{0r} \cdot \Gamma}{2E_{0r}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + \beta_{\text{гет}}^*} = \\ &= \frac{J_R}{\sqrt{1 + \beta_{\text{гет}}^*}},\end{aligned}$$

где  $\beta_{\text{гет}}^* = \frac{\sigma_{0r}}{\sigma_{s0}^*}$ ;  $\sigma_{s0}^* = \sigma_p + \frac{\Sigma_s^0}{\rho_{\Pi}} = \sigma_p + \sigma_0^*$ . Эта составляющая резо-

нансного интеграла отвечает за резонансное поглощение нейтронов, рожденных за счет рассеяния в блоке. Она определяет так называемое объемное поглощение и не зависит от пространственной блокировки.

Теперь рассмотрим второе слагаемое резонансного интеграла  $\int_{\Delta E_e} \sigma_{ar}(E) \cdot P_{01} \cdot \left(1 - \frac{\Sigma_s^0}{\Sigma_t^0}\right) \frac{dE}{E}$ . Воспользуемся рациональным приближением для вероятности  $P_{01}$ :

$$P_{01} = \frac{1}{1 + \bar{L}^0 \cdot \Sigma_t^0},$$

$$P_{01} \cdot \left(1 - \frac{\Sigma_s^0}{\Sigma_t^0}\right) = \frac{1}{1 + \bar{L}^0 \cdot \Sigma_t^0} \cdot \left(1 - \frac{\Sigma_s^0}{\Sigma_t^0}\right) \approx \frac{\Sigma_t^0 - \Sigma_s^0}{\bar{L}^0 \cdot (\Sigma_t^0)^2} = \frac{\Sigma_{ar}}{\bar{L}^0 \cdot (\Sigma_t^0)^2}.$$

В результате получим:

$$J_{ef}^{(2)} = \frac{\sigma_{0r} \cdot \Gamma_\gamma}{\Gamma \cdot E_{0r}} \int_{\Delta E_r} \frac{1}{1+x^2} \frac{\rho_{\Pi} \cdot \sigma_{0r}}{1+x^2} \frac{dE}{\bar{L}^0 \cdot (\rho_{\Pi})^2 \left[ \sigma_{s0}^* + \frac{\sigma_{0r}}{1+x^2} \right]^2},$$

где  $x = \frac{E - E_0}{\frac{\Gamma}{2}}$ ;  $\sigma_{s0}^* = \sigma_p + \frac{\Sigma_s^0}{\rho_{\Pi}}$ . Путем несложных преобразований

представим этот интеграл в следующем виде:

$$J_{ef}^{(2)} = \frac{(\sigma_{0r})^2}{2 \cdot E_{0r} \cdot \bar{L}^0 \cdot \rho_{\Pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2 \cdot \left[ \sigma_{s0}^* + \frac{\sigma_{0r}}{1+x^2} \right]^2} =$$

$$= \frac{(\sigma_{0r})^2}{2 \cdot E_{0r} \cdot \bar{L}^0 \cdot \rho_{\Pi} \cdot (\sigma_{s0}^*)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left[ 1+x^2 + \frac{\sigma_{0r}}{\sigma_{s0}^*} \right]^2} =$$

$$= \frac{\pi(\sigma_{0r})^2}{4E_{0r} \bar{L}^0 \rho_{\Pi} (\sigma_{s0}^*)^2 \left( 1 + \frac{\sigma_{0r}}{\sigma_{s0}^*} \right)^{3/2}}.$$

Главная часть этого интеграла, отвечающая за пространственную неравномерность потока резонансных нейтронов, есть  $\rho_{\Pi} \cdot \bar{L}^0 = \rho_{\Pi} \cdot \frac{4V}{S} \rightarrow \frac{M}{S}$ . Следовательно, этот интеграл пропорционален величине  $\frac{M}{S}$ , а поэтому полный интеграл по всем резонансам можно представить в виде

$$J_{ef} = A + B \cdot \frac{S}{M}. \quad (8.2.19)$$

В отличие от модели тонкого блока, для толстых блоков эффективный резонансный интеграл пропорционален отношению поверхности блока к его массе.

