Министерство образования Российской Федерации

Таганрогский государственный радиотехнический университет

Т.В. Алесинская

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ПО КУРСУ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Таганрог 2002

ББК 65 В 641 я73

Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели". Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002, 153 с.

В учебном пособии приведены методические рекомендации по построению математических моделей и решению задач исследования операций, рассмотрены примеры решения задач, предложены задачи для самостоятельного решения.

Предлагаемое учебно-методическое пособие рекомендуется для использования в курсе "Экономико-математические методы и модели" для студентов экономических специальностей.

Табл.52. Ил.45. Библиогр.:18 назв.

Рецензенты:

Г.В. Горелова, д.т.н., профессор ТИУЭ

С.А. Донских, к.т.н., доцент ТГПИ

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ

1) ЛП – линейное программирование;
2) ЦФ – целевая функция;
3) ОДР – область допустимых решений;
4) РЗ – распределительная задача;
5) ТЗ – транспортная задача;
6) УЗ – управление запасами;
7) * – повышенная сложность вопроса или задачи.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В данном учебном пособии даны рекомендации по построению математических моделей и решению задач исследования операций в области: линейного программирования, сетевого планирования, регрессионного анализа, прогнозирования временных рядов, управления запасами.

В целях более эффективного усвоения учебного материала каждая тема содержит краткое теоретическое введение, подробные методические указания с описанием решения конкретных задач, варианты задач для самостоятельного решения, включая задачи повышенной сложности.

Особое внимание в учебном пособии было уделено вопросам построения математических моделей как основополагающему и наиболее творческому этапу решения задач. В связи с тем, что современное компьютерное программное обеспечение позволяет значительно упростить процесс поиска оптимальных решений, наиболее трудоемкие методы решения задач (симплекс-метод, метод потенциалов, методы оптимизации сетевых моделей) в учебном пособии рассмотрены не были.

Часть I. ОДНОИНДЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ОДНОИНДЕКСНЫХ ЗАДАЧ ЛП

1.1. Теоретическое введение

Математическое программирование ("планирование") – это раздел математики, занимающийся разработкой методов отыскания экстремальных значений функции, на аргументы которой наложены ограничения. Методы математического программирования используются в экономических, организационных, военных и др. системах для решения так называемых **распределительных задач**. Распределительные задачи (РЗ) возникают в случае, когда имеющихся в наличии ресурсов не хватает для выполнения каждой из намеченных работ эффективным образом и необходимо наилучшим образом распределить ресурсы по работам в соответствии с выбранным критерием оптимальности.

Линейное программирование (ЛП) является наиболее простым и лучше всего изученным разделом математического программирования. Характерные черты задач ЛП следующие:

1) показатель оптимальности L(X) представляет собой ***линейную*** функцию от элементов решения $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$;

2) ограничительные условия, налагаемые на возможные решения, имеют вид ***линейных*** равенств или неравенств.

Общая форма записи модели задачи ЛП

Целевая функция (ЦФ)

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min),$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le (\ge, =) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le (\ge, =) b_2, \\ \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le (\ge, =) b_m, \\ x_1, x_2, ... x_k \ge 0 \ (k \le n). \end{cases} \tag{1.1}$$

При описании реальной ситуации с помощью линейной модели следует проверять наличие у модели таких свойств, как пропорциональность и аддитивность. **Пропорциональность** означает, что вклад каждой переменной в ЦФ и общий объем потребления соответствующих ресурсов должен быть ***прямо пропорционален*** величине этой переменной. Например, если, продавая j-й товар в общем случае по цене 100 рублей, фирма будет делать скидку при определенном уровне закупки до уровня цены 95 рублей, то будет отсутствовать прямая пропорциональность между доходом фирмы и величиной переменной x_j. Т.е. в разных ситуациях *одна* единица j-го товара будет приносить *разный* доход. **Аддитивность** означает, что ЦФ и ограничения должны представлять собой сумму вкладов от различных переменных. Примером нарушения аддитивности служит ситуация, когда увеличение сбыта одного из конкурирующих видов продукции, производимых одной фирмой, влияет на объем реализации другого.

Допустимое решение – это совокупность чисел (план) $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (1.1).

Оптимальное решение – это план, при котором ЦФ принимает свое максимальное (минимальное) значение.

1.2. Методические рекомендации

Задача № 1.01

Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: A и B. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 т соответственно. Известны расходы A и B на 1 т соответствующих красок (табл. 1.1). Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тыс. руб. для краски 1-го вида; 2 тыс. руб. для краски 2-го вида.

Необходимо построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Таблица 1.1

Параметры задачи о производстве красок

Ингредиенты	Расход ингредиентов, т ингр./т краски		Запас, т ингр./сутки
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
A	1	2	6
B	2	1	8

Решение

Прежде чем построить математическую модель задачи, т.е. записать ее с помощью математических символов, необходимо четко разобраться с экономической ситуацией, описанной в условии. Для этого необходимо с точки зрения ***экономики***, а не математики, ответить на следующие вопросы:

1) Что является ***искомыми величинами*** задачи?

2) Какова ***цель*** решения? Какой ***параметр*** задачи служит критерием эффективности (оптимальности) решения, например, прибыль, себестоимость, время и т.д. В каком ***направлении*** должно изменяться значение этого параметра (к max или к min) для достижения наилучших результатов?

3) Какие ***условия*** в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены? Эти условия устанавливают, как должны соотноситься друг с другом различные параметры задачи, например, количество ресурса, затраченного при производстве, и его запас на складе; количество выпускаемой продукции и емкость склада, где она будет храниться; количество выпускаемой продукции и рыночный спрос на эту продукцию и т.д.

Только после экономического ответа на все эти вопросы можно приступать к записи этих ответов в ***математическом*** виде, т.е. к записи математической модели.

1) Искомые величины являются ***переменными*** задачи, которые как правило обозначаются малыми латинскими буквами с индексами, например, однотипные переменные удобно представлять в виде $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

2) Цель решения записывается в виде ***целевой функции***, обозначаемой, например, $L(X)$. Математическая формула ЦФ $L(X)$ отражает способ расчета значений параметра – критерия эффективности задачи.

3) Условия, налагаемые на переменные и ресурсы задачи, записываются в виде системы равенств или неравенств, т.е. ***ограничений***. Левые и правые части ограничений отражают способ получения (расчет или численные значения из условия задачи) значений тех параметров задачи, на которые были наложены соответствующие условия.

В процессе записи математической модели необходимо указывать единицы измерения переменных задачи, целевой функции и всех ограничений.

Построим модель задачи №1.01, используя описанную методику.

Переменные задачи

В задаче №1.01 требуется установить, сколько краски каждого вида надо производить. Поэтому искомыми величинами, а значит, и переменными задачи являются *суточные объемы производства* каждого вида красок:

x_1 – суточный объем производства краски 1-го вида, [т краски/сутки];

x_2 – суточный объем производства краски 2-го вида, [т краски/сутки].

Целевая функция

В условии задачи №1.01 сформулирована цель – добиться максимального дохода от реализации продукции. Т.е. критерием эффективности служит параметр *суточного дохода*, который должен стремится к *максимуму*. Чтобы рассчитать величину суточного дохода от продажи красок обоих видов, необходимо знать объемы производства красок, т.е. x_1 и x_2 т краски в сутки, а также оптовые цены на краски 1-го и 2-го видов – согласно условию, соответственно 3 и 2 тыс. руб. за 1 т краски. Таким образом, доход от продажи суточного объема производства краски 1-го вида равен $3x_1$ тыс. руб. в сутки, а от продажи краски 2-го вида – $2x_2$ тыс. руб. в сутки. Поэтому запишем ЦФ в виде суммы дохода от продажи красок 1-го и 2-го видов (при допущении независимости объемов сбыта каждой из красок)

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max \text{ [тыс. руб./сутки]},$$

$$\left[\frac{\text{тыс.руб.}}{\text{т краски}} \cdot \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}} = \frac{\text{тыс.руб.}}{\text{сутки}}\right].$$

Ограничения

Возможные объемы производства красок x_1 и x_2 ограничиваются следующими условиями:

- количество ингредиентов A и B, израсходованное в течение суток на производство красок обоих видов, не может превышать суточного запаса этих ингредиентов на складе;
- согласно результатам изучения рыночного спроса суточный объем производства краски 2-го вида может превышать объем производства краски 1-го вида, но не более, чем на 1 т краски;
- объем производства краски 2-го вида не должен превышать 2 т в сутки, что также следует из результатов изучения рынков сбыта;
- объемы производства красок не могут быть отрицательными.

Таким образом, все ограничения задачи №1.01 делятся на 3 группы, обусловленные:

1) расходом ингредиентов;
2) рыночным спросом на краску;
3) неотрицательностью объемов производства.

Ограничения **по расходу** любого из ингредиентов имеют следующую ***содержательную*** форму записи

$$\begin{pmatrix} \text{Расход конкретного ингредиента} \\ \text{на производство обоих видов краски} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \text{Максимально возможный} \\ \text{запас данного ингредиента} \end{pmatrix}.$$

Запишем эти ограничения в ***математической*** форме.

Левая часть ограничения – это формула расчета суточного расхода конкретного ингредиента на производство красок. Так из условия известен расход ингредиента A на производство 1 т краски 1-го вида (1 т ингр. A) и 1 т краски 2-го вида (2 т ингр. A) (см. табл.1.1). Тогда на производство x_1 т краски 1-го вида и x_2 т краски 2-го вида потребуется $1x_1 + 2x_2$ т ингр. A.

Правая часть ограничения – это величина суточного запаса ингредиента на складе, например, 6 т ингредиента A в сутки (см. табл.1.1). Таким образом, ограничение по расходу A имеет вид

$$1x_1 + 2x_2 \le 6 \qquad \left[\frac{\text{т ингр.A}}{\text{т краски}} \cdot \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т ингр.A}}{\text{сутки}}\right].$$

Аналогична математическая запись ограничения по расходу В

$$2x_1 + 1x_2 \le 8 \quad \left[\frac{\text{т ингр.В}}{\text{т краски}} \cdot \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т ингр.В}}{\text{сутки}}\right].$$

Примечание 1.1. Следует всегда проверять размерность левой и правой части каждого из ограничений, поскольку их несовпадение свидетельствует о принципиальной ошибке при составлении ограничений.

Ограничение по суточному **объему производства** краски 1-го вида по сравнению с объемом производства краски 2-го вида имеет

содержательную форму

$$\begin{pmatrix}\text{Превышение объема производства краски 2 - го вида} \\ \text{над объемом производства краски 1 - го вида}\end{pmatrix} \le \left(1\ \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right)$$

и ***математическую*** форму

$$x_2 - x_1 \le 1 \quad \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right].$$

Ограничение по суточному **объему производства** краски 1-го вида имеет

содержательную форму

$$(\text{Спрос на краску 1 - го вида}) \le \left(2\ \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right)$$

и ***математическую*** форму

$$x_1 \le 2 \quad \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right].$$

Неотрицательность объемов производства задается как

$$\begin{matrix} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0 \end{matrix}.$$

Таким образом, ***математическая модель*** этой задачи имеет вид

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max \ [\text{руб./сутки}]$$

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 \le 6 \ [\text{т ингр. А/сутки}], \\
2x_1 + x_2 \le 8 \ [\text{т ингр. В/сутки}], \\
-x_1 + x_2 \le 1 \ [\text{т краски/сутки}], \\
\qquad x_2 \le 2 \ [\text{т краски/сутки}], \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \ [\text{т краски/сутки}].
\end{cases}
$$

Задача №1.02

Выполнить заказ по производству 32 изделий $И_1$ и 4 изделий $И_2$ взялись бригады $Б_1$ и $Б_2$. Производительность бригады $Б_1$ по производству изделий $И_1$ и $И_2$ составляет соответственно 4 и 2 изделия в час, фонд рабочего времени этой бригады 9,5 ч. Производительность бригады $Б_2$ – соответственно 1 и 3 изделия в час, а ее фонд рабочего времени – 4 ч. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады $Б_1$ равны соответственно 9 и 20 руб., для бригады $Б_2$ – 15 и 30 руб.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую найти оптимальный объем выпуска изделий, обеспечивающий минимальные затраты на выполнение заказа.

Решение

Переменные задачи

Искомыми величинами в задаче являются объемы выпуска изделий. Изделия $И_1$ будут выпускаться двумя бригадами $Б_1$ и $Б_2$. Поэтому необходимо *различать* количество изделий $И_1$, произведенных бригадой $Б_1$, и количество изделий $И_1$, произведенных бригадой $Б_2$. Аналогично, объемы выпуска изделий $И_2$ бригадой $Б_1$ и бригадой $Б_2$ также являются различными величинами. Вследствие этого в данной задаче 4 переменные. Для удобства восприятия будем использовать двухиндексную форму записи x_{ij} – количество изделий $И_j$ (j=1,2), изготавливаемых бригадой $Б_i$ (i=1,2), а именно,

x_{11} – количество изделий $И_1$, изготавливаемых бригадой $Б_1$, [шт.];

x_{12} – количество изделий $И_2$, изготавливаемых бригадой $Б_1$, [шт.];

x_{21} – количество изделий $И_1$, изготавливаемых бригадой $Б_2$, [шт.];

x_{22} – количество изделий $И_2$, изготавливаемых бригадой $Б_2$, [шт.].

Примечание 1.2. В данной задаче нет необходимости привязываться к какому-либо временному интервалу (в задаче №1.01 была привязка к суткам), поскольку здесь требуется найти не объем выпуска за определенное время, а способ распределения известной плановой величины заказа между бригадами.

Целевая функция

Целью решения задачи является выполнение плана с *минимальными* затратами, т.е. критерием эффективности решения служит показатель *затрат на выполнение всего заказа*. Поэтому ЦФ должна быть представлена формулой расчета этих затрат. Затраты каждой бригады на производство одного изделия $И_1$ и $И_2$ известны из условия. Таким образом, ЦФ имеет вид

$$L(X) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to \min,$$

$$\left[\frac{\text{руб.}}{\text{шт.}} \cdot \text{шт.} = \text{руб.}\right].$$

Ограничения

Возможные объемы производства изделий бригадами ограничиваются следующими условиями:

- общее количество изделий $И_1$, выпущенное обеими бригадами, должно равняться 32 шт., а общее количество изделий $И_2$ – 4 шт.;
- время, отпущенное на работу над данным заказом, составляет для бригады $Б_1$ – 9,5 ч, а для бригады $Б_2$ – 4 ч;
- объемы производства изделий не могут быть отрицательными величинами.

Таким образом, все ограничения задачи №1.02 делятся на 3 группы, обусловленные:

1) величиной заказа на производство изделий;
2) фондами времени, выделенными бригадам;
3) неотрицательностью объемов производства.

Для удобства составления ограничений запишем исходные данные в виде таблицы 1.2.

Таблица 1.2

Исходные данные задачи №1.02

Бригада	Производительность бригад, шт/ч		Фонд рабочего времени, ч
	$И_1$	$И_2$	
$Б_1$	4	2	9,5
$Б_2$	1	3	4
Заказ, шт	32	4	

Ограничения по **заказу** изделий имеют следующую ***содержательную*** форму записи

$$\left(\begin{matrix}\text{количество изделий } И_1, \\ \text{произведенных бригадами } Б_1 \text{ и } Б_2\end{matrix}\right) = (32 \text{ шт.})$$

и

$$\left(\begin{matrix}\text{количество изделий } И_2, \\ \text{произведенных бригадами } Б_1 \text{ и } Б_2\end{matrix}\right) = (4 \text{ шт.}).$$

Математическая форма записи имеет вид

$$x_{11} + x_{21} = 32 \quad [\text{шт.}] = [\text{шт.}] \text{ и}$$

$$x_{12} + x_{22} = 4 \quad [\text{шт.}] = [\text{шт.}].$$

Ограничение по **фондам времени** имеет ***содержательную*** форму

$$\left(\begin{matrix}\text{Общее время, затраченное бригадой } Б_1 \\ \textit{на} \text{ выпуск изделий } И_1 \text{ и } И_2\end{matrix}\right) \le (9{,}5 \text{ ч})$$

и

$$\begin{pmatrix} \text{Общее время, затраченное бригадой } Б_2 \\ \text{на выпуск изделий } И_1 \text{ и } И_2 \end{pmatrix} \le (4\ ч).$$

Проблема заключается в том, что в условии задачи прямо не задано время, которое тратят бригады на выпуск одного изделия $И_1$ или $И_2$, т.е. не задана трудоемкость производства. Но имеется информация о производительности каждой бригады, т.е. о количестве производимых изделий в 1 ч. Трудоемкость Тр и производительность Пр являются обратными величинами, т.е.

$$Тр = \frac{1}{Пр} \quad \left[\frac{ч}{шт.}\right] = \left[1 \Big/ \frac{шт.}{ч}\right].$$

Поэтому используя табл.1.2, получаем следующую информацию:

$\to \frac{1}{4}$ ч тратит бригада $Б_1$ на производство одного изделия $И_1$;

$\to \frac{1}{2}$ ч тратит бригада $Б_1$ на производство одного изделия $И_2$;

$\to \frac{1}{1}$ ч тратит бригада $Б_2$ на производство одного изделия $И_1$;

$\to \frac{1}{3}$ ч тратит бригада $Б_2$ на производство одного изделия $И_2$.

Запишем ограничения по фондам времени в ***математическом*** виде

$$\frac{x_{11}}{4} + \frac{x_{12}}{2} \le 9{,}5 \quad \left[\frac{ч}{шт.} \cdot шт\right] \le [ч]$$

и

$$\frac{x_{21}}{1} + \frac{x_{22}}{3} \le 4 \quad \left[\frac{ч}{шт.} \cdot шт\right] \le [ч].$$

Неотрицательность объемов производства задается как

$$x_{ij} \ge 0 \ \ (i = 1{,}2;\ j = 1{,}2).$$

Таким образом, ***математическая модель*** этой задачи имеет вид

$$L(X) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to \min \ [\text{руб.}],$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 32 & [\text{шт.}], \\ x_{12} + x_{22} = 4 & [\text{шт.}], \\ \dfrac{x_{11}}{4} + \dfrac{x_{12}}{2} \le 9{,}5 & [\text{ч}], \\ \dfrac{x_{21}}{1} + \dfrac{x_{22}}{3} \le 4 & [\text{ч}], \\ x_{ij} \ge 0 \ (i = 1{,}2;\ j = 1{,}2) & [\text{шт.}]. \end{cases}$$

*Задача №1.03**

Для пошива одного изделия требуется выкроить из ткани 6 деталей. На швейной фабрике были разработаны два варианта раскроя ткани. В табл.1.3 приведены характеристики вариантов раскроя 10 $м^2$ ткани и комплектность, т.е. количество деталей определенного вида, которые необходимы для пошива одного изделия. Ежемесячный запас ткани для пошива изделий данного типа составляет 405 $м^2$. В ближайший месяц планируется сшить 90 изделий.

Постройте математическую модель задачи, позволяющую в ближайший месяц выполнить план по пошиву с минимальным количеством отходов.

Таблица 1.3

Характеристики вариантов раскроя отрезов ткани по 10 $м^2$

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./отрез						Отходы, $м^2$/отрез
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	
1	60	0	90	40	70	90	0,5
2	80	35	20	78	15	0	0,35
Комплектность, шт./изделие	1	2	2	2	2	2	

Решение

Переменные задачи

В данной задаче искомые величины явно не указаны, но сказано, что должен быть выполнен ежемесячный план по пошиву 90 изделий. Для пошива

90 изделий в месяц требуется раскроить строго определенное количество деталей. Крой производится из отрезов ткани по 10 м^2 двумя различными способами, которые позволяют получить различное число деталей. Поскольку заранее неизвестно, сколько ткани будет раскраиваться первым способом и сколько – вторым, то в качестве искомых величин можно задать *количество отрезов ткани по 10* м^2, раскроенных каждым из способов:

x_1 – количество отрезов ткани по 10 м^2, раскроенных первым способом в течение месяца, [отрез./мес.];

x_2 – количество отрезов ткани по 10 м^2, раскроенных вторым способом в течение месяца, [отрез./мес.].

Целевая функция

Целью решения задачи является выполнение плана при минимальном количестве отходов. Поскольку количество изделий строго запланировано (90 шт./мес.), то этот параметр не описывает ЦФ, а относится к ограничению, невыполнение которого означает, что задача не решена. А критерием эффективности выполнения плана служит параметр "количество отходов", который необходимо свести к минимуму. Поскольку при раскрое одного отреза (10 м^2) ткани по 1-му варианту получается 0,5 м^2 отходов, а по 2-му варианту – 0,35 м^2 (см. табл. 1.3), то общее количество отходов при крое (ЦФ) имеет вид

$$L(X) = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \to \min,$$

$$\left[\frac{\text{м}^2\ \text{отх.}}{\text{отрез.}} \cdot \frac{\text{отрез.}}{\text{мес.}} = \frac{\text{м}^2\ \text{отх.}}{\text{мес.}}\right].$$

Ограничения

Количество раскроев ткани различными способами ограничивается следующими условиями:

- должен быть выполнен план по пошиву изделий, другими словами, общее количество выкроенных деталей должно быть таким, чтобы из него можно было пошить 90 изделий в месяц, а именно: деталей 1-го вида должно быть как минимум 90 и деталей остальных видов – как минимум по 180 (см. комплектность в табл.1.3).

- расход ткани не должен превышать месячного запаса его на складе;
- количество отрезов раскроенной ткани не может быть отрицательным.

Ограничения по **плану пошива** пальто имеют следующую ***содержательную*** форму записи

$$\begin{pmatrix}\text{Общее количество деталей №1,}\\ \text{выкроенных по всем вариантам}\end{pmatrix} \geq (90\ \text{штук});$$

$$\begin{pmatrix}\text{Общее количество деталей №2,}\\ \text{выкроенных по всем вариантам}\end{pmatrix} \geq (180\ \text{штук});$$

$$\dots$$

$$\begin{pmatrix}\text{Общее количество деталей №6,}\\ \text{выкроенных по всем вариантам}\end{pmatrix} \geq (180\ \text{штук}).$$

Математически эти ограничения записываются в виде

$$\begin{aligned} 60x_1 + 80x_2 &\geq 90; \\ 35x_2 &\geq 180; \\ 90x_1 + 20x_2 &\geq 180; \\ 40x_1 + 78x_2 &\geq 180; \\ 70x_1 + 15x_2 &\geq 180; \\ 90x_1 \qquad &\geq 180; \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\text{шт.}}{\text{отрез.}} \cdot \frac{\text{отрез.}}{\text{мес.}}\right] \geq \left[\frac{\text{шт.}}{\text{мес.}}\right].$$

Ограничение по **расходу ткани** имеет следующие формы записи:

содержательную

$$\begin{pmatrix}\text{Общее количество ткани,}\\ \text{раскроенной за месяц}\end{pmatrix} \leq \left(405\ \text{м}^2\right)$$

и ***математическую***

$$x_1 + x_2 \le \frac{405}{10},$$

$$\left[\frac{\text{отрез.}}{\text{мес.}}\right] \le \left[\frac{\text{м}^2 \cdot \text{отрез.}}{\text{мес.} \cdot \text{м}^2}\right].$$

Неотрицательность количества раскроенных отрезов задается в виде

$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 0.$$

Таким образом, ***математическая модель*** задачи №1.03 имеет вид

$$L(X) = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \to \min \ [\text{м}^2 \text{ отх./мес.}],$$

$$\begin{cases} 60x_1 + 80x_2 \ge 90 & [\text{шт./мес.}], \\ \qquad 35x_2 \ge 180 & [\text{шт./мес.}], \\ 90x_1 + 20x_2 \ge 180 & [\text{шт./мес.}], \\ 40x_1 + 78x_2 \ge 180 & [\text{шт./мес.}], \\ 70x_1 + 15x_2 \ge 180 & [\text{шт./мес.}], \\ 90x_1 \ge 180 & [\text{шт./мес.}], \\ x_1 + x_2 \le 40{,}5 & [\text{отрез./мес.}], \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & [\text{отрез./мес.}]. \end{cases}$$

Вопрос 1.1*. При составлении математической модели задачи на следующий месяц следует учесть, что с прошлого месяца, возможно, остались выкроенные, но неиспользованные детали. Как это сделать?

1.3. Варианты задач для самостоятельного решения

Задача №1.1

Фирма выпускает три вида изделий. В процессе производства используются три технологические операции. На рис.1.1 показана технологическая схема производства изделий

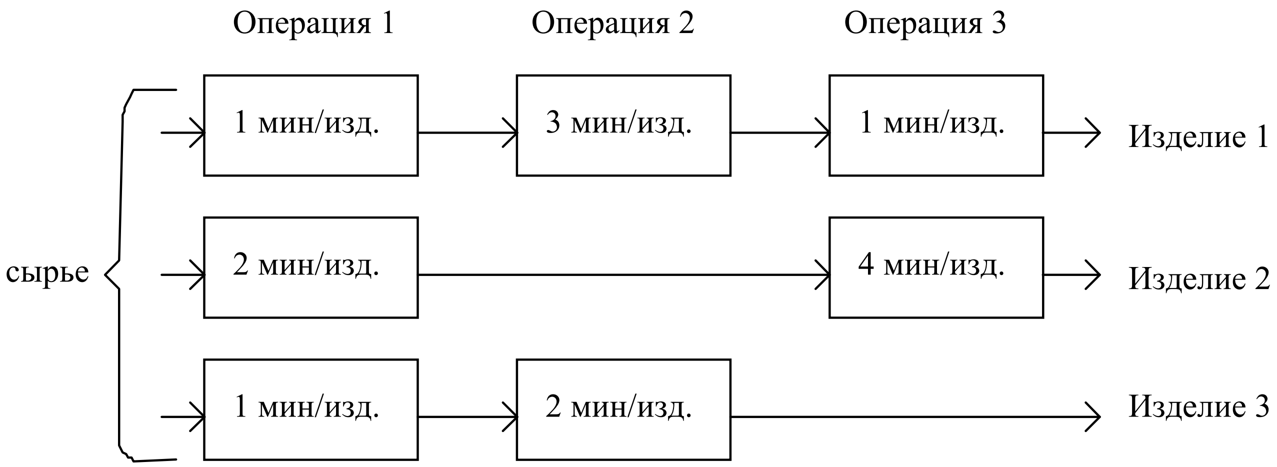

Рис.1.1. Технологическая схема производства

Фонд рабочего времени ограничен следующими предельными значениями: для первой операции – 430 мин; для второй операции – 460 мин; для третьей операции – 420 мин. Изучение рынка сбыта показало, что ожидаемая прибыль от продажи одного изделия видов 1, 2 и 3 составляет 3, 2 и 5 рублей соответственно.

Постройте математическую модель, позволяющую найти наиболее выгодный суточный объем производства каждого вида продукции?

Задача №1.2

При изготовлении изделий $И_1$ и $И_2$ используются сталь и цветные металлы, а также токарные и фрезерные станки. По технологическим нормам на производство единицы изделия $И_1$ требуется 300 и 200 станко-часов соответственно токарного и фрезерного оборудования, а также 10 и 20 кг соответственно стали и цветных металлов. Для производства единицы изделия $И_2$ требуется 400, 100, 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов.

Цех располагает 12400 и 6800 станко-часами соответственно токарного и фрезерного оборудования и 640 и 840 кг соответственно стали и цветных металлов. Прибыль от реализации единицы изделия $И_1$ составляет 6 руб. и от единицы изделия $И_2$ – 16 руб.

Постройте математическую модель задачи, используя в качестве показателя эффективности прибыль и учитывая, что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

Задача №1.3

Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 условных единиц (усл. ед.), жиров – не менее 70 и витаминов – не менее 10 усл. ед. Содержание их в каждой единице продуктов $П_1$ и $П_2$ равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1) усл. ед. Стоимость 1 ед. продукта $П_1$ – 2 руб., $П_2$ –3 руб.

Постройте математическую модель задачи, позволяющую так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ.

Задача №1.4

В районе лесного массива имеются лесопильный завод и фанерная фабрика. Чтобы получить 2,5 м^3 коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2,5 м^3 еловых и 7,5 м^3 пихтовых лесоматериалов. Для приготовления листов фанеры по 100 м^2 требуется 5 м^3 еловых и 10 м^3 пихтовых лесоматериалов. Лесной массив содержит 80 м^3 еловых и 180 м^3 пихтовых лесоматериалов.

Согласно условиям поставок, в течение планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 10 м^3 пиломатериалов и 1200 м^2 фанеры. Доход с 1 м^3 пиломатериалов составляет 160 руб., а со 100 м^2 фанеры – 600 руб.

Постройте математическую модель для нахождения плана производства, максимизирующего доход.

Примечание 1.3. При построении модели следует учесть тот факт, что пиломатериалы могут быть реализованы только в виде неделимого комплекта размером 2,5 $м^3$, а фанера – в виде неделимых листов по 100 $м^2$.

Задача №1.5

С вокзала можно отправлять ежедневно курьерские и скорые поезда. Вместимость вагонов и наличный парк вагонов на станции указаны в табл.1.4.

Таблица 1.4

Исходные данные задачи №1.5

Характеристики парка вагонов	Тип вагона				
	Багажный	Почтовый	Плацкартный	Купейный	Мягкий
Число вагонов в поезде, шт.:					
курьерском	1	–	5	6	3
скором	1	1	8	4	1
Вместимость вагонов, чел.	–	–	58	40	32
Наличный парк вагонов, шт.	12	8	81	70	27

Постройте математическую модель задачи, на основании которой можно найти такое соотношение между числом курьерских и скорых поездов, чтобы число ежедневно отправляемых пассажиров достигло максимума.

*Задача №1.6**

Управление городским автобусным парком решило провести исследование возможности более рациональной организации своей работы с целью снижения интенсивности внутригородского движения. Сбор и обработка необходимой информации позволили сделать вывод, что необходимое минимальное количество автобусов существенно меняется в течение суток (рис.1.2). Длительность непрерывного использования автобусов на линии равна 8 ч в сутки (с учетом необходимых затрат времени на текущий ремонт и обслуживание). График перекрывающихся смен представлен на рис.1.3.

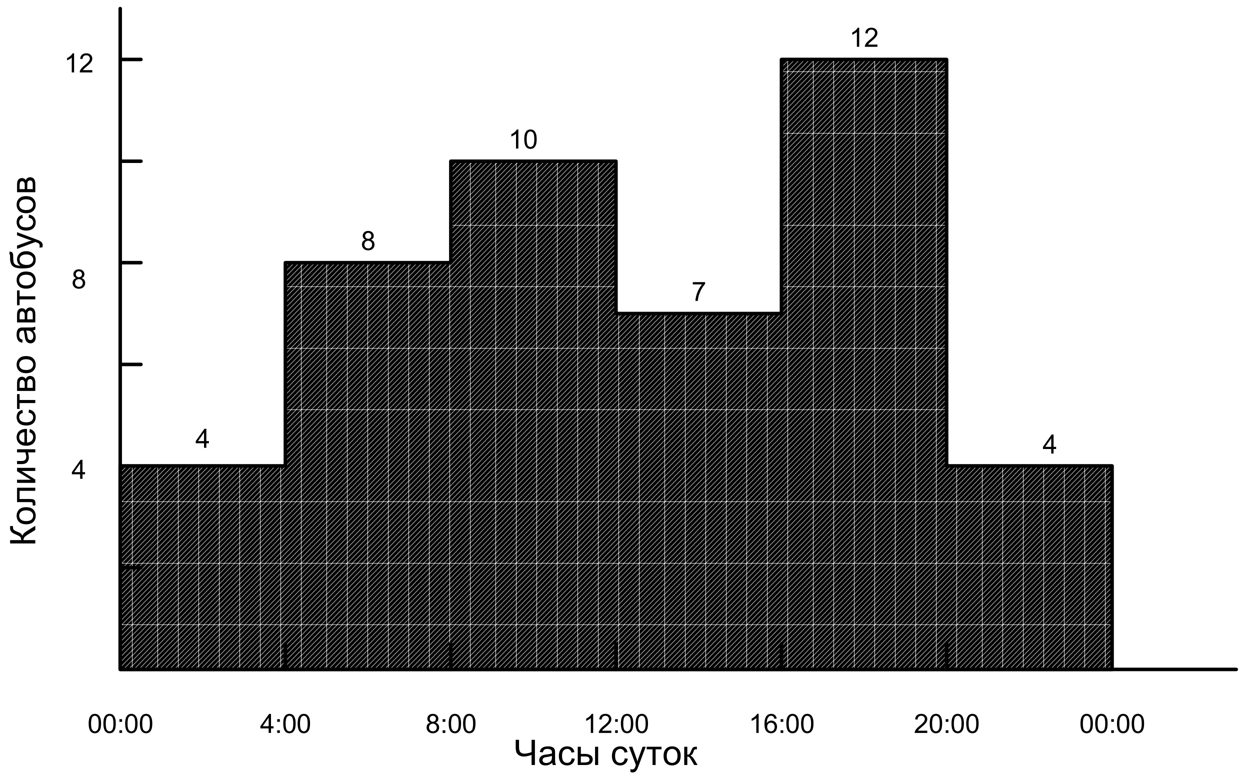

Рис.1.2. Минимально необходимое количество автобусов на линии

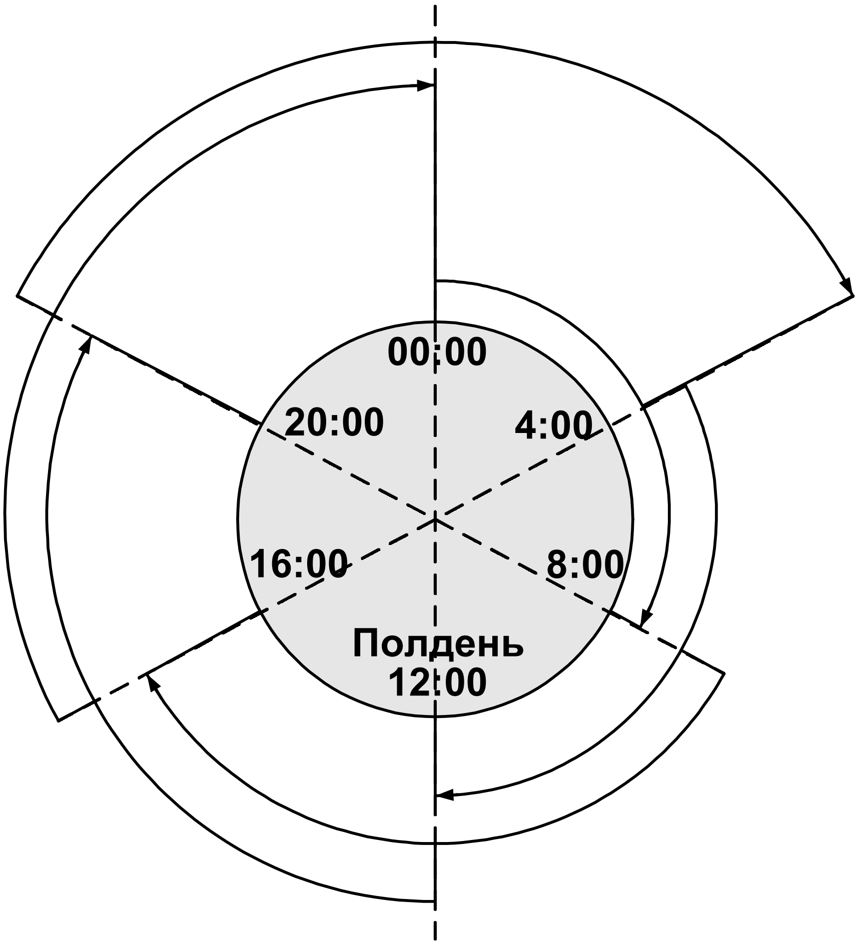

Рис.1.3. График перекрывающихся смен

Постройте математическую модель, позволяющую узнать, какое количество автобусов необходимо выпускать на линию в каждой из смен при условии, что общее количество автобусов, выходящих на линию в течение суток, должно быть минимальным.

*Задача №1.7**

Служба снабжения завода получила от поставщиков 500 стальных прутков длиной 5 м. Их необходимо разрезать на детали A и B длиной соответственно 2 и 1,5 м, из которых затем составляются комплекты. В каждый комплект входят 3 детали A и 2 детали B. Характеристики возможных вариантов раскроя прутков представлены в табл.1.5.

Таблица 1.5

Характеристики возможных вариантов раскроя прутков

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./пруток		Отходы, м/пруток
	A	B	
1	2	0	1
2	1	2	0
3	0	3	0,5
Комплектность, шт./компл.	3	2	

Постройте математическую модель задачи, позволяющую найти план раскроя прутков, максимизирующий количество комплектов.

Примечание 1.4. В ЦФ могут входить не все переменные задачи.

*Задача №1.8**

Малое предприятие выпускает детали A и B. Для этого оно использует литье, подвергаемое токарной обработке, сверлению и шлифованию. Производительность станочного парка предприятия по обработке деталей A и B приведена в табл.1.6.

Предполагая, что спрос на любую комбинацию деталей A и B обеспечен, постройте математическую модель для нахождения плана их выпуска, максимизирующего прибыль.

Таблица 1.6

Исходные данные задачи №1.8

Станки	Производительность, шт./ч		Стоимость станочного времени, руб./ч
	A	B	
Токарные	25	40	20
Сверлильные	28	35	14
Шлифовальные	35	25	17,5
Цена детали, руб.:			
покупная	2	3	
продажная	5	6	

*Задача №1.9**

Ежедневно в ресторане фирменный коктейль (порция составляет 0,33 л) заказывают в среднем 600 человек. Предполагается, что в ближайшее время их количество увеличится в среднем на 50 человек. Согласно рецепту в составе коктейля должно быть:

- не менее 20%, но и не более 35% спирта;
- не менее 2% сахара;
- не более 5% примесей;
- не более 76% воды;
- не менее 7% и не более 12% сока.

В табл. 1.7 приведены процентный состав напитков, из которых смешивается коктейль, и их количество, которое ресторан может ежедневно выделять на приготовление коктейля.

Таблица 1.7

Процентный состав и запасы напитков

Напиток	Спирт	Вода	Сахар	Примеси	Количество, л/сут.
Водка	40%	57%	1%	2%	50
Вино	18%	67%	9%	6%	184
Сок	0%	88%	8%	4%	46

Постройте модель, на основании которой можно будет определить, хватит ли ресторану имеющихся ежедневных запасов напитков для удовлетворения возросшего спроса на коктейль.

*Задача № 1.10**

Продукция бумажной фирмы выпускается в виде бумажных рулонов стандартной ширины – по 20 ед. ширины. По специальным заказам потребителей фирма поставляет рулоны и других размеров, для чего производится разрезание стандартных рулонов. Типичные заказы на рулоны нестандартных размеров приведены в табл.1.8.

Таблица 1.8

Варианты заказов на рулоны нестандартных размеров

Заказ	Требуемая ширина рулона, ед. шир.	Требуемое количество рулонов, шт.
1	5	150
2	7	200
3	9	300

Все допустимые варианты разрезания рулонов приведены в табл.1.9. Рис.1.4 иллюстрирует 1-й вариант раскроя рулонов.