Следуя общему подходу, в случае тесных решеток необходимо заменить во всех формулах для потока нейтронов и резонансного интеграла величину  $P_{00}$  на величину  $Q_{00} = P(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ})$ , которая учитывает возможность многократного отражения нейтронов от границы ячейки, прежде чем они будут поглощены в блоке. Для тесных решеток, выражение для  $Q_{00}$  имеет вид:

$$Q_{00} = P(\text{БЛ} \leftarrow \text{БЛ}) = \frac{\bar{L}^0 \Sigma_t^0}{1 + \bar{L}^0 \Sigma_t^0 - C} = \frac{\frac{\bar{L}^0 \Sigma_t^0}{1 - C}}{1 + \frac{\bar{L}^0 \Sigma_t^0}{1 - C}}, \quad (8.2.20)$$

где  $C = P^{\text{зам}}(S \leftarrow S)$ . Для удобства дальнейших преобразований переобозначим величину  $C \Rightarrow (1 - C)$ , так что выражение для вероятности  $Q_{00}$  будет иметь вид:

$$Q_{00} = \frac{\frac{\bar{L}^0 \Sigma_t^0}{C}}{1 + \frac{\bar{L}^0 \Sigma_t^0}{C}}. \quad (8.2.21)$$

Таким образом, в тесных решетках как бы возрастает величина эффективной средней хорды:

$$\bar{L}_{\text{эф}}^0 = \frac{\bar{L}^0}{C} = \frac{4V_0}{S_0 \cdot C} = \frac{4V_0}{S_{\text{эф}}^0}; S_{\text{эф}}^0 = C \cdot S_0. \quad (8.2.22)$$

Это обстоятельство позволяет говорить о том, что в тесной решетке происходит затенение блока соседними блоками, то есть уменьшение его эффективной поверхности, с которой вылетают нейтроны, без изменения объема блока. Действительно, если представить себе предельную ситуацию, когда блоки стоят вплотную друг к другу, то нейтрон, вылетевший с поверхности одного блока, тут же попадает в другой блок. Это значит, что с выделенного элемента поверхности блока нейтроны не могут вылететь в замедлитель, то есть его эффективная поверхность, открытая для замедлителя, уменьшается.

Как в случае тонкого блока, так и в случае толстого блока, эффективный резонансный интеграл зависит от отношения площади поверхности топливного блока  $S$  к его массе  $M$ . Для тесной решетки эффективная поверхность блока уменьшается и поэтому при всех прочих равных условиях

$$J_{ef}(\text{тесной решетки}) < J_{ef}(\text{широкой решетки}). \quad (8.2.23)$$

**Принцип эквивалентности для резонансного поглощения нейтронов.** Как видно из полученных результатов, выражение для эффективного резонансного интеграла как для гомогенной среды, так и для гетерогенной имеют одинаковый вид:

$$\begin{aligned} J_{ef}^{\text{гет}} &= \frac{J_R}{\sqrt{1 + \beta^{\text{гет}}}}, & \beta^{\text{гет}} &= \frac{\rho_{\text{П}} \cdot \sigma_{r0}}{\Sigma_p^*}, \\ J_{ef}^{\text{гом}} &= \frac{J_R}{\sqrt{1 + \beta^{\text{гом}}}}, & \beta^{\text{гом}} &= \frac{\rho_{\text{П}} \cdot \sigma_{r0}}{\Sigma_p}. \end{aligned} \quad (8.2.24)$$

Таким образом, можно утверждать, что эффективные резонансные интегралы в гомогенной и гетерогенной среде совпадают, если имеет место равенство:

$$\frac{\Sigma_p}{\rho_{\Pi}} = \frac{\Sigma_p^*}{\rho_{\Pi}^{\text{бл}}}. \quad (8.2.25)$$

Из соотношений (8.2.24) и (8.2.25) следуют два принципа эквивалентности (иногда называют теоремой эквивалентности) резонансного поглощения:

1. Независимо от природы замедлителя и геометрии блока, ячейки с одинаковым значением величины  $\Sigma_p^*/\rho_{\Pi}^{\text{бл}}$  имеют одинаковые резонансные интегралы.