Таблица 1.9

Допустимые варианты раскроя рулонов

Требуемая ширина, ед. шир.	Вариант раскроя рулонов						Минимальное кол-во рулонов, шт.
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	
5	0	2	2	4	1	0	150
7	1	1	0	0	2	0	200
9	1	0	1	0	0	2	300
Потери, ед. шир.	4	3	1	0	1	2	

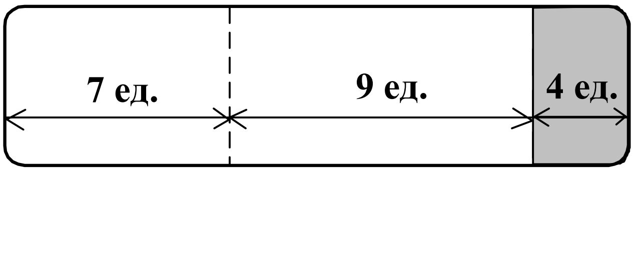

Рис.1.4. 1-й вариант раскроя рулонов

Постройте математическую модель, позволяющую найти такой план разрезания рулонов, при котором поступившие заказы на нестандартные рулоны удовлетворяются с минимальными потерями (т.е. непригодными для реализации остатками рулонов).

Примечание 1.5. В данной задаче для удобства записи модели можно ввести переменные, не являющиеся *искомыми* величинами.

2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОИНДЕКСНЫХ ЗАДАЧ

2.1. Теоретическое введение

Графический метод довольно прост и нагляден для решения задач ЛП с двумя переменными. Он основан на *геометрическом* представлении допустимых решений и ЦФ задачи.

Каждое из неравенств задачи ЛП (1.1) определяет на координатной плоскости (x_1, x_2) некоторую полуплоскость (рис. 2.1), а система неравенств в целом – пересечение соответствующих плоскостей. Множество точек пересечения данных полуплоскостей называется **областью допустимых решений** (ОДР). ОДР всегда представляет собой **выпуклую** фигуру, т.е. обладающую следующим свойством: если две точки А и В принадлежат этой фигуре, то и весь отрезок АВ принадлежит ей. ОДР графически может быть представлена выпуклым многоугольником, неограниченной выпуклой многоугольной областью, отрезком, лучом, одной точкой. В случае несовместности системы ограничений задачи (1.1) ОДР является пустым множеством.

Примечание № 2.1. Все вышесказанное относится и к случаю, когда система ограничений (1.1) включает равенства, поскольку любое равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

можно представить в виде системы двух неравенств (см. рис. 2.1)

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i. \end{cases}$$

ЦФ $L(X) = c_1x_1 + c_2x_2$ при фиксированном значении $L(X) = L$ определяет на плоскости прямую линию $c_1x_1 + c_2x_2 = L$. Изменяя значения L, мы получим семейство параллельных прямых, называемых **линиями уровня**.

Это связано с тем, что изменение значения L повлечет изменение лишь длины отрезка, отсекаемого линией уровня на оси x_2 (начальная ордината), а угловой коэффициент прямой $\mathrm{tg}\alpha = \frac{-c_1}{c_2}$ останется постоянным (см. рис. 2.1). Поэтому для решения будет достаточно построить одну из линий уровня, произвольно выбрав значение L.

Вектор $\vec{C} = (c_1; c_2)$ с координатами из коэффициентов ЦФ при x_1 и x_2 перпендикулярен к каждой из линий уровня (см. рис. 2.1). ***Направление вектора*** $\vec{C}$ ***совпадает*** с направлением ***возрастания*** ЦФ, что является важным моментом для решения задач. Направление ***убывания*** ЦФ ***противоположно направлению вектора*** $\vec{C}$.

Суть графического метода заключается в следующем. По направлению (против направления) вектора $\vec{C}$ в ОДР производится поиск оптимальной точки $X^* = \left(x_1^*; x_2^*\right)$. Оптимальной считается точка, через которую проходит линия уровня L_{max} (L_{min}), соответствующая наибольшему (наименьшему) значению функции $L(X)$. Оптимальное решение всегда находится на границе ОДР, например, в последней вершине многоугольника ОДР, через которую пройдет целевая прямая, или на всей его стороне.

При поиске оптимального решения задач ЛП возможны следующие ситуации: существует единственное решение задачи; существует бесконечное множество решений (**альтернативный оптиум**); ЦФ не ограничена; область допустимых решений – единственная точка; задача не имеет решений.

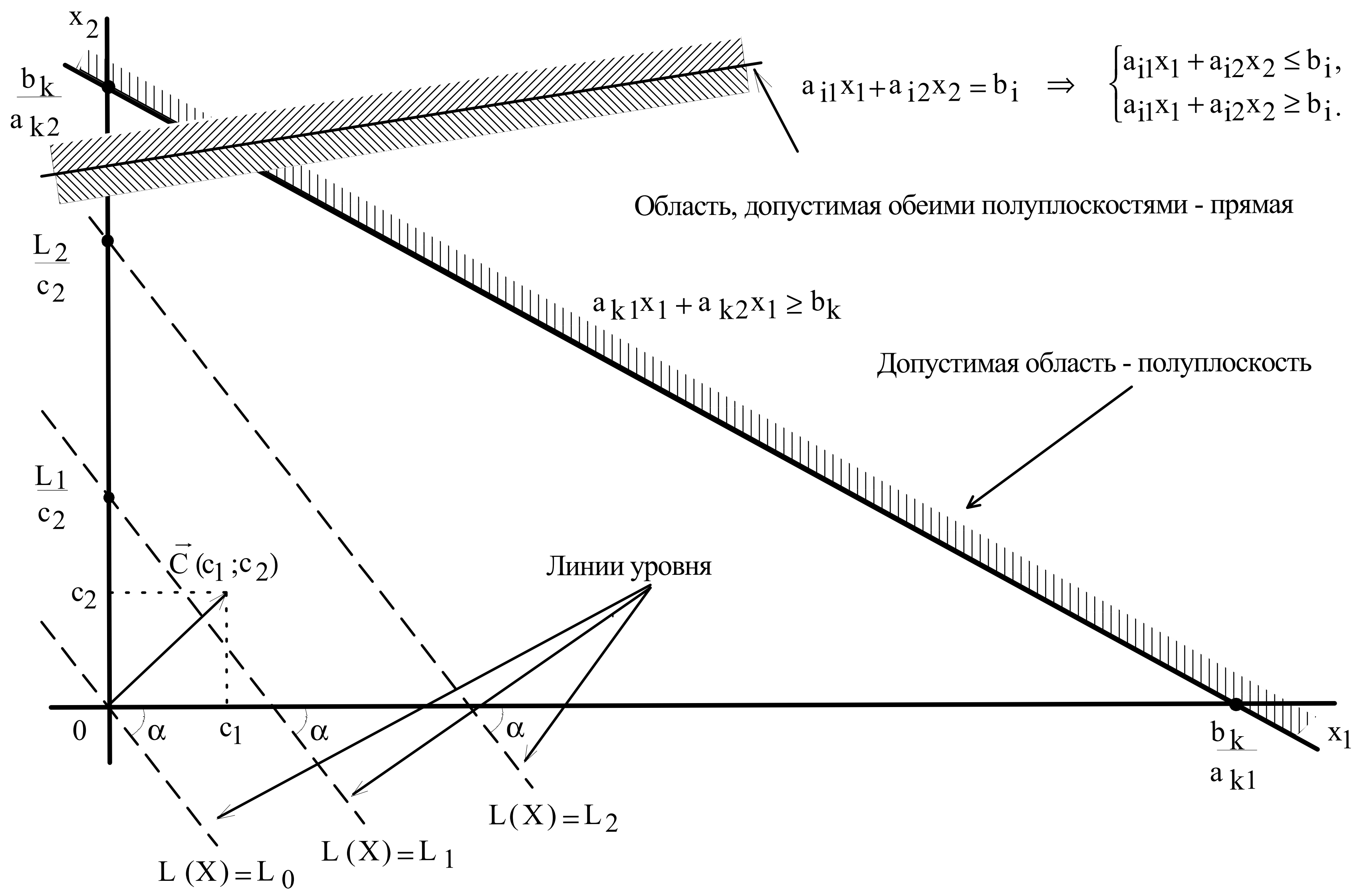

Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация ограничений и ЦФ задачи ЛП (1.1)

2.2. Методика решения задач ЛП графическим методом

I. В ограничениях задачи (1.1) замените знаки неравенств на знаки точных равенств и постройте соответствующие прямые.

II. Найдите и заштрихуйте полуплоскости, разрешенные каждым из ограничений-неравенств задачи (1.1). Для этого подставьте в конкретное неравенство координаты какой-либо точки [например, (0;0)], и проверьте истинность полученного неравенства.

Если неравенство истинное,

то надо заштриховать полуплоскость, содержащую данную точку;

иначе (неравенство ложное) надо заштриховать полуплоскость, не содержащую данную точку.

Поскольку x_1 и x_2 должны быть неотрицательными, то их допустимые значения всегда будут находиться выше оси x_1 и правее оси x_2, т.е. в I-м квадранте.

Ограничения-равенства разрешают только те точки, которые лежат на соответствующей прямой, поэтому выделите на графике такие прямые.

III. Определите ОДР как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и выделите ее. При отсутствии ОДР задача ***не имеет решений***, о чем сделайте соответствующий вывод.

IV. Если ОДР – не пустое множество, то постройте целевую прямую, т.е. любую из линий уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = L$, где L – произвольное число, например, кратное c_1 и c_2, т.е. удобное для проведения расчетов. Способ построения аналогичен построению прямых ограничений.

V. Постройте вектор $\vec{C} = (c_1, c_2)$, который начинается в точке (0;0), заканчивается в точке (c_1, c_2). Если целевая прямая и вектор $\vec{C}$ построены верно, то они будут ***перпендикулярны***.

VI. При поиске max ЦФ передвигайте целевую прямую ***в направлении*** вектора $\vec{C}$, при поиске min ЦФ – ***против направления*** вектора $\vec{C}$. ***Последняя*** по ходу движения вершина ОДР будет точкой max или min ЦФ. Если такой точки (точек) не существует, то сделайте вывод о ***неограниченности ЦФ на множестве планов*** сверху (при поиске max) или снизу (при поиске min).

VII. Определите координаты точки max (min) ЦФ $X^* = \left(x_1^*; x_2^*\right)$ и вычислите значение ЦФ $L\left(X^*\right)$. Для вычисления координат оптимальной точки X^* решите систему уравнений прямых, на пересечении которых находится X^*.

Задача № 2.01

Найдем оптимальное решение задачи № 1.01 о красках, математическая модель которой имеет вид

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1, & (3) \\ \qquad\quad x_2 \le 2, & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Построим прямые ограничений, для чего вычислим координаты точек пересечения этих прямых с осями координат (рис. 2.2).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 = 1, & (3) \\ \qquad\quad x_2 = 2. & (4) \end{cases}$$

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (2) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 8, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (3) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Прямая (4) проходит через точку $x_2 = 2$ параллельно оси x_1.

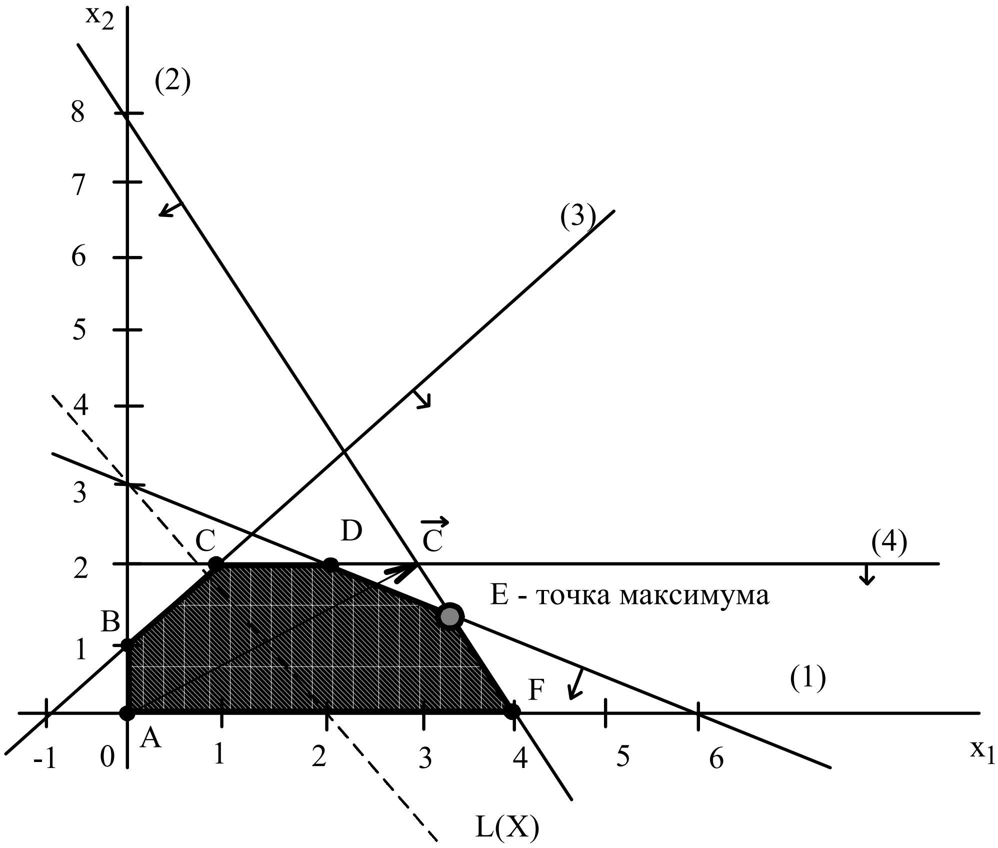

Рис. 2.2. Графическое решение задачи № 2.01

Определим ОДР. Например, подставим точку (0;0) в исходное ограничение (3), получим $0 \le 1$, что является истинным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, ***содержащую*** точку (0;0), т.е. расположенную правее и ниже прямой (3). Аналогично определим допустимые полуплоскости для остальных ограничений и укажем их стрелками у соответствующих прямых ограничений (см. рис. 2.2). Общей областью, разрешенной всеми ограничениями, т.е. ОДР является многоугольник ABCDEF.

Целевую прямую можно построить по уравнению

$$3x_1 + 2x_2 = 6,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Строим вектор $\vec{C}$ из точки (0;0) в точку (3;2). Точка E – это последняя вершина многоугольника допустимых решений ABCDEF, через которую проходит целевая прямая, двигаясь ***по направлению*** вектора $\vec{C}$. Поэтому E – это точка максимума ЦФ. Определим координаты точки E из системы уравнений прямых ограничений (1) и (2)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \end{cases} \quad x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3},$$

$$E\left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right) \text{ [т/сутки].}$$

Максимальное значение ЦФ равно $L(E) = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$ [тыс. руб./сутки]. Таким образом, наилучшим режимом работы фирмы является ежесуточное производство краски 1-го вида в объеме $3\frac{1}{3}$ т и краски 2-го вида в объеме $1\frac{1}{3}$ т. Доход от продажи красок составит $12\frac{2}{3}$тыс. руб. в сутки.

Задача № 2.02

$$L(X) = -2x_1 - x_2 \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, & (1) \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, & (2) \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, & (3) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, & (4) \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Построим ограничения (рис. 2.3).

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (2) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (3) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 9, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

$$(4) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 6, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

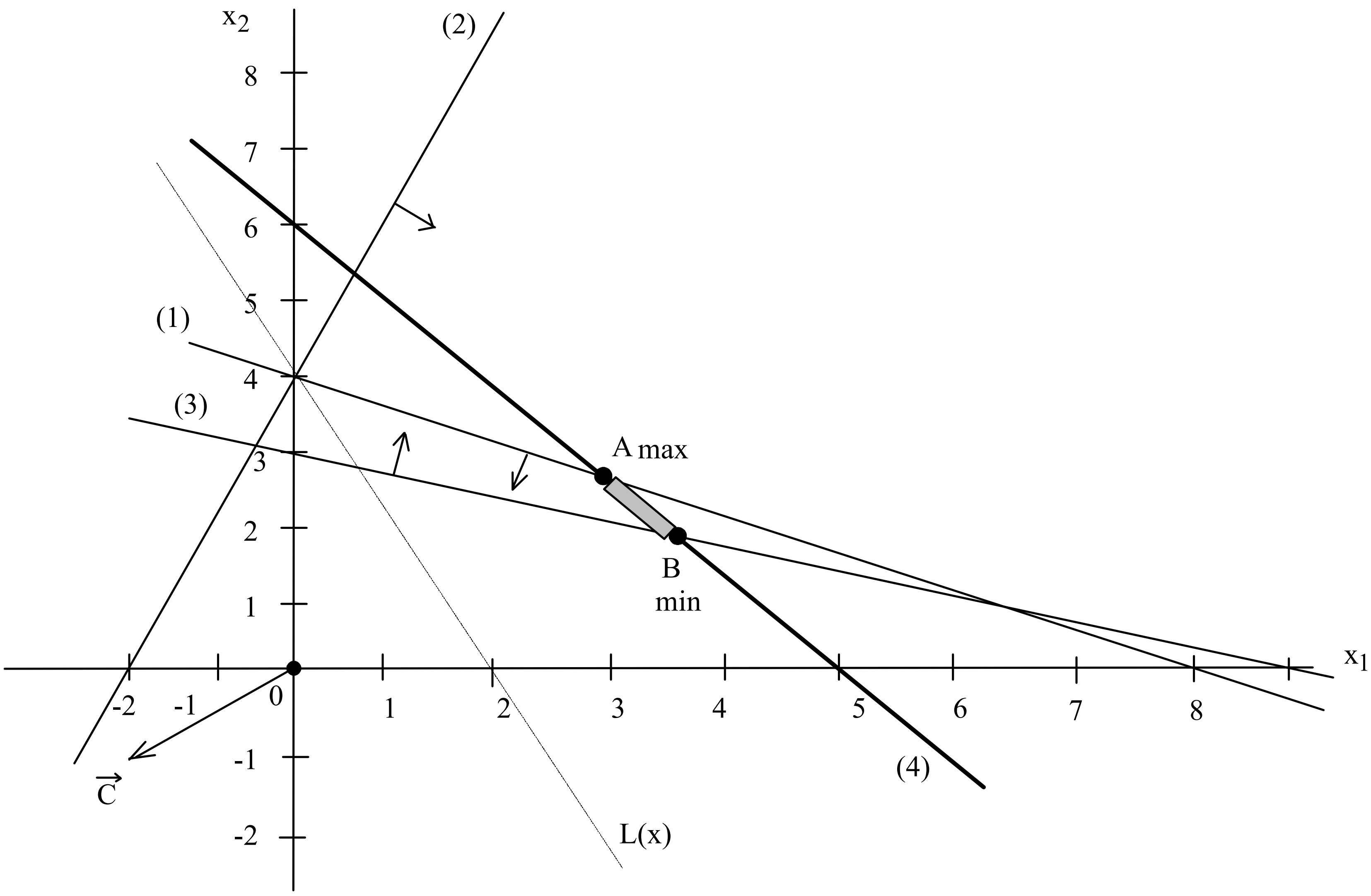

Рис.2.3. Графическое решение задачи №2.02

Целевую прямую построим по уравнению

$$-2x_1 - x_2 = -4,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Определим ОДР. Ограничение-равенство (4) допускает только точки, лежащие на прямой (4). Подставим точку (0;0) в ограничение (3), получим $0 \geq 9$, что является ложным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, ***не содержащую*** точку (0;0), т.е. расположенную выше прямой (3). Аналогично определим и укажем допустимые полуплоскости для остальных ограничений (см. рис. 2.3). Анализ полуплоскостей, допустимых остальными ограничениями-неравенствами, позволяет определить, что ОДР – это отрезок АВ.

Строим вектор $\vec{C}$ из точки (0;0) в точку (-2;-1). Для поиска минимума ЦФ двигаем целевую прямую ***против направления*** вектора $\vec{C}$. Точка В – это последняя точка отрезка АВ, через которую проходит целевая прямая, т.е. В – точка минимума ЦФ.

Определим координаты точки В из системы уравнений прямых ограничений (3) и (4)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, & (3) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, & (4) \end{cases} \qquad x_1 \approx 3{,}46;\ x_2 \approx 1{,}85.$$

Минимальное значение ЦФ равно

$$L\left(3{,}46; 1{,}85\right) = -2 \cdot 3{,}46 - 1 \cdot 1{,}85 = -8{,}77.$$

При поиске точки максимума ЦФ будем двигать целевую прямую ***по направлению*** вектора $\vec{C}$. Последней точкой отрезка АВ, а значит, и точкой максимума будет А. Определим координаты точки А из системы уравнений прямых ограничений (1) и (4)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, & (1) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30. & (4) \end{cases} \qquad x_1 \approx 2{,}86;\ x_2 \approx 2{,}57.$$

Максимальное значение ЦФ равно

$$L\left(2{,}86; 2{,}57\right) = -2 \cdot 2{,}86 - 1 \cdot 2{,}57 = -8{,}29.$$

Таким образом, B(3,46; 1,85) – точка минимума, $L_{min}(B) = -8{,}77$; $A(2{,}86;\ 2{,}57`)$ – точка максимума, $L_{max}(A) = -8{,}29$.

Задача № 2.03

$$L(X) = x_1 - 3x_2 \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3, & (1) \\ x_1 + x_2 \geq 5, & (2) \\ x_1 \leq 4, & (3) \\ -2x_1 + x_2 \geq 2, & (4) \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Построим ограничения (рис. 2.4)

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 0. \end{cases} \quad (2) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 0. \end{cases} \quad (4) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Прямая (3) – проходит через точку $x_1 = 4$ параллельно оси x_2.

Целевую прямую построим по уравнению

$$x_1 - 3x_2 = -3,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Определим ОДР. Подставим точку (0;0) в ограничение (2), получим $0 \geq 5$, что является ложным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, ***не содержащую*** точку (0;0), т.е. расположенную правее и выше прямой (2).

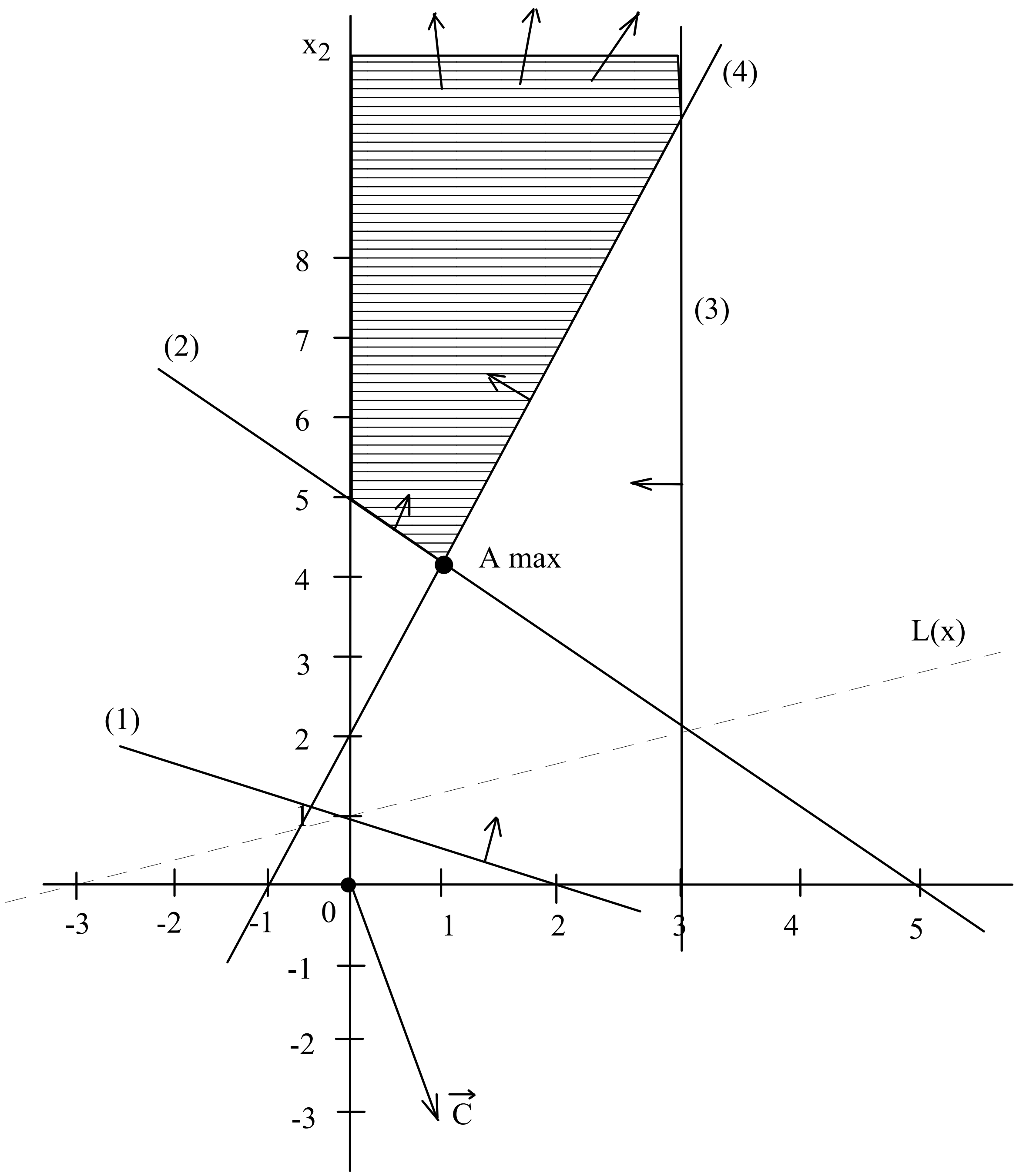

Рис. 2.4. Графическое решение задачи № 2.03

Аналогично определим и укажем допустимые полуплоскости для остальных ограничений (см. рис.2.4). Анализ допустимых полуплоскостей позволяет определить, что ОДР – это незамкнутая область, ограниченная прямыми (2), (3), (4) и осью x_2.

Строим вектор $\vec{C}$ из точки (0;0) в точку (1;-3). Для поиска минимума ЦФ двигаем целевую прямую ***против направления*** вектора $\vec{C}$. Поскольку в этом направлении ОДР не ограничена, то невозможно в этом направлении найти последнюю точку ОДР. Отсюда следует, что ЦФ не ограничена на множестве планов ***снизу*** (поскольку идет поиск минимума).

При поиске максимума ЦФ будем двигать целевую прямую ***по направлению*** вектора $\vec{C}$ до пересечения с вершиной А – последней точкой ОДР в этом направлении. Определим координаты точки А из системы уравнений прямых ограничений (2) и (4)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, & (2) \\ -2x_1 + x_2 = 2. & (4) \end{cases} \qquad x_1 = 1;\ x_2 = 4.$$

Максимальное значение ЦФ равно

$$L(1;4) = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -11.$$

Таким образом, в данной задаче ЦФ не ограничена на множестве планов ***снизу,*** а А(1;4) является точкой максимума ЦФ, $L_{max}(A) = -11$.

2.3. Варианты задач ЛП для решения графическим методом

Задача № 2.1

$$L(X) = 4x_1 - 3x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ -7x_1 + 10x_2 \le 80, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача № 2.2

$$L(X) = 2x_1 + 5x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge`6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 4x_1 + x_2 \ge 8, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача № 2.3

$$L(X)=x_1+2x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} -x_1+3x_2 \ge 10, \\ x_1+x_2 \le 6, \\ x_1+4x_2 \ge 3, \\ -x_1+4x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача № 2.4

$$L(X)=-2x_1+5x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2 \le 12, \\ x_1+2x_2 = 8, \\ x_1+x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача № 2.5

$$L(X)=x_1+6x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \le 10, \\ 3x_1-3x_2 \ge 6, \\ 2x_1+3x_2 \le 6, \\ 3x_1+x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача № 2.6

$$L(X)=-3x_1-2x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1-x_2 \ge 3, \\ 2x_1+2x_2 \ge 2, \\ x_1+x_2 \ge 6, \\ -2x_1+6x_2 \le 20, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача № 2.7*

$$L(X)=x_1+6x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} -2x_1+12x_2 \ge 8, \\ 4x_1+2x_2 \le 10, \\ 3x_1-4x_2 \ge 2, \\ 4x_1+5x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача № 2.8*

$$L(X)=4x_1+2x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \ge 7, \\ 2x_1+x_2 \ge 8, \\ -x_1+2x_2 \le 6, \\ -2x_1+8x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача № 2.9*

$$L(X)=3x_1+4x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \ge 8, \\ 4x_1+4x_2 \ge 18, \\ -x_1+x_2 \le 1, \\ \qquad x_2 = 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

*Задача № 2.10**

Не привязываясь к конкретным числовым данным, проиллюстрируйте графически ситуации из табл. 2.1. Для каждой ситуации на графике изобразите:

1) ограничения;

2) ЦФ в виде одной из линий уровня;

3) вектор $\vec{C}$;

4) ОДР;

5) оптимальное решение.

3. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОИНДЕКСНЫХ ЗАДАЧ ЛП

3.1. Теоретическое введение

Неизбежное колебание значений таких экономических параметров, как цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке и т.д. может привести к неоптимальности или непригодности прежнего режима работы. Для учета подобных ситуаций проводится **анализ чувствительности**, т.е. анализ того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение задачи ЛП.

Для решения задач анализа чувствительности ограничения линейной модели классифицируются следующим образом. **Связывающие** ограничения проходят через оптимальную точку. **Несвязывающие** ограничения не проходят через оптимальную точку. Аналогично ресурс, представляемый связывающим ограничением, называют **дефицитным,** а ресурс, представляемый несвязывающим ограничением – **недефицитным**. Ограничение называют **избыточным** в том случае, если его исключение не влияет на ОДР и, следовательно, на оптимальное решение. Выделяют следующие три задачи анализа на чувствительность.

Возможные ситуации графического решения задач ЛП

Таблица 2.1

№	Вид ОДР	Вид оптимального решения	Примечания
1.1	Многоугольная замкнутая	Единственное решение	$L(X)\to max$
1.2		Единственное решение	$L(X)\to min$
1.3		Бесконечное множество решений	
2.1	Многоугольная незамкнутая	ЦФ не ограничена снизу	
2.2		ЦФ не ограничена сверху	
2.3		Единственное решение	$L(X)\to max$
2.4		Бесконечное множество решений	$L(X)\to min$
3.1	Луч	Единственное решение	Количество ограничений больше одного
3.2		ЦФ не ограничена сверху	
3.3		ЦФ не ограничена снизу	
4.1	Отрезок	Единственное решение	
4.2		Бесконечное множество решений	
5	Единственная точка		Все ограничения - неравенства
6		Решений нет	Все ограничения - неравенства
7		Решений нет	Все ограничения - неравенства
8		Решений нет	Ограничения в виде равенств и неравенств

1. Анализ сокращения или увеличения ресурсов:

- на сколько можно увеличить (ограничения типа $\le$) запас *дефицитного* ресурса для улучшения оптимального значения ЦФ?
- на сколько можно уменьшить (ограничения типа $\le$) запас *недефицитного* ресурса при сохранении оптимального значения ЦФ?

2. Увеличение (ограничения типа $\le$) **запаса какого из ресурсов наиболее выгодно**?

3. Анализ изменения коэффициентов ЦФ: каков диапазон изменения коэффициентов ЦФ, при котором не меняется оптимальное решение?

3.2. Методика графического анализа чувствительности оптимального решения

3.2.1. Первая задача анализа на чувствительность (анализ на чувствительность к правой части ограничений)

Проанализируем чувствительность оптимального решения задачи № 1.01 о производстве красок. ОДР задачи № 1.01 (рис. 3.1) – многоугольник ABCDEF. В оптимальной точке E пересекаются прямые (1) и (2). Поэтому ограничения (1) и (2) являются ***связывающими***, а соответствующие им ресурсы (ингредиенты A и B) – ***дефицитными***.

Рассмотрим экономический смысл этих понятий. Точка максимума ЦФ E соответствует суточному производству $3\frac{1}{3}$ т краски 1-го вида и $1\frac{1}{3}$ т краски 2-го вида. В производстве красок используются ингредиенты A и B. Суточный запас на складе ингредиентов A и B – это правые части связывающих ограничений (1) и (2) (6 и 8 т ингр./сутки). Согласно этим ограничениям, на производство в точке E расходуется

$$1\cdot 3\frac{1}{3}+2\cdot 1\frac{1}{3}=6\,[\text{т ингр.A/сутки}]\ (1) \quad \text{и} \quad 2\cdot 3\frac{1}{3}+1\cdot 1\frac{1}{3}=8\,[\text{т ингр.B/сутки}]\ (2).$$

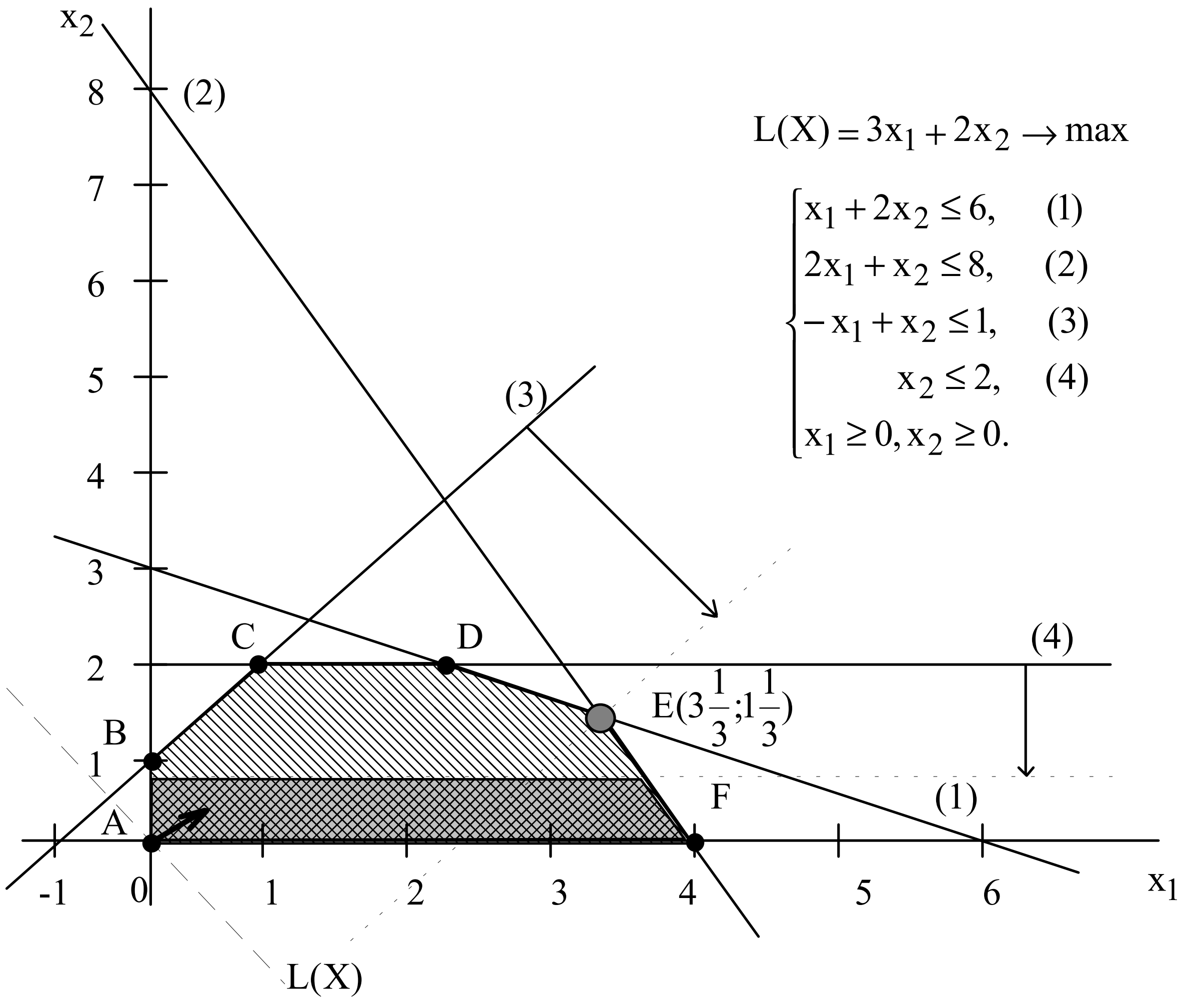

Рис. 3.1. Графическое решение задачи № 1.01 о красках

Таким образом, понятие "*связывающие ограничения*" (1) и (2) означает, что при производстве красок в точке $E\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$ запасы ингредиентов А и В расходуются ***полностью*** и по этой причине невозможно дальнейшее наращивание производства. В этом заключается экономический смысл понятия *дефицитности* ресурсов, т.е. если фирма сможет увеличить суточные запасы ингредиентов, то это позволит увеличить выпуск красок. В связи с этим возникает вопрос: до какого уровня целесообразно увеличить запасы ингредиентов и на сколько при этом увеличится *оптимальное* производство красок?

Правило № 3.1

Чтобы графически определить максимальное увеличение запаса дефицитного ресурса, вызывающее *улучшение* оптимального решения,

необходимо передвигать соответствующую прямую в направлении *улучшения* ЦФ до тех пор, пока это ограничение не станет *избыточным*.

При прохождении прямой (1) через точку К (рис. 3.2) многоугольник ABCKF становится ОДР, а ограничение (1) – избыточным. Действительно, если удалить прямую (1), проходящую через точку К, то ОДР ABCKF не изменится. Точка К становится *оптимальной*, в этой точке ограничения (2) и (4) становятся *связывающими*.

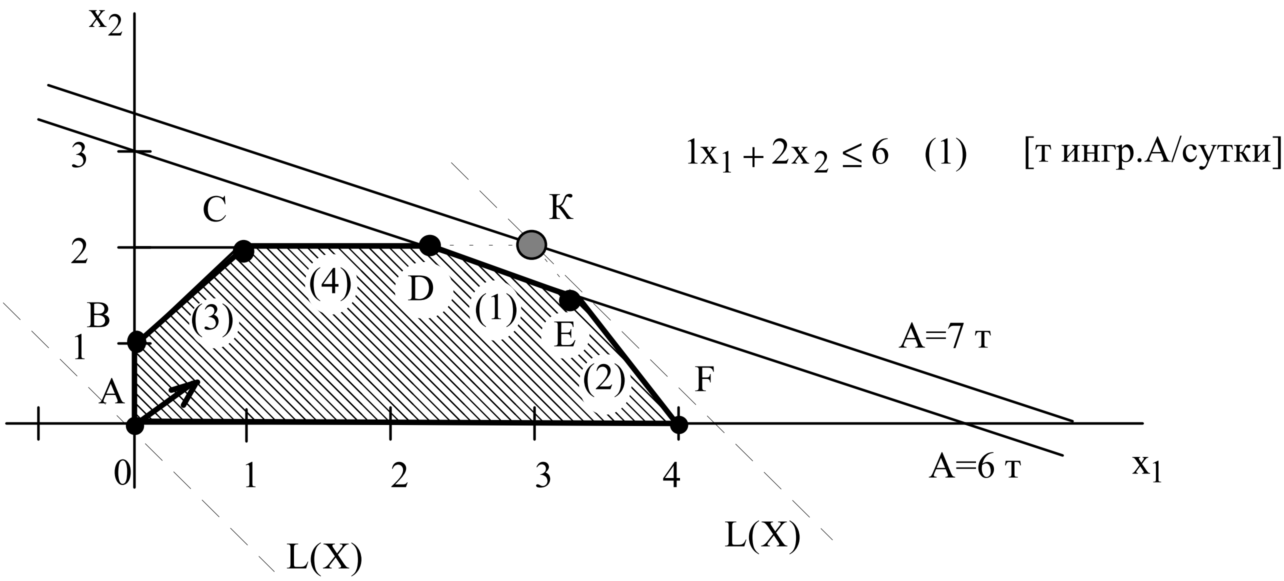

Рис. 3.2. Анализ увеличения ресурса А

Правило № 3.2

Чтобы *численно* определить максимальную величину запаса дефицитного ресурса, вызывающую улучшение оптимального решения,

необходимо: 1) определить координаты точки $(x_1;x_2)$, в которой соответствующее ограничение становится *избыточным*;

2) подставить координаты $(x_1;x_2)$ в *левую часть* соответствующего ограничения.