2. Для любой гетерогенной среды можно подобрать такую эффективную гомогенную среду, в которой эффективный резонансный интеграл будет таким же, как и в гетерогенной среде.

Второй принцип эквивалентности часто используется для расчета резонансного поглощения в сложных решетках с двойной гетерогенностью. Так, например, графитовые реакторы типа РБМК и тяжеловодные реакторы CANDU, которые относятся к реакторам канального типа, имеют сложную структуру топливного канала. Топливный канал представляет собой ТВС, как в реакторах водородного типа, омываемые теплоносителем. Поэтому такие топливные сборки можно представить в виде решетки ТВЭЛов в канале (первый уровень гетерогенности). В свою очередь, топливные каналы образуют решетку каналов (второй уровень гетерогенности). Для расчета резонансного поглощения в такой системе вначале рассматривают решетку на основе топливной сборки в теплоносителе. Заменяя ее гомогенной средой и добавив к величине  $\Sigma_p$  небольшое слагаемое так, чтобы выполнялась теорема эквивалентности гомогенной и гетерогенной сред, перейдем к решетке каналов, в которой каждый канал представляет собой гомогенную смесь топлива и замедлителя.

### 8.3. Коэффициент использования тепловых нейтронов в двухзонной ячейке

По определению, коэффициент использования тепловых нейтронов  $\theta$  есть вероятность того, что тепловой нейтрон поглотится ядрами топлива. В гетерогенной среде топливо размещено в топливной зоне, поэтому коэффициент  $\theta$  есть вероятность того, что тепловой нейтрон будет поглощен в топливной зоне. Как и в предыдущих случаях, рассмотрим простейшую двухзонную ячейку, состоящую из топливного блока и окружающего его замедлителя, для которой

$$\theta = \frac{\int_{V_0} d\vec{r} \int_0^{E_{гр}} \Sigma_a^0(E) \cdot \Phi^0(\vec{r}, E) dE}{\int_{V_0} d\vec{r} \int_0^{E_{гр}} \Sigma_a^0(E) \cdot \Phi^0(\vec{r}, E) dE + \int_{V_1} d\vec{r} \int_0^{E_{гр}} \Sigma_a^1(E) \cdot \Phi^1(\vec{r}, E) dE} . \quad (8.3.1)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную величину  $q$ , определяемую соотношением:

$$q = \frac{\int_{V_1} d\vec{r} \int_0^{E_{гр}} \Sigma_a^1(E) \cdot \Phi^1(\vec{r}, E) dE}{\int_{V_0} d\vec{r} \int_0^{E_{гр}} \Sigma_a^0(E) \cdot \Phi^0(\vec{r}, E) dE} , \quad (8.3.2)$$

которая есть относительное значение скорости поглощения нейтронов в замедлителе, взятое по отношению к скорости поглощения нейтронов в топливной зоне. С помощью величины  $q$  коэффициент теплового использования примет довольно простой вид

$$\theta = \frac{1}{1+q} . \quad (8.3.3)$$

Величина  $q$  может быть вычислена, если известны интегральные скорости поглощения нейтронов, взятые по объемам зон топлива  $R_a^0$  и замедлителя  $R_a^1$ :

$$R_a^0 = \int_{V_0} d\vec{r} \int_0^{E_{гр}} \Sigma_a^0(E) \cdot \Phi^0(\vec{r}, E) dE, \quad (8.3.4)$$

$$R_a^1 = \int_{V_1} d\vec{r} \int_0^{E_{гр}} \Sigma_a^1(E) \cdot \Phi^1(\vec{r}, E) dE.$$