Координаты точки К(3;2) находятся путем решения системы уравнений прямых (2) и (4). Т.е. в этой точке фирма будет производить 3 т краски 1-го вида и 2 т краски 2-го вида. Подставим $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$ в левую часть ограничения (1) и получим максимально допустимый запас ингредиента А

$$x_1 + 2x_2 = 3 + 2 \cdot 2 = 7 \text{ [т ингр.А/сутки].}$$

Дальнейшее увеличение запаса ингредиента А нецелесообразно, потому что это *не изменит* ОДР и *не приведет* к другому оптимальному решению (см. рис. 3.2). Доход от продажи красок в объеме, соответствующем точке К, можно рассчитать, подставив ее координаты (3;2) в выражение ЦФ

$$3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13 \text{ [тыс.руб./сутки].}$$

Рассмотрим вопрос о целесообразности увеличения запаса ингредиента В. Согласно правилу № 3.1, соответствующее ограничение (2) становится избыточным в точке J, в которой пересекаются прямая (1) и ось переменной x_1 (рис. 3.3). Многоугольник ABCDJ становится ОДР, а точка J(6;0) – оптимальным решением.

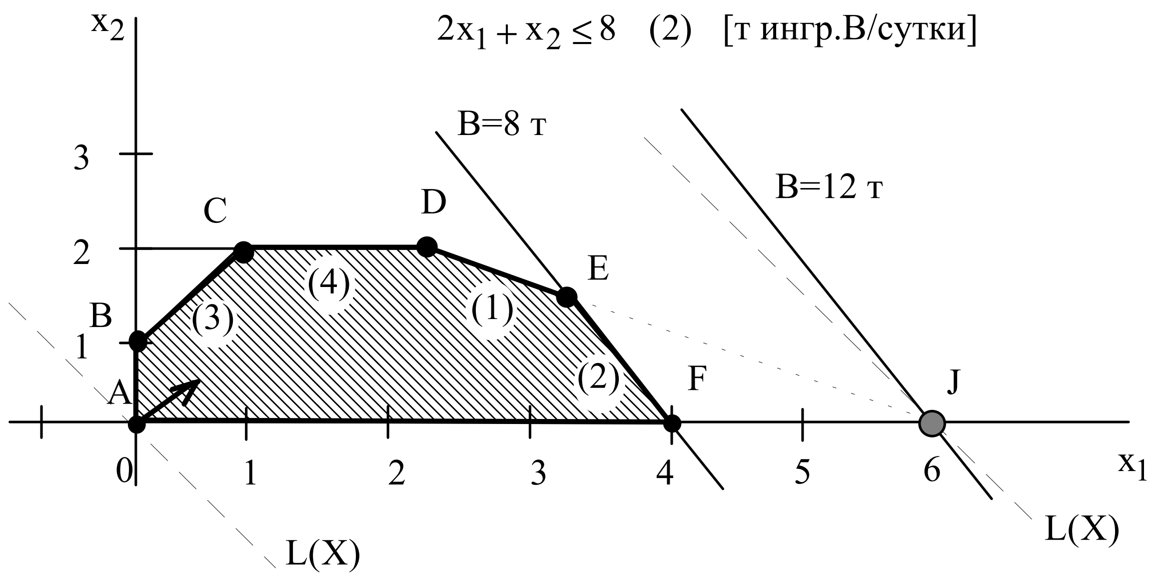

Рис. 3.3. Анализ увеличения ресурса В

В точке J выгодно производить только краску 1-го вида (6 т в сутки). Доход от продажи при этом составит

$$3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18 \text{ [тыс.руб./сутки]}.$$

Чтобы обеспечить такой режим работы, согласно правилу № 3.2, запас ингредиента В надо увеличить до величины

$$2x_1 + x_2 = 2 \cdot 6 + 0 = 12 \text{ [т ингр.В/сутки]}.$$

Ограничения (3) и (4) являются ***не связывающими***, т.к. не проходят через оптимальную точку E (см. рис. 3.1). Соответствующие им ресурсы (спрос на краски) являются ***недефицитными***. С экономической точки зрения это означает, что в данный момент уровень спроса на краски *непосредственно* не определяет объемы производства. Поэтому некоторое его колебание может никак не повлиять на оптимальный режим производства в точке E.

Например, увеличение (уменьшение) спроса на краску 2-го вида будет соответствовать перемещению прямой ограничения $x_2 \le 2$ (4) вверх (вниз). Перемещение прямой (4) вверх никак не может изменить точку E максимума ЦФ. Перемещение же прямой (4) вниз не влияет на существующее оптимальное решение *только до пересечения* с точкой E (см. правило № 3.3). Из рис. 3.1 видно, что дальнейшее перемещение (4) приведет к тому, что точка E будет за пределами новой ОДР, выделенной более темным цветом. Кроме того, любое оптимальное решение для этой новой ОДР будет хуже точки E.

Правило № 3.3

Чтобы определить максимальное уменьшение запаса недефицитного ресурса, *не меняющее* оптимальное решение,

необходимо передвигать соответствующую прямую *до пересечения с оптимальной* точкой.

Правило № 3.4

Чтобы *численно* определить минимальную величину запаса недефицитного ресурса, не меняющую оптимальное решение,

необходимо подставить координаты *оптимальной* точки в *левую часть* соответствующего ограничения.

Чтобы выяснить, до каких пределов падение спроса на краску 2-го вида не повлияет на производство в точке $E(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3})$, используем правило № 3.4. Подставляем в левую часть ограничения (4) координаты точки E, получаем

$$x_2 = 1\frac{1}{3}.$$

Делаем ***вывод***: предельный уровень, до которого может упасть спрос на краску 2-го вида и при котором не изменится оптимальность полученного ранее решения, равен $1\frac{1}{3}$ т краски в сутки.

Экономический смысл ограничения (3)

$$-x_1 + x_2 \le 1 \ \left[\text{т краски/сутки}\right]$$

в том, что объем продаж краски 2-го вида может превысить объем продаж краски 1-го вида максимум на 1 т. Дальнейшее увеличение продаж краски 2-го вида по сравнению с краской 1-го вида графически отобразится перемещением прямой (3) влево и вверх, но никак не повлияет на оптимальность точки E. Но если разность спросов на краску 2-го и 1-го видов будет уменьшаться, то прямая (3) будет перемещаться ниже и правее. Последним положением прямой (3), при котором точка E остается оптимальной, является пересечение с точкой E (см. рис. 3.1). Согласно правилу № 3.4, подставим координаты точки $E(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3})$ в левую часть ограничения (3)

$$-x_1 + x_2 = -3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = -2 \ [\text{т краски}].$$

Получаем, что разность спросов на краску 2-го и 1-го вида в точке стала отрицательной. То есть, прохождение прямой (3) через точку E означает, что краску 2-го вида будут покупать в меньшем объеме, чем краску 1-го вида

$$x_1 - x_2 = 2 \text{ [т краски/сутки]}.$$

Делаем ***вывод***: максимальное превышение спроса на краску 1-го вида над спросом на краску 2-го вида, при котором оптимальное решение в точке E не изменится, составляет 2 т краски в сутки.

Результаты решения первой задачи анализа оптимального решения на чувствительность представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Результаты анализа ресурсов задачи № 1.01

№	Тип ресурса	Max изменение ресурса, $\max \Delta R_i$, т/сутки	Max изменение дохода, $\max \Delta L(X^*)$, тыс. руб./сутки	Ценность дополнительной единицы ресурса $y_i = \frac{\max \Delta L(X^*)}{\max \Delta R_i}$, тыс. руб./т
(1)	Дефицитный	7-6=+1	$13-12\frac{2}{3}=+\frac{1}{3}$	$y_1 = \left[\frac{1}{3}\Big/1\right] = \frac{1}{3}$
(2)	Дефицитный	12-8=+4	$18-12\frac{2}{3}=+5\frac{1}{3}$	$y_2 = \left[5\frac{1}{3}\Big/4\right] = 1\frac{1}{3}$
(3)	Недефицитный	-2-1= -3	$12\frac{2}{3}-12\frac{2}{3}=0$	$y_3 = [0/(-3)] = 0$
(4)	Недефицитный	$1\frac{1}{3}-2=-\frac{2}{3}$	$12\frac{2}{3}-12\frac{2}{3}=0$	$y_4 = \left[0\Big/\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = 0$

3.2.2.Вторая задача анализа на чувствительность

Анализ табл. 3.1 показывает, что к улучшению оптимального решения, т.е. к увеличению суточного дохода приводит увеличение *дефицитных* ресурсов. Для определения выгодности увеличения этих ресурсов используют понятие **ценности дополнительной единицы i-го ресурса** y_i

$$y_i = \frac{\max \Delta L\left(X^*\right)}{\max \Delta R_i},$$

где $\max \Delta L\left(X^*\right)$ – максимальное приращение оптимального значения ЦФ; $\max \Delta R_i$ – максимально допустимый прирост объема i-го ресурса.

Например, из табл. 3.1 следует, что увеличение суточного запаса ингредиента А [ограничение (1)] на 1 т позволит получить дополнительный доход, равный $y_1 = \frac{1}{3}$ тыс. руб. / сутки, в то время как увеличение запаса В [ограничение (2)] на 1 т принесет $y_2 = 1\frac{1}{3}$ тыс. руб. / сутки. Недефицитные ресурсы имеют нулевые ценности, поскольку изменение этих ресурсов не приводит к увеличению дохода.

Вывод: дополнительные вложения в первую очередь необходимо направлять на увеличение ресурса В, а лишь потом на ресурс А. Изменять недефицитные ресурсы нет необходимости.

3.2.3. Третья задача анализа на чувствительность

Графический анализ допустимого диапазона изменения цен

Изменение цен на продукцию, т.е. изменение коэффициентов ЦФ, представляется на графике вращением целевой прямой вокруг оптимальной точки. Так, при увеличении коэффициента ЦФ c_1 или уменьшении c_2 целевая прямая вращается ***по*** часовой стрелке. При уменьшении c_1 или же увеличении c_2 целевая прямая вращается ***против*** часовой стрелки (рис. 3.4).

При таких поворотах точка Е будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон целевой прямой ***не выйдет за пределы***, определяемые наклонами прямых ограничений (1) и (2). Так, например, если наклон целевой прямой совпадет с наклоном прямой (1), то оптимальным решением будут точки отрезка DE.

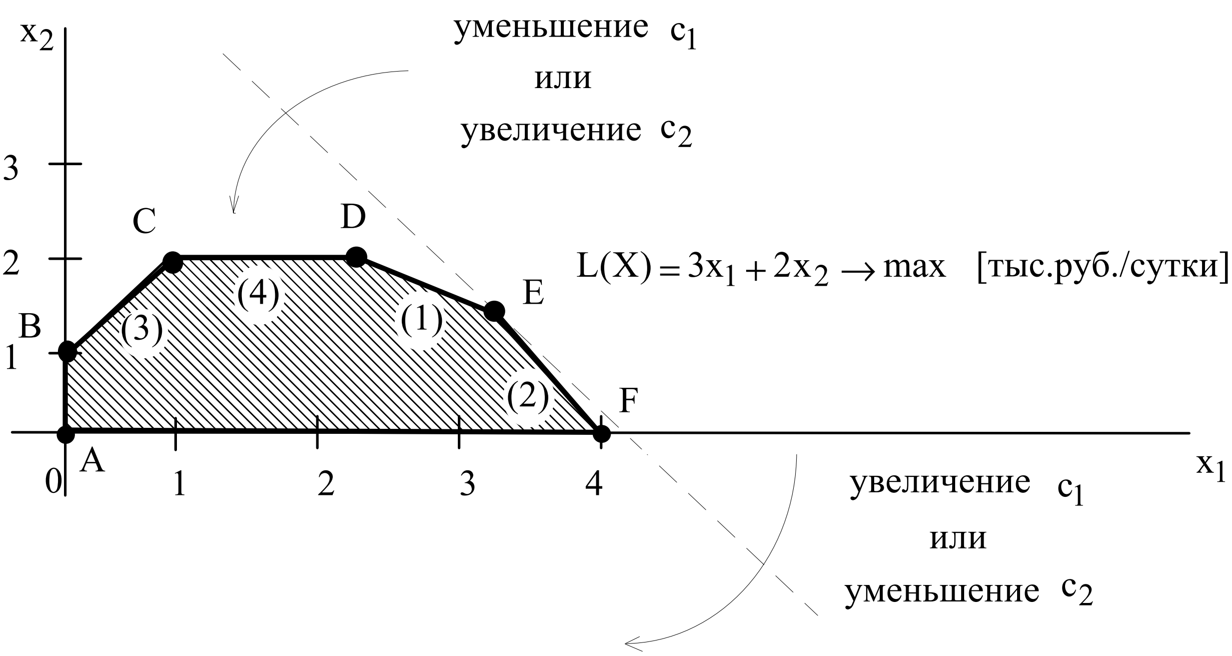

Рис. 3.4. Анализ изменения цен

При совпадении с прямой (2) оптимальным решением будут точки отрезка EF. Если целевая прямая выйдет за пределы наклона (1) или (2), то оптимальной точкой станет соответственно D или F.

Допустим, что цена на краску 2-го вида не меняется, т.е. зафиксируем значение целевого коэффициента c_2. Проанализируем графически результаты изменения значения целевого коэффициент c_1, т.е. цены на краску 1-го вида. Оптимальное решение в точке E не будет меняться при увеличении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (2). Аналогично, оптимальное решение в точке E не будет меняться при уменьшении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (1).

Аналитический поиск допустимого диапазона изменения цен

Совпадение в процессе вращения целевой прямой с прямой ограничения означает, что углы их наклона относительно горизонтальной оси сравнялись, а значит, стали равны тангенсы углов наклона этих прямых.

Правило № 3.5

Чтобы определить границы допустимого диапазона изменения коэффициента ЦФ, например $\min c_1$ и $\max c_1$,

необходимо приравнять тангенс угла наклона целевой прямой $\operatorname{tg}\alpha_{ЦФ}$ поочередно к тангенсам углов наклона прямых связывающих ограничений, например $\operatorname{tg}\alpha_{(1)}$ и $\operatorname{tg}\alpha_{(2)}$ (рис. 3.5 и 3.6).

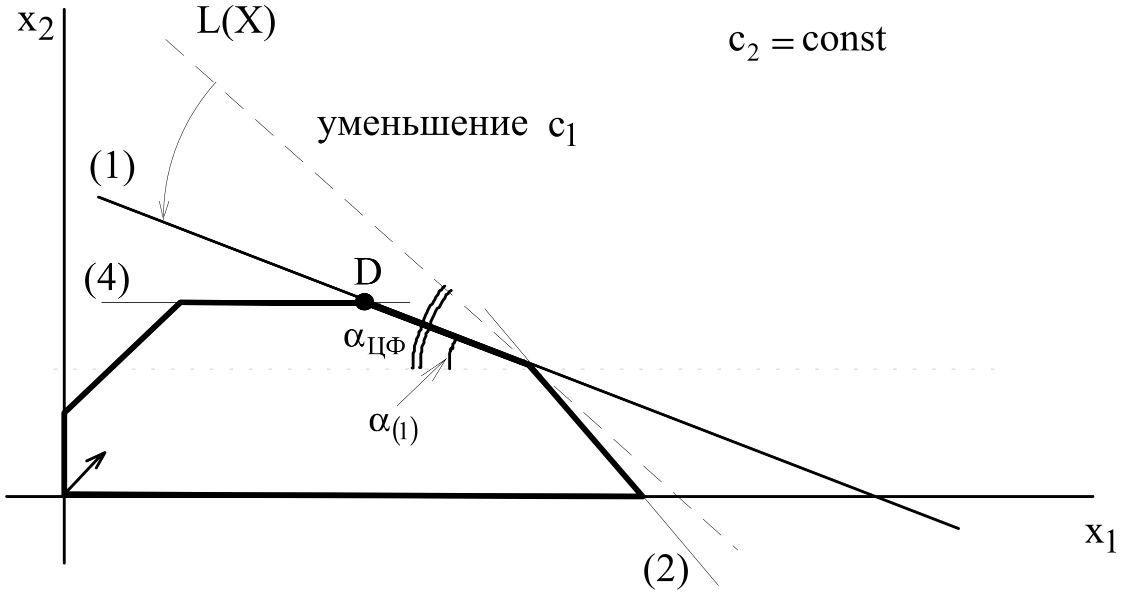

Рис. 3.5. Определение $\min c_1$

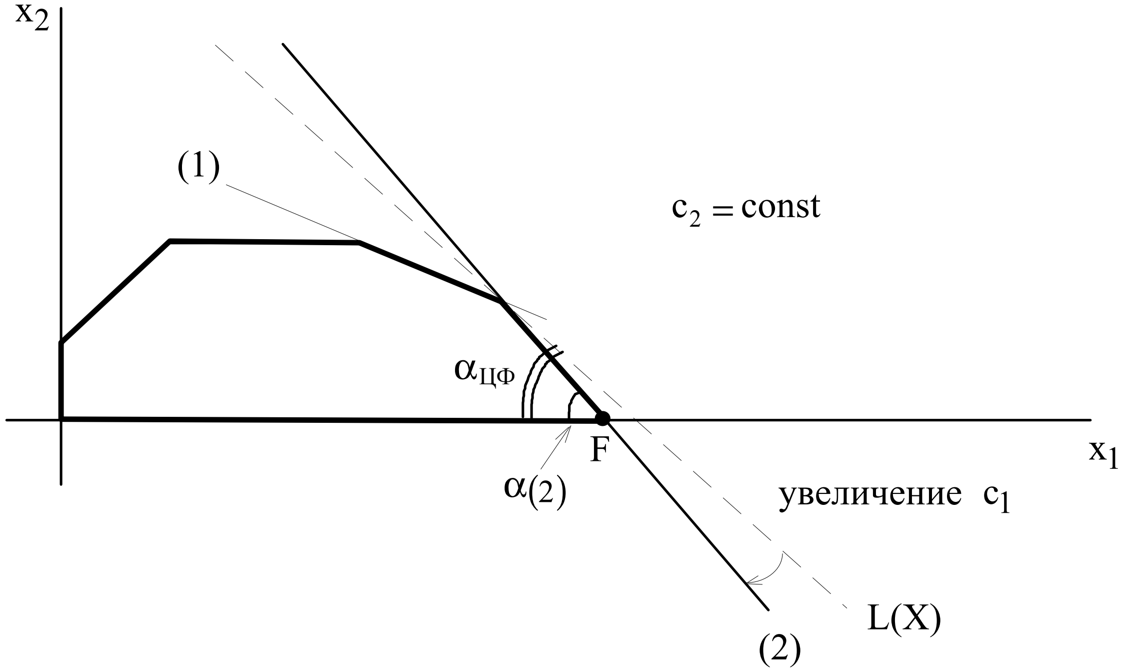

Рис. 3.6. Определение $\max c_1$

Определим насколько максимально может снизиться цена на краску 1-го вида, не изменяя оптимальную точку E. Для этого применим правило № 3.5 и формулу расчета тангенса угла наклона прямой (рис. 3.7).