В свою очередь, для расчета скоростей поглощения нейтронов в зонах ячейки необходимо знать пространственно-энергетическое распределение нейтронов в ячейке. Поскольку микросечения поглощения тепловых нейтронов в топливе и замедлителе существенно отличаются как по величине, так и по характеру зависимости от энергии, то не всегда корректно разделение пространственной и энергетической переменных в функции распределения потока тепловых нейтронов. Кроме того, из-за большого поглощения тепловых нейтронов топливным блоком не всегда оправдано применение диффузионного приближения для расчета пространственной зависимости потока тепловых нейтронов. Однако, как следует из выражения (8.3.3):

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} = -\frac{q}{1+q} \cdot \frac{\Delta q}{q} \approx -q \frac{\Delta q}{q}$$

и так как  $q \sim 0.1-0.3$ , то при заданной допустимой погрешности расчета величины  $\theta$  допустимая погрешность при расчете величины  $q$  может быть в несколько раз выше.

Учитывая это соображение, получим аналитическое выражение для величины  $\theta$ , преобразовав величины скоростей поглощения тепловых нейтронов в зоне топлива и замедлителя соответственно:

$$\begin{aligned}
 R_a^i &= \frac{V_i \int_0^{E_{\text{Гр}}} \int d\vec{r} \Sigma_a^i(E) \cdot \Phi^i(\vec{r}, E) dE}{\int_0^{E_{\text{Гр}}} \Phi^i(\vec{r}, E) dE} \cdot \int_0^{E_{\text{Гр}}} \Phi^i(\vec{r}, E) dE = \\
 &= \int_{V_i} \bar{\Sigma}_a^i \bar{\Phi}^i(\vec{r}) d\vec{r} = \bar{\Sigma}_a^i \bar{\Phi}^i V_i, \tag{8.3.5}
 \end{aligned}$$

где  $\bar{\Sigma}_a^i = \frac{\int_0^{E_{\text{Гр}}} \Sigma_a^i(E) \cdot \Phi^i(\vec{r}, E) dE}{\int_0^{E_{\text{Гр}}} \Phi^i(\vec{r}, E) dE}$  – макросечение поглощения в  $i$ -й

зоне, усредненное с весом потока нейтронов, а

$\bar{\Phi}^i(\vec{r}) = \int_0^{E_{\text{Гр}}} \Phi^i(\vec{r}, E) dE$  – пространственное распределение инте-

грального потока тепловых нейтронов в  $i$ -й зоне,  $\bar{\Phi}^i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \bar{\Phi}^i(\vec{r}) d\vec{r}$

– средний по  $i$ -й зоне интегральный поток нейтронов.

Предположим, что в условиях нашей задачи можно разделить пространственную и энергетическую переменные, по крайней мере, в пределах каждой из зон ячейки:

$$\Phi^i(\vec{r}, E) = \Psi_i(\vec{r}) \cdot S_i(E). \tag{8.3.6}$$

Тогда усредненное значение макросечения поглощения в каждой зоне можно представить в виде

$$\bar{\Sigma}_{ai} = \frac{\int_0^{E_{\text{Гр}}} \Sigma_{ai}(E) \cdot S_i(E) dE}{\int_0^{E_{\text{Гр}}} S_i(E) dE}. \tag{8.3.7}$$

С учетом (8.3.5)–(8.3.7) выражение для коэффициента использования тепловых нейтронов  $\theta$  и относительного (вредного) поглощения нейтронов  $q$  будут иметь следующий вид:

$$\theta = \frac{\Sigma_a^0 \cdot \bar{\Phi}^0 \cdot V_0}{\Sigma_a^0 \cdot \bar{\Phi}^0 \cdot V_0 + \Sigma_a^1 \cdot \bar{\Phi}^1 \cdot V_1} = \frac{\Sigma_a^0 \cdot V_0}{\Sigma_a^0 \cdot V_0 + \Sigma_a^1 \cdot V_1 \frac{\bar{\Phi}^1}{\bar{\Phi}^0}}, \quad (8.3.8)$$

$$q = \frac{\Sigma_a^1 \cdot V_1 \cdot \bar{\Phi}^1}{\Sigma_a^0 \cdot V_0 \cdot \bar{\Phi}^0}. \quad (8.3.9)$$

В гомогенной среде  $\frac{\bar{\Phi}^1}{\bar{\Phi}^0} = 1$ , а в гетерогенной среде  $\frac{\bar{\Phi}^1}{\bar{\Phi}^0} > 1$  и поэтому,  $\theta_{\text{гет}} < \theta_{\text{гом}}$ .