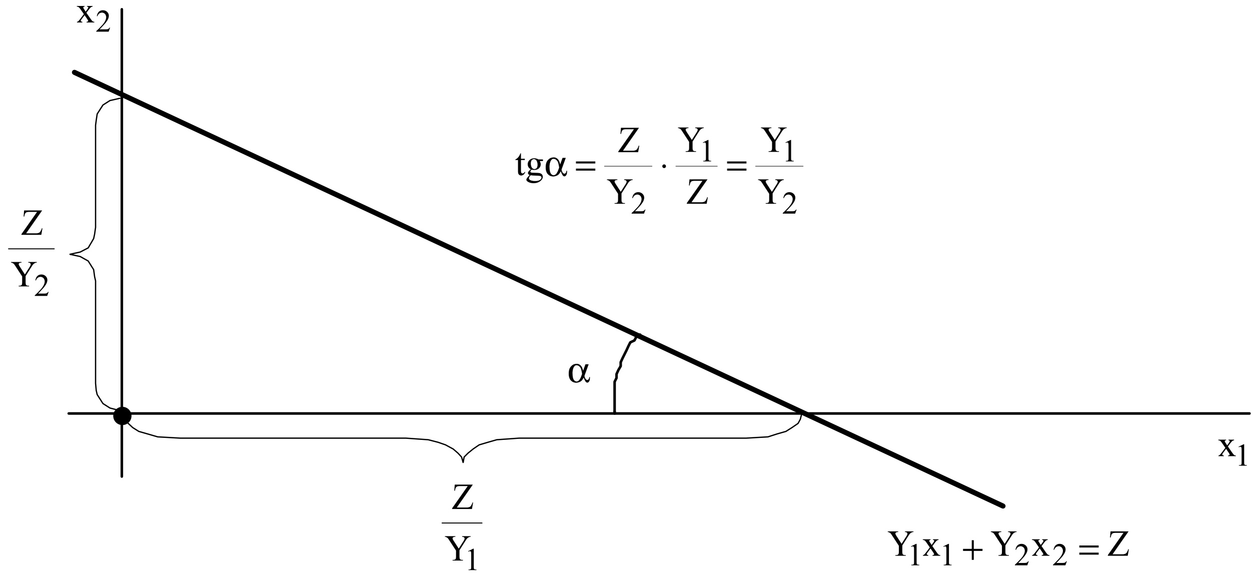

Рис. 3.7. Определение тангенса угла наклона $tg\alpha$ прямой $Y_1x_1 + Y_2x_2 = Z$

Определим тангенсы углов наклона:

1) целевой прямой $L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$, учитывая, что $c_2 = 2$ фиксировано

$$tg\alpha_{ЦФ} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{2};$$

2) связывающего ограничения $x_1 + 2x_2 \le 6$ (1)

$$tg\alpha_{(1)} = \frac{1}{2};$$

3) связывающего ограничения $2x_1 + x_2 \le 8$ (2)

$$tg\alpha_{(2)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Для нахождения $\min c_1$ целевая прямая должна совпасть с прямой (1) (см. рис. 3.5):

$$tg\alpha_{ЦФ} = tg\alpha_{(1)};$$

$$\frac{c_1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\min c_1 = 1 \text{ [тыс.руб./т].}$$

Для нахождения $\max c_1$ целевая прямая должна совпасть с прямой (2) (см. рис. 3.6):

$$\mathrm{tg}\alpha_{ЦФ} = \mathrm{tg}\alpha_{(2)};$$

$$\frac{c_1}{2} = 2;$$

$$\max c_1 = 4 \text{ [тыс. руб. / т].}$$

Таким образом, если цены на краску первого вида будут колебаться в пределах $1 < c_1 < 4$ тыс. руб. / т, то оптимальное решение задачи не изменится.

Из приведенных выше расчетов и графической их иллюстрации следует, что если цена на краску первого вида станет меньше 1 тыс. руб. / т ($c_1 < 1$), то наиболее выгодным будет производство красок в точке D (см. рис. 3.5). При этом общее потребление ингредиента В снизится, что приведет к его недефицитности [ресурс (2)], а дефицитными будут ресурсы (1) и (4).

3.3. Варианты задач для самостоятельного решения

Задача № 3.1

Проанализируйте случаи, когда цена на краску первого вида:

1) превысила 4 тыс. руб./т;
2) равна 1 тыс. руб./т;
3) равна 4 тыс. руб./т.

Какая точка станет оптимальной, какими будут объемы производства красок, как изменится дефицитность и объем потребления ресурсов задачи?

Задача № 3.2

Определите допустимый диапазон изменения цены на краску 2-го вида при неизменном значении цены на краску первого вида 3 тыс. руб. / т в исходной задаче. Проанализируйте влияние изменения цены на краску 2-го вида на объемы производства и дефицитность ресурсов в исходной задаче (аналогично задаче № 3.1).

Задача № 3.3

Пусть в задаче № 1.01 ограничение (1) для ингредиента А изменилось на $2x_1 + 3x_2 \le 10$. Определите следующие параметры задачи:

1) новое оптимальное решение X^* и $L(X^*)$;

2) максимально допустимый прирост объема ингредиента А и соответствующее приращение ЦФ;

3) величины y_i для всех ресурсов задачи.

Задача № 3.4

Пусть в задаче № 1.01 ЦФ изменилась на $L(X) = 3x_1 + x_2$. В этом случае точка F с координатами (4;0) станет оптимальной. Это означает, что краску 2-го вида производить нецелесообразно. Определите, при какой цене или диапазоне цен на краску первого вида станет выгодно производить краску 2-го вида?

Задача № 3.5

Перечислите виды всех ресурсов и ограничений задачи. Проведите анализ чувствительности оптимального решения для ресурсов (1), (2), (3) и цен c_1 и c_2 (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Параметры задачи №3.5

Модель	Координаты пересечения прямых с осями x_1 и x_2
$L(X) = 6x_1 + 5x_2 \to \max$ [тыс. руб.]	(2; 2,4)
$x_1 + 2x_2 \le 11$ [ед. ресурса] (1)	(11; 5,5)
$2x_1 + x_2 \le 7$ [ед. ресурса] (2)	(3,5; 7)
$2x_1 - x_2 \le 1$ [ед. ресурса] (3)	(0,5; -1)
$2x_1 + 3x_2 \ge 3$ [ед. ресурса] (4)	(1,5; 1)
$x_1, x_2 \ge 0$	$X_{max}(1;5)$ [ед. прод.], $L(X_{max}) = 31$ [тыс.руб.]

*Задача № 3.6**

Используя конкретные примеры моделей задач, сформулируйте *задачи*, *правила*, *экономическую интерпретацию* анализа оптимального решения на чувствительность для следующих случаев:

1) в задаче существуют ограничения со знаком $\geq$;

2) при поиске допустимого диапазона изменения цены целевая прямая, поворачиваясь вокруг оптимальной точки, проходит через: a) вертикальное положение; b) горизонтальное положение.

*Задача № 3.7**

Некоторая фирма производит продукцию двух видов с использованием трех видов ресурсов – неравенства (1), (3), (5). Неравенства (2) и (4) ограничивают соответственно минимальный суточный спрос на продукцию первого вида и максимальный суточный спрос на продукцию второго вида. ЦФ представляет собой доход от реализации продукции. Перечислите виды всех ресурсов и ограничений задачи и проведите полный анализ чувствительности оптимального решения (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Параметры задачи № 3.7

Модель	Координаты пересечения прямых с осями x_1 и x_2
$L(X) = 5x_1 + 1x_2 \to \max$ [руб.];	
$-x_1 + x_2 \leq 1$ [ед. ресурса] (1)	(-1; 1)
$x_1 \geq 2$ [ед. прод.] (2)	(2; –)
$4x_1 - 8x_2 \leq 12$ [ед. ресурса] (3)	(3; -1,5)
$x_2 \leq 6$ [ед. прод.] (4)	(–; 6)
$3x_1 + 2x_2 \leq 21$ [ед. ресурса] (5)	(7; 10,5)
$x_1, x_2 \geq 0$	$X_{max}(6;1,5)$ [ед. прод.], $L(X_{max}) = 31,5$ [руб.]

Задача № 3.8*

Перечислите виды всех ресурсов и ограничений задачи. Проведите полный анализ чувствительности оптимального решения (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Параметры задачи № 3.8

Модель	Координаты пересечения прямых с осями x_1 и x_2
$L(X) = 4x_1 + x_2 \to \max$ [руб.]	(1; 4)
$-x_1 + 4x_2 \le 9$ [ед. ресурса] (1)	(-9; 2,3)
$3x_1 + 1x_2 \ge 5$ [ед. ресурса] (2)	(1,7; 5)
$x_1 + 2x_2 \le 7$ [ед. ресурса] (3)	(7; 3,5)
$5x_1 - 8x_2 \le -1$ [ед. ресурса] (4)	(-0,2; 0,1)
$x_1, x_2 \ge 0$	$X_{max}(3;2)$ [ед. прод.], $L(X_{max}) = 14$ [руб.]

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. М.: Мир, 1971.

2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1986.

3. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев: Вища школа, 1979.

4. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование. Минск: Вышэйшая школа, 1995.

5. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: математическое программирование. Минск: Вышэйшая школа, 2001.

6. Таха Х.А. Введение в исследование операций. В 2-х книгах. М.: Мир, 1985.

7. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом "Вильямс", 2001.

8. Эддоус М. , Стенсфилд Р. Методы принятия решений. М.: ЮНИТИ, 1997.

Часть II. ДВУХИНДЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

4.1. Теоретическое введение

Задача о размещении (транспортная задача) – это РЗ, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов. Примером типичной транспортной задачи (ТЗ) является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям.

Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции *одного вида* из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку *единицы продукции*.

Исходные параметры модели ТЗ

1) n – количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения.

2) a_i – запас продукции в пункте отправления A_i $(i=\overline{1,n})$ [ед. прод.].

3) b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j $(j=\overline{1,m})$ [ед. прод.].

4) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [руб. / ед. прод.].

Искомые параметры модели ТЗ

1) x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ед. прод.].

2) $L(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Этапы построения модели

I. Определение переменных.
II. Проверка сбалансированности задачи.
III. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
IV. Задание ЦФ.
V. Задание ограничений.

Транспортная модель

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \; i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \; j = \overline{1,m}, \\ \forall x_{ij} \geq 0 \; \left(i = \overline{1,n}; \; j = \overline{1,m}\right). \end{cases} \tag{4.1}$$

ЦФ представляет собой общие транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Общий вид транспортной матрицы

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, ед. прод.
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}, [руб./ед. прод.]	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потребность ед. прод.	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Из модели (4.1) следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j . \tag{4.2}$$

Если (4.2) выполняется, то ТЗ называется **сбалансированной** (закрытой), в противном случае – **несбалансированной** (открытой). В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный **фиктивный** (реально не существующий) пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, т.е.

$$b_ф = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_ф = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Для фиктивных перевозок вводятся **фиктивные** тарифы $c^{ф}$, величина которых обычно приравнивается к нулю $c^{ф} = 0$. Но в некоторых ситуациях величину фиктивного тарифа можно интерпретировать как **штраф**, которым облагается каждая единица недопоставленной продукции. В этом случае величина $c^{ф}$ может быть любым положительным числом.

Задача о назначениях – частный случай ТЗ. В задаче о назначениях количество пунктов отправления равно количеству пунктов назначения. Объемы потребности и предложения в каждом из пунктов назначения и отправления равны 1. Примером типичной задачи о назначениях является распределение работников по различным видам работ, минимизирующее суммарное время выполнения работ.

Переменные задачи о назначениях определяются следующим образом

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i-\text{й рабочий работает на } j-\text{м станке}, \\ 0, \text{ в противном случае}. \end{cases}$$

4.2. Методические рекомендации

4.2.1. Стандартная транспортная задача

Задача № 4.01

Заводы некоторой автомобильной фирмы расположены в городах A, B и C. Основные центры распределения продукции сосредоточены в городах D и E. Объемы производства указанных трех заводов равняются 1000, 1300 и 1200 автомобилей ежеквартально. Величины квартального спроса в центрах распределения составляют 2300 и 1400 автомобилей соответственно. Стоимости перевозки автомобилей по железной дороге по каждому из возможных маршрутов приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Стоимость перевозки автомобилей, руб./шт.

	D	E
A	80	215
B	100	108
C	102	68

Постройте математическую модель, позволяющую определить количество автомобилей, перевозимых из каждого завода в каждый центр распределения, таким образом, чтобы общие транспортные расходы были минимальны.

Решение

Определение переменных

Обозначим количество автомобилей, перевозимых из i-го завода в j-й пункт потребления через x_{ij}.

Проверка сбалансированности задачи

Проверим равенство суммарного производства автомобилей и суммарного спроса

$$\underbrace{(1000+1300+1200)}_{3500\ \text{шт./кв.}}<\underbrace{(2300+1400)}_{3700\ \text{шт./кв.}},$$

откуда следует вывод – задача *несбалансирована*, поскольку спрос на автомобили превышает объем их производства. Для установления баланса введем дополнительный *фиктивный* завод с ежеквартальным объемом производства 200 шт. ($3700-3500=200$). Фиктивные тарифы $c^{ф}$ приравняем к нулю (т.к. перевозки в действительности производиться не будут).

Построение транспортной матрицы

Согласно результатам проверки сбалансированности задачи № 4.01 в транспортной матрице должно быть четыре строки, соответствующих заводам и два столбца, соответствующих центрам распределения (см. табл. 4.3). Тариф перевозки обычно вписывают ***в правом нижнем*** углу клетки матрицы для удобства дальнейшего нахождения опорных планов задачи.

Таблица 4.3

Транспортная матрица задачи № 4.01

	D	E	Объем произв., шт./квартал
A	80	215	1000
B	100	108	1300
C	102	68	1200
Фиктивный завод	0	0	200
Спрос, шт./квартал	2300	1400	*3700*

Задание ЦФ

Суммарные затраты в рублях на ежеквартальную перевозку автомобилей определяются по формуле

$$L(X) = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32} + 0 \cdot x_{41} + 0 \cdot x_{42} \to \min$$

Задание ограничений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 1000, \\ x_{21} + x_{22} = 1300, \\ x_{31} + x_{32} = 1200, \\ x_{41} + x_{42} = 200, \quad [\text{шт./квартал}] \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 2300, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1400, \\ x_{ij} \ge 0 \ \left(\forall i=\overline{1,2}\,;\ \forall j=\overline{1,4}\right). \end{cases}$$

4.2.2. Модификации стандартной транспортной задачи

Недопустимые перевозки

Иногда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых **запрещающих** тарифов $c^з$. Запрещающие тарифы должны сделать невыгодными перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна быть больше реальных тарифов в транспортной матрице

$$c^з > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\right).$$

Максимизация ЦФ

Существующий алгоритм решения транспортных задач (**метод потенциалов**) предполагает, что ЦФ стремится к минимуму. Однако существуют ситуации, когда в рамках транспортной модели требуется максимизировать ЦФ, например, общий доход, объем продаж, прибыль, качество выполняемых работ и т.д. В этом случае в модель вместо искомой ЦФ $L(X)$ вводится ЦФ $L_1(X) = -L(X)$, в которой тарифы умножаются на (-1). Таким образом, максимизация $L(X)$ будет соответствовать минимизации $L_1(X)$.

Многопродуктовые модели

Если в задаче идет речь о том, что из каждого пункта отправления можно перевозить продукцию нескольких видов, то при построении модели можно использовать один из следующих вариантов:

- каждому виду продукции должна соответствовать одна транспортная матрица;

* все виды продукции представлены в одной общей матрице с использованием запрещающих тарифов в клетках, связывающих разные виды продукции.

4.3. Варианты задач для самостоятельного решения

Задача № 4.1

Постройте транспортную модель для исходных данных задачи № 4.01 при условии, что квартальный спрос в пункте распределения D упал до 1900 автомобилей, а выпуск на заводе B увеличился до 1500 автомобилей за квартал.

Задача № 4.2

Постройте математическую модель задачи № 4.01 при условии, что за каждый недопоставленный автомобиль в распределительные центры D и E введены штрафы 200 и 300 руб. соответственно. Кроме того, поставки с завода A в распределительный центр E не планируются изначально.

Задача № 4.3

Три электрогенерирующие станции мощностью 25, 40 и 30 миллионов кВт·ч поставляют электроэнергию в три города. Максимальная потребность в электроэнергии этих городов оценивается в 30, 35 и 24 миллионов кВт·ч. Цены за миллион кВт·ч в данных городах приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Стоимость за электроэнергию, руб. / млн. кВт·ч

		Города		
		1	*2*	*3*
Станция	*1*	600	700	400
	2	320	300	350
	3	500	480	450

В августе на 20% возрастает потребность в электроэнергии в каждом из трех городов. Недостаток электроэнергии могут восполнить из другой электросети по цене 1000 за 1 миллион кВт·ч. Но третий город не может подключиться к альтернативной электросети. Электрогенерирующие станции планируют разработать наиболее экономичный план распределения электроэнергии и восполнения ее недостатка в августе. Сформулируйте эту задачу в виде транспортной модели.

Задача № 4.4

Некоторой компании принадлежат три фермы, где выращивают овощи, предназначенные для последующей обработки на двух холодильных заводах компании. Одним из выращиваемых овощей являются бобы, которые холодильные заводы продают по 200 руб. за 1 т. В табл. 4.5 приведены издержки производства для каждой фермы и каждого холодильного завода, максимальные значения урожая для каждой фермы, прогнозные значения спроса на следующий сезон для каждого завода. В табл. 4.6 приведена стоимость транспортировки бобов.

Таблица 4.5

Издержки производства и максимальный урожай бобов

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>Издержки производства, руб./т</td><td>Максимальный урожай, т</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Фермы</td><td>1</td><td>90</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>95</td><td>3000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>87</td><td>1500</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>Прогнозный спрос, т</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Заводы</td><td>1</td><td>20</td><td>2750</td></tr>
<tr><td>2</td><td>23</td><td>3250</td></tr>
</table>

Таблица 4.6

Стоимость транспортировки бобов, руб. / т

<table>
<tr><td rowspan="2">Фермы</td><td colspan="2">Холодильный завод</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>15</td></tr>
<tr><td>2</td><td>12</td><td>12</td></tr>
<tr><td>3</td><td>18</td><td>9</td></tr>
</table>

Постройте транспортную модель, которая для ферм и холодильных заводов позволяет найти на следующий сезон производственный план, гарантирующий максимальный доход.

*Задача №4.5**

(многопродуктовая модель с независимыми продуктами)

Некоторая фирма производит автомобили четырех различных марок M_1, M_2, M_3, M_4. Завод в городе А производит только автомобили марок M_3, M_4, в городе В – только автомобили марок M_1, M_2, M_4, а в городе С – только автомобили марок M_1, M_2. Ежеквартальные объемы выпуска каждого завода и величины спроса в каждом пункте распределения приведены в табл. 4.7. Постройте соответствующую модель экономичных перевозок. Тарифы перевозок соответствуют задаче № 4.01.

Таблица 4.7

Объемы производства заводов и спроса пунктов распределения автомобилей, шт./квартал

	Марка автомобиля			
	M_1	M_2	M_3	M_4
Заводы				
A	–	–	700	300
B	500	600	–	400
C	800	400	–	–
Пункты распределения				
D	700	500	500	600
E	600	500	200	100

Рекомендация. Пункты отправления в транспортной матрице необходимо вводить в соответствии с марками автомобилей, выпускаемыми каждым заводом, а пункты назначения – в соответствии с марками автомобилей, требуемыми в каждом пункте распределения.

*Задача № 4.6**

(многопродуктовая модель с зависимыми продуктами)

Исходное условие задачи № 4.5 при условии, что некоторую часть спроса на одну из марок можно удовлетворять за счет другой в соответствии с табл. 4.8. Постройте соответствующую модель экономичных перевозок.

Таблица 4.8

Данные о заменяемых марках автомобилей

Центр распределения	Заменяемая часть спроса в %	Взаимозаменяемые марки
D	10	M_1, M_2
	20	M_3, M_4
E	10	M_1, M_3
	5	M_2, M_4

Рекомендация. Введите четыре новых пункта назначения, соответствующих комбинациям (M_1 или M_2), (M_3 или M_4), (M_1 или M_2) и (M_2 или M_4) (см. табл. 4.8). Величины потребностей новых пунктов назначения определяются на основании данных о процентном соотношении заменяемых моделей автомобилей.