Таким образом, проблема вычисления  $\theta$  сведена к двум более простым задачам:

задача усреднения сечений внутри каждой из зон ячейки;

отыскание отношения средних по зонам односкоростных потоков тепловых нейтронов.

**Блок-эффект.** Тепловые нейтроны, как правило, рождаются в замедлителе, а поглощаются в топливе. Поэтому поток тепловых нейтронов в замедлителе выше среднего потока по ячейке, а в топливе – соответственно ниже среднего по ячейке. Этот фактор снижает величину  $\theta$  в гетерогенной среде. Мерой уменьшения  $\theta_{\text{гет}}$  служит отношение средних потоков в зоне замедлителя и топливной зоне  $d = \frac{\bar{\Phi}^1}{\bar{\Phi}^0}$ . Это отношение обычно называют коэффициентом проигрыша. Коэффициент проигрыша можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$d = \frac{\bar{\Phi}(\vec{r}_0)}{\bar{\Phi}^0} + \frac{\bar{\Phi}^1 - \bar{\Phi}(\vec{r}_0)}{\bar{\Phi}^0} = Q_0 + Q_1, \quad (8.3.10)$$

где  $Q_0$  – внутренний блок-эффект, а  $Q_1$  – внешний блок-эффект,  $\bar{\Phi}(\vec{r}_0)$  – значение интегрального потока нейтронов на поверхности

блока. Отметим, что в реальных ячейках значения  $Q_0$  и  $Q_1$ , как правило, отличаются на порядок.

Для расчета величины блок-эффекта и  $\theta$  часто используют диффузионное приближение. Оно позволяет в большинстве случаев получить аналитическое выражение, удобное для физического анализа задачи. Основная погрешность одnogруппового диффузионного приближения обусловлена применением уравнения диффузии для топливной зоны, где  $\Sigma_a^0 \approx \Sigma_t^0$  и поэтому исключение из диффузионного рассмотрения сильно поглощающей среды должно привести к существенному повышению точности расчетов  $\theta$ .

**Метод АБГ (Амуяла, Бенуа, Горовитца).** Предположим, что источники тепловых нейтронов присутствуют только в зоне замедлителя. Эти источники формируются замедляющимися нейтронами. Рассмотрим случай однородных и изотропных источников, то есть когда замедляющиеся нейтроны распределены равномерно по объему замедлителя и имеют равновероятные направления скоростей движения. Пусть мощность этих источников равна  $S^1$ , значит в единице объема замедлителя каждую секунду появляется  $S^1$  тепловых нейтронов. Запишем уравнение баланса тепловых нейтронов внутри блока и по всей ячейке:

$$\begin{aligned} V_1 \cdot S^1 &= \Sigma_a^0 \cdot \bar{\Phi}^0 \cdot V_0 + \Sigma_a^1 \cdot \bar{\Phi}^1 \cdot V_1, \\ \Sigma_a^0 \cdot \bar{\Phi}^0 \cdot V_0 + J^+ &= J^-. \end{aligned} \tag{8.3.11}$$

где  $J^+$  – односторонний ток нейтронов из топливной зоны в замедлитель;  $J^-$  – односторонний ток нейтронов в обратном направлении из замедлителя в топливную зону.

Первое уравнение означает условие баланса тепловых нейтронов в ячейке, то есть сколько тепловых нейтронов появляется в ячейке за одну секунду, столько и поглощается, причем как в топливной зоне, так и в зоне замедлителя. Второе уравнение отвечает балансу тепловых нейтронов в блоке, то есть полное число втекающих в блок тепловых нейтронов из замедлителя либо поглощаются в блоке, либо вытекают в замедлитель. Из этого баланса

можно выразить скорости поглощения тепловых нейтронов в обеих зонах и величину  $\theta$ :

$$\theta = \frac{J^- - J^+}{V_1 \cdot S_1}. \quad (8.3.12)$$

Для нахождения односторонних токов введем следующие вероятности:

$W_1(S_0 \leftarrow V_1)$  – вероятность того, что тепловой нейтрон, родившийся в замедлителе от однородных и изотропных источников, попадет в блок после любого числа рассеивающих столкновений в замедлителе;

$W_0(S_0 \leftarrow V_0)$  – вероятность тепловому нейтрону пересечь границу  $S_0$  после любого числа рассеивающих столкновений в блоке;

$P_{0a}$  – вероятность того, что нейтрон, пересекший поверхность  $S_0$  блока, будет поглощен в нем после любого числа рассеивающих столкновений;

$P_{1a}$  – вероятность того, что вылетевший из топливного блока нейтрон, будет поглощен в замедлителе после любого числа рассеивающих столкновений.

Таким образом, из общего числа падающих на блок нейтронов  $J^-$  доля  $P_{0a} \cdot J^-$  из них поглотится в блоке, а доля  $(1 - P_{0a}) \cdot J^-$  попадет обратно в замедлитель. Аналогичное соотношение имеет место и для нейтронов, летящих из топлива в замедлитель: а именно,  $P_{1a} \cdot J^+$  нейтронов, вылетевших из блока, поглотятся в замедлителе, а  $(1 - P_{1a}) \cdot J^+$  нейтронов из их числа попадет обратно в топливную зону.

Выразим односторонние токи через эти вероятности:

$$\begin{aligned} J^- &= W_1 \cdot S_1 \cdot V_1 + (1 - P_{1a}) \cdot J^+, \\ J^+ &= (1 - P_{0a}) \cdot J^-. \end{aligned} \quad (8.3.13)$$

Решая эту систему линейных уравнений относительно втекающего и вытекающего тока нейтронов, получим:

$$\begin{aligned}
 J^- &= \frac{W_1}{1 - (1 - P_{1a}) \cdot (1 - P_{0a})} S_1 \cdot V_1, \\
 J^+ &= \frac{W_1 \cdot (1 - P_{0a})}{1 - (1 - P_{1a}) \cdot (1 - P_{0a})} S_1 \cdot V_1.
 \end{aligned}
 \tag{8.3.14}$$

Подставляя эти выражения в формулу (8.3.14), окончательно получим следующие выражения:

$$\theta = \frac{W_1 \cdot P_{0a}}{1 - (1 - P_{1a}) \cdot (1 - P_{0a})}, \quad q = \frac{1 - P_{0a}}{P_{0a}} \cdot \frac{P_{1a}}{W_1} + \frac{1 - W_1}{W_1}.
 \tag{8.3.15}$$

В случае, когда топливную зону можно рассматривать как абсолютно черное тело, получим:  $P_{0a} = 1$ ,  $\theta = W_1$ . При получении выражения (8.3.15) не накладывалось никаких ограничений на угловое распределение нейтронов, пересекающих границу раздела между топливной зоной и зоной замедлителя, и в этом смысле оно является точным.

Однако чтобы вычислить  $\theta$ , необходимо иметь аналитические выражения для вероятностей  $W_1$ ,  $P_{0a}$  и  $P_{1a}$ . Основное отличие этих вероятностей от ранее введенных вероятностей первых столкновений заключается в том, что тепловой нейтрон не меняет своей принадлежности к тепловой группе при рассеивающих столкновениях. Поэтому в этих вероятностях не учитывается каждое столкновение по отдельности, а только конечный результат. Таким результатом может быть либо поглощение нейтронов, либо перелет в другую зону. Тем не менее, их можно выразить через локальные вероятности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фейнберг С.М., Шихов С.Б., Троянский В.Б. Теория ядерных реакторов. Т. I, II. М.: Атомиздат, 1978.
2. Бать Г.А. Основы теории и методов расчета ядерных реакторов. М.: Энергоиздат, 1982.
3. Орлов В.В. Статика однородного ядерного реактора. М.: МИФИ, 1984.
4. Орлов В.В. Статика неоднородного реактора. М.: МИФИ, 1984.
5. Хромов В.В. Физика и анализ гетерогенных активных зон ядерных реакторов: Уч. пособие. М.: МИФИ, 2002.
6. Галанин А.Д. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М.: Энергоатомиздат, 1998.