Задача № 4.7

В цехе некоторого завода стоит пять станков, а количество рабочих в цехе равно четырем. Рабочий 1 не может работать на станке 3, а рабочий 3 – на станке 4. В соответствии с квалификацией рабочих начальник цеха в баллах оценил эффективность работы каждого из рабочих на каждом из станков (в 10-бальной шкале) (см. табл. 4.9). Постройте модель, позволяющую выполнять работы на станках наилучшим образом.

Таблица 4.9

Бальные оценки эффективности работы рабочих на станках

		Станок				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
Рабочий	*1*	5	5	–	2	2
	2	7	4	2	3	1
	3	9	3	5	–	2
	4	7	2	6	7	8

Задача № 4.8 (модель производства с запасами)*

Некоторая фабрика производит рюкзаки для путешественников. Спрос на эту продукцию есть только в марте–июне и составляет помесячно 100, 200, 180 и 300 шт. Объем производства рюкзаков меняется от месяца к месяцу в зависимости от выпуска других изделий. В течение рассматриваемых четырех месяцев фабрика может выпустить 50, 180, 280 и 270 рюкзаков соответственно. В каждый месяц спрос можно удовлетворить за счет

1) производства рюкзаков в течение текущего месяца;

2) избытка рюкзаков, произведенных в прошлом месяце;

3) избытка рюкзаков, произведенных в следующем месяце в счет невыполненных заказов.

В первом случае стоимость одного рюкзака составляет 700 руб. Во втором случае возникают дополнительные расходы в расчете 10 руб. на один рюкзак за хранение в течение месяца. В третьем случае за просроченные заказы начисляются штрафы в размере 40 руб. на один рюкзак за каждый просроченный месяц.

Постройте транспортную модель, позволяющую фабрике разработать оптимальный план производства на эти четыре месяца.

Рекомендация. Чтобы производственную задачу сформулировать как транспортную, необходимо установить соответствие между элементами этих задач (табл. 4.10).

Таблица 4.10

Соответствие между элементами задачи № 4.8

Транспортная система	Производственная система
1. Пункт отправления i	1. Период производства i
2. Пункт назначения j	2. Период потребления j
3. Предложение в пункте отправления i	3. Объем производства за период i
4. Спрос в пункте назначения j	4. Реализация за период j
5. Стоимость перевозки из i в j	5. Стоимость единицы продукции (производство + хранение + штрафы за период от i до j)

5. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ОПОРНЫХ ПЛАНОВ

5.1. Теоретическое введение

Опорный план является допустимым решением ТЗ и используется в качестве начального базисного решения при нахождении оптимального решения методом потенциалов. Существует три метода нахождения опорных планов: метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод Фогеля. "Качество" опорных планов, полученных этими методами, различается: в общем случае метод Фогеля дает наилучшее решение (зачастую оптимальное), а метод северо-западного угла – наихудшее.

Все существующие методы нахождения опорных планов отличаются только ***способом выбора клетки*** для заполнения. Само заполнение происходит одинаково независимо от используемого метода. Следует помнить, что перед нахождением опорного плана транспортная задача должна быть *сбалансирована*.

Метод северо-западного угла

На каждом шаге **метода северо-западного угла** из всех не вычеркнутых клеток выбирается самая левая и верхняя (северо-западная) клетка. Другими словами, на каждом шаге выбирается ***первая*** из оставшихся не вычеркнутых строк и ***первый*** из оставшихся не вычеркнутых столбцов.

Для того, чтобы *заполнить* клетку (i,j), необходимо сравнить текущий запас товара в рассматриваемой i-й строке $a_i^{тек}$ с текущей потребностью в рассматриваемом j-м столбце $b_j^{тек}$.

Если существующий запас *позволяет* перевезти всю потребность, то

- в клетку (i,j) в качестве перевозки вписывается значение потребности $b_j^{тек}$;
- j-й столбец вычеркивается, поскольку его потребность уже исчерпана;

- от существующего запаса в i-й строке отнимается величина сделанной перевозки, прежний запас зачеркивается, а вместо него записывается остаток, т.е. $\left(a_i^{тек} - b_j^{тек}\right)$.

Если существующий запас *не позволяет* перевезти всю потребность, то

- в клетку (i,j) в качестве перевозки вписывается значение запаса $a_i^{тек}$;
- i-я строка вычеркивается, поскольку ее запас уже исчерпан;
- от существующей потребности в j-й строке отнимается величина сделанной перевозки, прежняя потребность зачеркивается, а вместо нее записывается остаток, т.е. $\left(b_j^{тек} - a_i^{тек}\right)$.

Нахождение опорного плана продолжается до тех пор, пока не будут вычеркнуты все строки и столбцы.

Метод минимального элемента

На каждом шаге **метода минимального элемента** *из всех* не вычеркнутых клеток транспортной матрицы выбирается клетка с минимальной стоимостью перевозки $\min c_{ij}$. Заполнение выбранной клетки производится по правилам, описанным выше.

Метод Фогеля

На каждом шаге **метода Фогеля** для каждой i-й строки вычисляются штрафы d_i как разность между двумя наименьшими тарифами строки. Таким же образом вычисляются штрафы d_j для каждого j-го столбца. После чего выбирается максимальный штраф *из всех* штрафов строк и столбцов. В строке или столбце, соответствующем выбранному штрафу, для заполнения выбирается не вычеркнутая клетка с минимальным тарифом $\min c_{ij}$.

Если существует несколько одинаковых по величине максимальных штрафов в матрице, то в соответствующих строках или столбцах выбирается одна не вычеркнутая клетка с минимальным тарифом $\min c_{ij}$.

Если клеток с минимальным тарифом также несколько, то из них выбирается клетка (i,j) с максимальным суммарным штрафом, т.е. суммой штрафов по i-й строке и j-му столбцу.

5.2. Методические рекомендации

Формально и реальные и фиктивные столбцы и строки в транспортной матрице абсолютно ***равноправны***. Поэтому при нахождении опорных планов фиктивные строки, столбцы и тарифы необходимо анализировать и использовать точно так же как и реальные. Но при вычислении значения ЦФ фиктивные перевозки ***не учитываются***, поскольку они реально не были выполнены и оплачены.

Если величина фиктивных тарифов превышает максимальный из реальных тарифов задачи $[c^{\phi} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\right)]$, то методы минимального элемента и Фогеля позволяют получить более дешевые планы перевозок, чем в случае с нулевыми фиктивными тарифами.

Задача № 5.01

Найти тремя методами опорный план ТЗ, в которой запасы на трех складах равны 210, 170, 65 ед. продукции, потребности четырех магазинов равны 125, 90, 130, 100 ед. продукции, тарифы перевозки в рублях за единицу продукции следующие:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Проверка сбалансированности задачи показывает, что суммарный объем запасов равен суммарному объему потребностей, т.е. введение фиктивных столбцов или строк не потребуется

$$\overbrace{\underbrace{210+170+65}_{445\,\text{ед.товара}}}^{\text{запасы}} = \overbrace{\underbrace{125+90+130+100}_{445\,\text{ед.товара}}}^{\text{потребности}}.$$

Результаты нахождения опорного плана различными методами представлены в табл. 5.1, 5.2 и 5.3.

Таблица 5.1

Транспортная таблица с опорным планом северо-западного угла

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, ед. продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	125 / 5	85 / 8	1	2	210/85/0
A_2	2	5 / 5	130 / 4	35 / 9	170/165/35/0
A_3	9	2	3	65 / 1	65/0
Потребность, ед. продукции	125/0	90/5/0	130/0	100/65/0	

Опорный план $X_{СЗУ}$, найденный методом северо-западного угла

$$X_{СЗУ} = \begin{pmatrix} 125 & 85 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 130 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix} \text{[ед. товара]}.$$

Соответствующая ЦФ (общие затраты на перевозку)

$$L\left(X_{\ СЗУ}\right) = 125\cdot 5 + 85\cdot 8 + 5\cdot 5 + 130\cdot 4 + 35\cdot 9 + 65\cdot 1 = 2230\ \text{[руб.]}.$$

Таблица 5.2

Транспортная таблица с опорным планом минимального элемента

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, ед. продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	45 8	130 1	35 2	210/80/45/0
A_2	125 2	45 5	4	9	170/45/0
A_3	9	2	3	65 1	65/0
Потребность, ед. продукции	125/0	90/45/0	130/0	100/35/0	

Опорный план $X_{МЭ}$, найденный методом минимального элемента

$$X_{МЭ} = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 130 & 35 \\ 125 & 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix} \text{[ед. товара]},\ L(X_{МЭ}) = 1100 \text{ [руб.]}.$$

Таблица 5.3

Транспортная таблица с опорным планом Фогеля

	B_1	B_2	B_3	B_4	b_i	Штрафы строк, d_i			
A_1	5	8	110 1	100 2	210/110/0	1	1	1	**7**
A_2	125 2	25 5	20 4	9	170/45/25/0	2	1	1	1
A_3	9	65 2	3	1	65/0	1	1	–	–
a_j	125/0	90/25/0	130/20/0	100/0					
Штрафы столбцов, d_j	**3**	3	2	1					
	–	**3**	2	1					
	–	3	3	**7**					
	–	3	3	–					

На первом шаге нахождения опорного плана методом Фогеля возникает ситуация равенства значений максимальных штрафов транспортной матрицы (см. табл. 5.3)

$$d_{1\text{столбца}} = d_{2\text{столбца}} = 3.$$

Минимальные тарифы в этих столбцах также совпадают

$$c_{21} = c_{32} = 2.$$

Поэтому необходимо сравнить суммарные штрафы d_{ij} клеток (2,1) и (3,2)

$$d_{21} = d_{2\text{строки}} + d_{1\text{столбца}} = 2 + 3 = 5;$$

$$d_{32} = d_{3\text{строки}} + d_{2\text{столбца}} = 1 + 3 = 4.$$

Т.к. $d_{21} > d_{32}$, то выбираем на первом шаге для заполнения клетку (2,1).

Опорный план $X_Ф$, найденный методом Фогеля

$$X_Ф = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 110 & 100 \\ 125 & 25 & 20 & 0 \\ 0 & 65 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{[ед. товара]},\ L(X_Ф) = 895 \text{ [руб.]}.$$

5.3. Варианты задач для самостоятельного решения

Задача № 5.1

Найти тремя методами опорный план транспортной задачи, в которой запасы на трех складах равны 160, 140, 170 ед. продукции, потребности четырех магазинов равны 120, 50, 200, 110 ед. продукции, тарифы перевозки в рублях за единицу продукции следующие

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решите задачу для следующих случаев:

- фиктивные тарифы нулевые;

- фиктивные тарифы одинаковы по величине и превышают максимальный из реальных тарифов.

Сравните полученные опорные планы, соответствующие ЦФ и объясните причину их различия.

Задача № 5.2

Найти тремя методами опорный план транспортной задачи № 4.1 для случая, когда фиктивные тарифы больше максимального реального тарифа.

Задача № 5.3

Найти тремя методами опорный план транспортной задачи № 4.2 для случая, когда фиктивные тарифы больше максимального реального тарифа.

Задача № 5.4

Найти тремя методами опорный план транспортной задачи № 4.3 для случая, когда фиктивные тарифы больше максимального реального тарифа.

Задача № 5.5

Найти тремя методами опорный план транспортной задачи № 4.4 для случая, когда фиктивные тарифы больше максимального реального тарифа.

6. ОБЩАЯ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

6.1. Теоретическое введение

Общая распределительная задача ЛП – это РЗ, в которой работы и ресурсы (исполнители) выражаются в различных единицах измерения. Типичным примером такой задачи является организация выпуска разнородной продукции на оборудовании различных типов.

Исходные параметры модели РЗ

1) n – количество исполнителей;

2) m – количество видов выполняемых работ;

3) a_i – запас рабочего ресурса исполнителя A_i $(i = \overline{1,n})$ [ед. ресурса];

4) b_j – план по выполнению работы B_j $(j = \overline{1,m})$ [ед. работ];

5) c_{ij} – стоимость выполнения работы B_j исполнителем A_i [руб./ед. работ];

6) λ_{ij} – интенсивность выполнения работы B_j исполнителем A_i [ед. работ / ед. ресурса].

Искомые параметры модели РЗ

1) x_{ij} – планируемая загрузка исполнителя A_i при выполнении работ B_j [ед. ресурса];

2) $x_{ij}^{к}$ – количество работ B_j, которые должен будет произвести исполнитель A_i [ед. работ];

3) $L(X)$ – общие расходы на выполнение всего запланированного объема работ [руб.].

Этапы построения модели

I. Определение переменных.

II. Построение распределительной матрицы (см. табл. 6.1).

III. Задание ЦФ.

IV. Задание ограничений.

Таблица 6.1

Общий вид распределительной матрицы

Исполнители, A_i	Работы, B_j				Запас ресурса, ед. ресурса
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	λ_{11} c_{11}	λ_{12} c_{12}	…	λ_{1m} c_{1m}	a_1
A_2	λ_{21} c_{21}	λ_{22} c_{22}	…	λ_{2m} c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	λ_{n1} c_{n1}	λ_{n2} c_{n2}	…	λ_{nm} c_{nm}	a_n
План, ед. работы	b_1	b_2	…	b_m	

Модель РЗ

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\left(\lambda_{ij}x_{ij}\right)\rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{ij}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,m}, \\ \forall x_{ij}\geq 0\ \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right), \end{cases} \tag{6.1}$$

где $\left(\lambda_{ij}x_{ij}\right)$ – это количество работ j-го вида, выполненных i-м исполнителем.

Этапы решения РЗ

I. ***Преобразование РЗ в ТЗ:***

1) выбор базового ресурса и расчет нормированных производительностей ресурсов α_i:

$$\alpha_i=\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{\text{баз } j}}; \tag{6.2}$$

2) пересчет запаса рабочего ресурса исполнителей a'_i:

$$a'_i = \alpha_i a_i \quad \text{[ед. ресурса]}; \tag{6.3}$$

3) пересчет планового задания b'_j:

$$b'_j = \frac{b_j}{\lambda_{\text{баз } j}} \quad \left[\frac{\text{ед.работ} \cdot \text{ед. ресурса}}{\text{ед. работ}} = \text{ед. ресурса}\right]; \tag{6.4}$$

4) пересчет себестоимостей работ:

$$c'_{ij} = c_{ij}\lambda_{\text{баз } j} \quad \left[\frac{\text{руб.} \cdot \text{ед.работ}}{\text{ед. работ} \cdot \text{ед. ресурса}} = \frac{\text{руб.}}{\text{ед. ресурса}}\right]. \tag{6.5}$$

II. ***Проверка баланса*** пересчитанных параметров $\sum_{i=1}^{n} a'_i = \sum_{j=1}^{m} b'_j$ и построение транспортной матрицы.

III. ***Поиск оптимального решения*** ТЗ $X'^* = \left(x'^*_{ij}\right)$.

IV. ***Преобразование оптимального решения*** ТЗ X'^* в оптимальное решение РЗ X^*, причем переход $X'^* \to X^*$ выполняется по формуле (6.6)

$$x_{ij} = \frac{x'_{ij}}{\alpha_i} \quad \text{[ед. ресурса]}, \tag{6.6}$$

где x_{ij} и x'_{ij} – соответственно элементы решения РЗ и ТЗ.

V. ***Определение количества работ*** $X^{к*} = \left(x^{к*}_{ij}\right)$, соответствующее оптимальному решению РЗ X^*:

$$x^{к}_{ij} = \lambda_{ij} x_{ij} \quad \left[\frac{\text{ед. работ} \cdot \text{ед. ресурса}}{\text{ед. ресурса}} = \text{ед. работ}\right]. \tag{6.7}$$

VI. ***Определение ЦФ распределительной задачи*** $L(X^*)$ согласно (6.1).

6.2. Методические рекомендации

Задача № 6.01

На фабрике эксплуатируются три типа ткацких станков, которые могут выпускать четыре вида тканей. Известны следующие данные о производственном процессе:

- производительности станков по каждому виду ткани, м/ч

$$(\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} 24 & 30 & 18 & 42 \\ 12 & 15 & 9 & 21 \\ 8 & 10 & 6 & 14 \end{pmatrix};$$

- себестоимость тканей, руб./м

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

- фонды рабочего времени станков (a_i): 90, 220, 180 ч;
- планируемый объем выпуска тканей (b_j): 1200, 900, 1800, 840 м.

Требуется распределить выпуск ткани по станкам с целью минимизации общей себестоимости производства ткани.

Решение

Пусть переменные x_{ij} – это время, в течение которого i-й станок будет выпускать j-ю ткань. Сведем исходные данные задачи в распределительную таблицу (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Распределительная матрица задачи № 6.01

Станки	Ткани				Фонд времени a_i, ч
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 (c_{ij}) (λ_{ij}) 24	1 30	3 18	1 42	90
A_2	3 12	2 15	4 9	1 21	220
A_3	6 8	3 10	5 6	2 14	180
Объем выпуска b_j, м	1200	900	1800	840	

ЦФ имеет смысл себестоимости выпуска запланированного количества ткани всех видов

$$\begin{aligned} L(X) = {} & 2\cdot 24\cdot x_{11} + 1\cdot 30\cdot x_{12} + 3\cdot 18\cdot x_{13} + 1\cdot 42\cdot x_{14} + \\ & + 3\cdot 12\cdot x_{21} + 2\cdot 15\cdot x_{22} + 4\cdot 9\cdot x_{23} + 1\cdot 21\cdot x_{24} + \\ & + 6\cdot 8\cdot x_{31} + 3\cdot 10\cdot x_{32} + 5\cdot 6\cdot x_{33} + 2\cdot 14\cdot x_{34} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = 48x_{11} + 30x_{12} + 54x_{13} + 42x_{14} + \\ & + 36x_{21} + 30x_{22} + 36x_{23} + 21x_{24} + \\ & + 48x_{31} + 30x_{32} + 30x_{31} + 28x_{34} \to \min. \end{aligned}$$

Ограничения имеют вид

$$\begin{cases} \text{по фондам времени, ч} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 220, \\ x_{31} + x_{32} + x_{31} + x_{34} = 180, \\ \text{по объемам выпуска, м} \\ 24x_{11} + 12x_{21} + 8x_{31} = 1200, \\ 30x_{12} + 15x_{22} + 10x_{32} = 900, \\ 18x_{13} + 9x_{23} + 6x_{33} = 1800, \\ 42x_{14} + 21x_{24} + 14x_{34} = 840, \\ x_{ij} \ge 0 \left(\forall i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4}\right). \end{cases}$$

Преобразуем РЗ в ТЗ, т.е. представим исходную задачу в виде, когда ткани производит только один станок – базовый и все параметры задачи согласуем с его характеристиками. В качестве базового можно выбирать любой из станков. Мы выберем станок с максимальной производительностью, т.е. A_1. По формуле (6.2) определим производительности станков α_i, нормированные относительно производительности базового станка:

$$\alpha_1 = \frac{24}{24} = \frac{30}{30} = \frac{18}{18} = \frac{42}{42} = 1;$$

$$\alpha_2 = \frac{12}{24} = \frac{15}{30} = \frac{9}{18} = \frac{21}{42} = \frac{1}{2};$$

$$\alpha_3 = \frac{8}{24} = \frac{10}{30} = \frac{6}{18} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, базовый станок работает в два раза быстрей второго станка и в три раза быстрей третьего.

Пересчитаем фонды времени станков по формуле (6.3):

$$a_1^{'} = 90 \cdot 1 = 90 \text{ [ч]}; \ \ a_2^{'} = 220 \cdot \frac{1}{2} = 110 \text{ [ч]}; \ \ a_3^{'} = 180 \cdot \frac{1}{3} = 60 \text{ [ч]}.$$

Из этих величин следует, что тот объем работ, который второй станок выполняет за свой фонд времени 220 ч базовый станок сможет выполнить за 110 ч. Аналогично объем работ, который третий станок выполняет за 180 ч базовый выполнит за 60 ч.