**НЕКОТОРЫЕ ЯДЕРНЫЕ ДАННЫЕ ПО ОСНОВНЫМ  
ИЗОТОПАМ**

**Значения констант делящихся и сырьевых ядер  
при  $\nu = 2200$  м/с**

Изоотоп	$\sigma_f, \text{б}$	$\sigma_c, \text{б}$	$\sigma_a, \text{б}$	$\sigma_s, \text{б}$	$\nu_f$	$\nu_{эф}$
<sup>233</sup> U	530.6	47	577.6	10.7	2.49	2.28
<sup>235</sup> U	580.2	98.3	678.5	17.6	2.42	2.07
<sup>239</sup> Pu	741.6	271.3	1012.9	8.5	2.88	2.11
<sup>241</sup> Pu	1007.3	368.1	1375.4	12.0	2.93	2.15

Изоотоп	$10^{-24}$ г/см <sup>3</sup>	$\sigma_c,$ б	$\sigma_s,$ б
<sup>238</sup> U	0.0473	2.71	9.0
<sup>232</sup> Th	0.0293	7.56	12.0
UC	0.032	-	-
UO <sub>2</sub>	0.022	-	-

**Значения констант изотопов замедлителей, теплоносителей  
и конструкционных материалов при  $\nu = 2200$  м/с**

Вещество	$\gamma, \text{г/см}^3$	$\sigma_c, \text{б}$	$\sigma_s, \text{б}$	$\xi$	$\sigma_s^*, \text{б}$
H <sub>2</sub> O	1.0	0.66	63	0.948	44
H	-	0.33	38	1.000	20
O	-	~ 0	3.8	0.120	3.8
D <sub>2</sub> O	1.1	0.001	13.6	0.570	10.5
C (12)	1.67	0.004	4.8	0.158	4.8
Be (9)	1.85	0.006	6.0	0.209	6.0
B (10)	2.45	75	4.0	0.171	-
Zr (91)	6.5	0.185	8.0	0.0218	6.2
Fe (56)	7.8	2.62	11.4	0.0353	11.4

\* – относится к области замедления

### Параметры резонансных уровней $^{238}\text{U}$

$E_0$ , эВ	$\sigma_{r0}$ , б	$\Gamma$ , эВ	$\Gamma_n/\Gamma$
6.7	20575	0.027	0.055
20.9	24100	0.034	0.258
36.8	17600	0.057	0.560
66.2	9870	0.048	0.541
80.7	2488	0.024	0.083

### Длина диффузии и возраст тепловых нейтронов для замедлителей

Замедлитель	$\rho/\text{г}/\text{см}^3$	$L$ , см	$\tau$ , $\text{см}^2$
$\text{H}_2\text{O}$	1.0	2.7	27.3
C	1.6	52.5	352
$\text{D}_2\text{O}$	1.1	150	120
$\text{D}_2\text{O}+0.25\% \text{H}_2\text{O}$	1.1	107	123

Владимир Игоревич Савандер  
Максим Александрович Увакин

## **ФИЗИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ**

### **Часть I**

## **ОДНОРОДНАЯ РАЗМНОЖАЮЩАЯ СРЕДА И ТЕОРИЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ СТРУКТУР**

Редактор Н.Н. Антонова  
Компьютерная верстка Г.А. Бобровой

Подписано в печать 29.11.2007                      Формат 60x84 1/16  
Печ.л. 12,5    Уч.-изд.л. 12,5    Тираж 200 экз.    Изд. № 4/43  
Заказ № 0-644

*Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет).  
115409 Москва, Каширское шоссе, 31*

*Типография издательства «Тровант»  
г. Троицк Московской области*