Пересчитаем плановое задание по формуле (6.4):

$$b_1^{'} = \frac{1200}{24} = 50 \text{ [ч]}; \ b_2^{'} = \frac{900}{30} = 30 \text{ [ч]}; \ b_3^{'} = \frac{1800}{18} = 100 \text{ [ч]}; \ b_4^{'} = \frac{840}{42} = 20 \text{ [ч]}.$$

Отсюда следует, что план выпуска первого вида ткани базовый станок выполнит за 50 ч, второго вида – за 30 ч и т.д.

Пересчет себестоимостей производим по формуле (6.5), например:

$c'_{13} = 3 \cdot 18 = 54$ [руб./ч]; $c_{21} = 3 \cdot 24 = 72$ [руб./ч]; $c'_{34} = 2 \cdot 42 = 84$ [руб./ч].

В полученной ТЗ условие баланса (4.2) не выполняется, т.к. суммарный фонд времени станков больше, чем это необходимо для выполнения плана по выпуску всех тканей (260 ч > 200 ч). Введем фиктивный столбец $B_ф$ и запишем все пересчитанные параметры РЗ в транспортную матрицу (см. табл. 6.3). Фиктивные тарифы для упрощения приравняем к нулю.

Таблица 6.3

Транспортная матрица задачи № 6.01

Станки	Ткани					Фонд времени a', ч
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_Ф$	
A_1	48	30	54	42	0	90
A_2	72	60	72	42	0	110
A_3	144	90	90	84	0	60
Объем выпуска b'_j, ч	50	30	100	20	60	

Для упрощения вместо оптимального решения рассмотрим опорный план $X'_{СЗУ}$, найденный методом северо-западного угла.

$$X'_{СЗУ} = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60^ф \end{pmatrix} [ч].$$

Преобразуем опорный план ТЗ $X'_{СЗУ}$ в опорный план РЗ $X_{СЗУ}$ согласно (6.6)

$$X_{СЗУ} = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 180 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 180^ф \end{pmatrix} [ч].$$

Таким образом, первый станок должен 50 ч производить ткань первого вида, 30 ч – ткань второго вида и 10 ч – ткань третьего вида. Второй станок должен 180 ч производить ткань третьего вида и 40 ч – ткань четвертого вида. А третий станок будет простаивать, не выпуская ткань вообще, т.к. согласно решению, его загрузка находится в фиктивном столбце ($x_{35} = 180^{ф}$).

Определим, сколько метров ткани каждого вида должны произвести станки по формуле (6.7)

$$X_{СЗУ}^{к} = \begin{pmatrix} 1200 & 900 & 180 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1620 & 840 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix} [м].$$

Определим общую себестоимость производства по формуле (6.1), используя вычисленные значения элементов матрицы $X_{СЗУ}^{к}$

$$L\left(X\ \right) = 2\cdot 1200 + 1\cdot 900 + 3\cdot 180 + 4\cdot 1620 + 1\cdot 840 = 16020\ (руб.).$$

6.3. Варианты задач для самостоятельного решения

Задача № 6.1

Решите РЗ, исходные данные которой приведены в табл. 6.4.

Таблица 6.4

Распределительная матрица задачи № 6.1

Производитель	Продукция			Фонд времени, ч
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 (c_{ij}, руб./т) (λ_{ij}, т/ч) 6	5 2	4 4	360
A_2	6 12	2 4	2 8	90
A_3	3 72	9 24	1 48	146
A_4	2 9	5 3	3 6	1296
Объем выпуска, т	7056	3216	2976	

Задача № 6.2

Некоторая фирма содержит три магазина, которым еженедельно следует доставлять товар: первому магазину – 1050 кг сыра, второму – 600 мешков муки, третьему – 2400 упаковок сока. Товары доставляются грузовыми машинами четырех транспортных предприятий. Количество машин на этих предприятиях составляет 65, 40, 45 и 20 машин. Все машины имеют различную грузоподъемность [ед. тов. / маш.], в зависимости от типа машины и типа перевозимого груза

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 12 \\ 5 & 3 & 6 \\ 50 & 30 & 60 \\ 25 & 15 & 30 \\ \text{кг}/\text{маш.} & \text{мешков}/\text{маш.} & \text{упак.}/\text{маш.} \end{pmatrix}.$$

Стоимости использования машин [руб. / маш.] в зависимости от дальности перевозки и емкости машины равны

$$\begin{pmatrix} 30 & 24 & 24 \\ 10 & 9 & 6 \\ 250 & 210 & 240 \\ 100 & 75 & 90 \end{pmatrix}.$$

Организуйте экономичную перевозку товаров (при решении используйте метод северо-западного угла). *Будьте внимательны при определении исходных себестоимостей перевозок распределительной задачи.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. М.: Мир, 1971.

2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1986.

3. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев: Вища школа, 1979.

4. Таха Х.А. Введение в исследование операций. В 2-х книгах. М.: Мир, 1985.

5. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом "Вильямс", 2001.

6. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование. Минск: Вышэйшая школа, 1995.

7. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: математическое программирование. Минск: Вышэйшая школа, 2001.

8. Эддоус М. , Стенсфилд Р. Методы принятия решений. М.: ЮНИТИ, 1997.

Часть III. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

7. ПОСТРОЕНИЕ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

7.1. Теоретическое введение

Построение сетевой модели (**структурное планирование**) начинается с разбиения проекта на четко определенные работы, для которых определяется продолжительность. **Работа** – это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата, требующий затрат каких-либо ресурсов и имеющий протяженность во времени. По количеству затрачиваемого времени работа может быть:

- **действительной**, т.е. требующей затрат времени;
- **фиктивной**, т.е. формально не требующей затрат времени.

Фиктивная работа может реально существовать, например, "передача документов от одного отдела к другому". Если продолжительность такой работы несоизмеримо мала по сравнению с продолжительностью других работ проекта, то формально ее принимают равной 0. Существуют фиктивные работы, которым в реальности не соответствуют никакие действия. Такие фиктивные работы только представляют связь между другими работами сетевой модели.

Работы связаны друг с другом таким образом, что выполнение одних работ может быть начато ***только после*** завершения некоторых других. **Событие** – это момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Событие представляет собой результат проведенных работ и, в отличие от работ, не имеет протяженности во времени.

Взаимосвязь работ и событий, необходимых для достижения конечной цели проекта, изображается с помощью **сетевого графика** (сетевой модели). Работы изображаются ***стрелками***, которые соединяют ***вершины***, изображающие события. Начало и окончание любой работы описываются парой событий, которые называются **начальным** и **конечным** событиями.

Поэтому для указания конкретной работы используют код работы (i,j), состоящий из номеров начального (i-го) и конечного (j-го) событий (рис. 7.1).

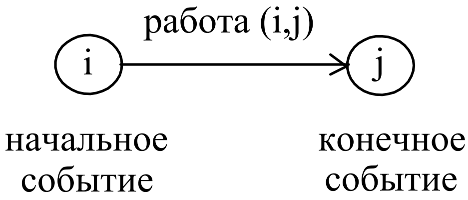

Рис.7.1. Кодирование работы

Любое событие может считаться наступившим только тогда, когда закончатся ***все*** входящие в него работы. Поэтому работы, выходящие из некоторого события, не могут начаться, пока не будут завершены ***все*** работы, входящие в это событие. Событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. с которого начинается проект, называют **исходным**. Событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта, называется **завершающим**.

7.2. Методические рекомендации по построению сетевых моделей

При построении сетевого графика необходимо следовать следующим правилам:

- длина стрелки не зависит от времени выполнения работы;
- стрелка может не быть прямолинейным отрезком;
- для действительных работ используются сплошные, а для фиктивных – пунктирные стрелки;
- каждая операция должна быть представлена только одной стрелкой;
- между одними и теми же событиями не должно быть **параллельных** работ, т.е. работ с одинаковыми кодами;
- следует избегать пересечения стрелок;
- не должно быть стрелок, направленных справа налево;

- номер начального события должен быть меньше номера конечного события;
- не должно быть **висячих** событий (т.е. не имеющих предшествующих событий), кроме исходного;
- не должно быть **тупиковых** событий (т.е. не имеющих последующих событий), кроме завершающего;
- не должно быть циклов (рис. 7.2).

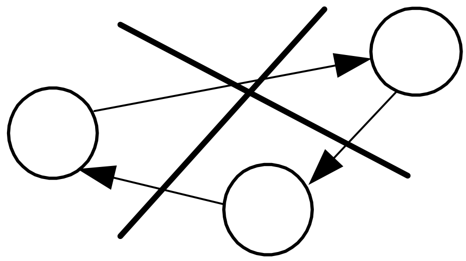

Рис. 7.2. Недопустимость циклов

Исходные данные для построения сетевой модели могут задаваться различными способами, например,

- описанием предполагаемого проекта. В этом случае необходимо самостоятельно разбить его на отдельные работы и установить их взаимные связи;
- списком работ проекта. В этом случае необходимо проанализировать содержание работ и установить существующие между ними связи;
- списком работ проекта с указанием их упорядочения. В этом случае необходимо только отобразить работы на сетевом графике.

Построение сетевого графика необходимо начинать с выявления *исходных* работ модели. Если согласно условию некоторая работа может выполняться, не ожидая окончания каких-либо других работ, то такая работа является *исходной* в сетевой модели и ее начальным событием является *исходное* событие. Если исходных работ несколько, то их стрелки выходят все из одного исходного события.

Если, согласно условию, после окончания некоторой работы не должны выполняться никакие другие работы, то такая работа является *завершающей* работой сетевой модели и ее конечным событием является *завершающее* событие. Если завершающих исходных работ несколько, то их стрелки заходят все в одно завершающее событие.

Если, согласно условию, несколько работ имеют общее начальное и общее конечное события, то они являются *параллельными*, имеют одинаковый код, что недопустимо. Для устранения параллельности работ вводят дополнительное событие и фиктивную работу (которой в реальности не соответствует никакое действие) таким образом, чтобы конечные события работ различались (рис. 7.3.).

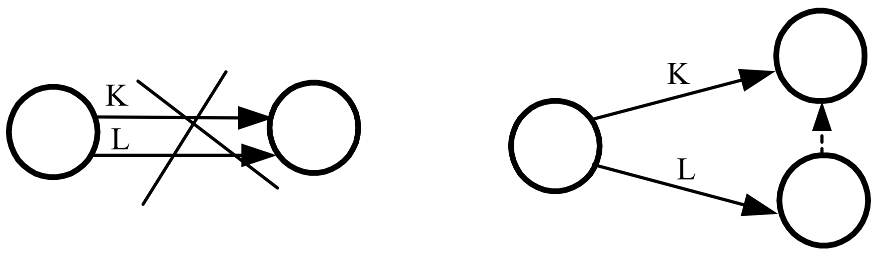

Рис. 7.3. Устранение параллельности двух работ

Задача № 7.01

Постройте сетевую модель программы опроса общественного мнения, которая включает разработку (A; 1 день) и распечатку анкет (B; 0,5 дня), прием на работу (C; 2 дня) и обучение (D; 2 дня) персонала, выбор опрашиваемых лиц (E; 2 дня), рассылку им анкет (F; 1 день) и анализ полученных данных (G; 5 дней).

Решение

Из условия задачи нам известно содержание работ, но явно не указаны взаимосвязи между работами. Поэтому для их установления необходимо проанализировать смысл каждой конкретной работы и выяснить, какие из остальных работ должны ей непосредственно предшествовать. Исходной работой, начинающей сетевой график, в данном случае является "прием на работу" (C), поскольку все остальные работы должны выполняться уже принятыми на работу сотрудниками (рис. 7.4). Перед выполнением всех работ по опросу общественного мнения сотрудников необходимо обучить персонал

(D). Перед тем как разослать анкеты (F), их надо разработать (A), распечатать (B) и выбрать опрашиваемых лиц (E), причем работу с анкетами и выбор лиц можно выполнять одновременно. Завершающей работой проекта является анализ полученных данных (G), который нельзя выполнить без предварительной рассылки анкет (F). В результате этих рассуждений построим сетевую модель и пронумеруем события модели (см. рис. 7.4).

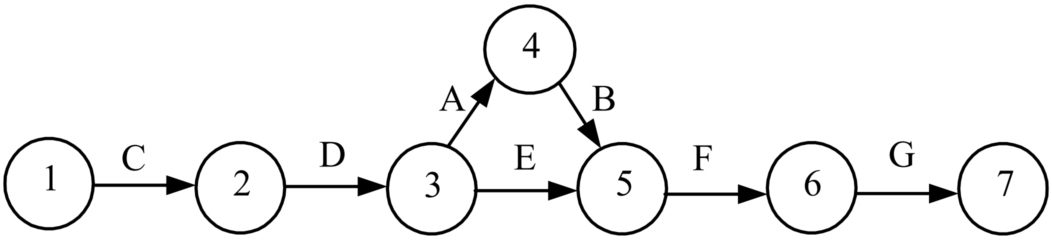

Рис.7.4. Сетевая модель программы опроса общественного мнения

Задача № 7.02

Постройте сетевую модель, включающую работы A, B, C, ..., L, которая отображает следующее упорядочение работ:

1) A, B и C – исходные операции проекта;
2) A и B предшествуют D;
3) B предшествует E, F и H;
4) F и C предшествует G;
5) E и H предшествуют I и J;
6) C, D, F и J предшествуют K;
7) K предшествует L.

Решение

В пункте 1) условия явно указано, что A, B и C являются исходными работами, поэтому изобразим их тремя стрелками, выходящими из исходного события 1. Пункт 2) условия означает, что стрелки работ A и B должны окончиться в одном событии, из которого выйдет стрелка работы D. Но поскольку стрелки работ A и B также и начинаются в одном событии, то имеет место параллельность работ, которая недопустима правилами построения сетевых моделей (см. рис. 7.5).

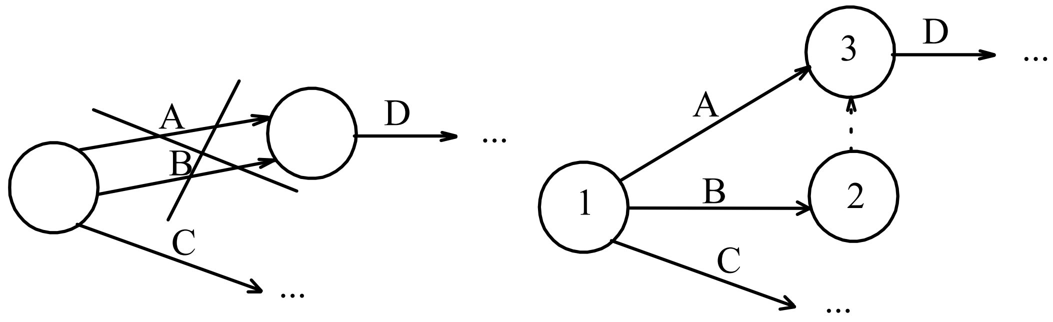

Рис. 7.5. Устранение параллельности работ A и B

Для ее устранения введем дополнительное событие 2, в которое войдет работа B, после чего соединим события 2 и 3, в которые входят работы A и B пунктирной стрелкой фиктивной работы. В данном случае фиктивная работа (2,3) не соответствует никакой реальной работе, а лишь отображает логическую связь между работами B и D. Дальнейшее построение рассмотрим с помощью рис.7.6

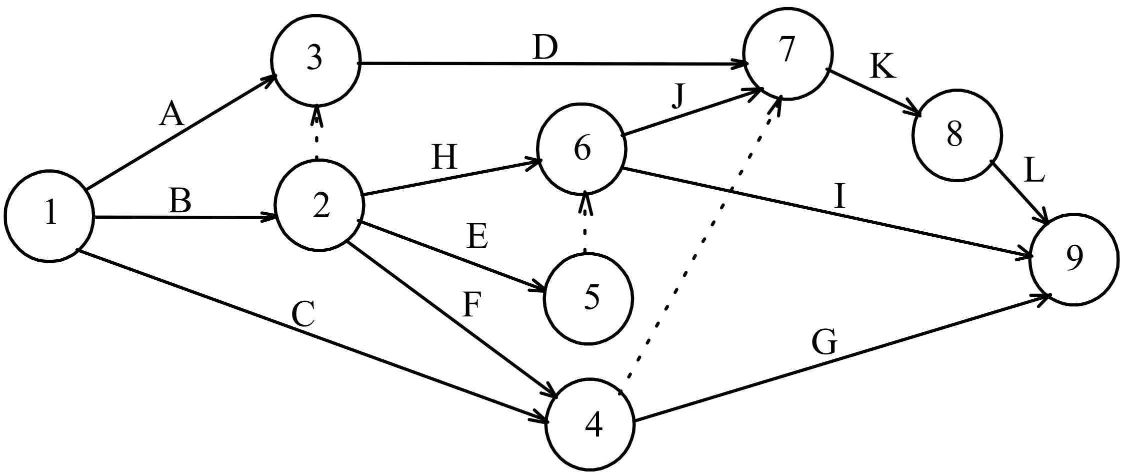

Рис. 7.6. Сетевая модель задачи № 7.02

Согласно пункту 3) условия задачи из события 2, выходят три стрелки работ E, F и H. Согласно пункту 4) условия задачи стрелки работ C и F должны войти в общее событие, из которого выйдет стрелка работы G. Проблема с параллельностью работ E и H [пункт 5) условия задачи] решается путем введения дополнительного события 5 и фиктивной работы (5,6). Для отображения в сетевой модели пункта 6) условия задачи введем стрелки работ

D и J в событие 7, а связь работ F и C с работой K отобразим с помощью фиктивной работы (4,7). Стрелки работ F и C нельзя было напрямую вводить в событие 7, потому что после них должна следовать работа G, которая с работами D и J никак не связана. Стрелка работы L выходит из события 8, т.е. после окончания работы K в соответствии с пунктом 7) условия задачи.

Поскольку в условии не указано, что работы L, I и G предшествуют каким-либо другим работам, то эти работы являются завершающими и их стрелки войдут в завершающее событие 9. Нумерацию событий проводят после построения сетевого графика, следя за тем, чтобы номер начального события каждой работы был меньше номера ее конечного события.

7.3. Варианты задач для самостоятельного решения

Задача № 7.1

Постройте сетевую модель разработки и производства станков, используя упорядочение работ из табл. 7.1.

Таблица 7.1

Исходные данные задачи № 7.1

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Время, ед. времени
A – составление сметы затрат	–	3
B – согласование оценок	A	6
C – покупка собственного оборудования	B	1
D – подготовка конструкторских проектов	B	2
E – строительство основного цеха	D	1
F – монтаж оборудования	C,E	5
G – испытание оборудования	F	4
H – определение типа модели	D	9
I – проектирование внешнего корпуса	D	7
J – создание внешнего корпуса	H,I	6
K – конечная сборка	G,J	3
L – контрольная проверка	K	7

Задача № 7.2

Постройте сетевую модель организации выступления хора при свечах, используя данные табл. 7.2.

Таблица 7.2

Исходные данные задачи № 7.2

Содержание работы	Длительность, ед. времени
A – выбор музыкального произведения	21
B – разучивание музыки	14
C – размножение нотных партий	14
D – репетиции хора	70
E – получение канделябров в прокат	14
F – закупка свечей	1
G – установка канделябров со свечами	1
H – закупка декораций	1
I – установка декораций	1
J – заказ костюмов для хора	7
K – отглаживание костюмов	7
L – проверка системы усиления звука	7
M – настройка системы усиления звука	1
N – генеральная репетиция хора	1
O – банкет	1
P – проведение концерта	1

Задача № 7.3

Постройте сетевую модель, используя упорядочение работ из табл. 7.3.

Таблица 7.3

Исходные данные задачи № 7.3

Название	Непосредственно предшествующие работы	Длительность, ед. времени
A	–	2
B	–	10
C	–	8
D	A,B	4
E	B,C	3
F	C	1
G	D,E	9
H	F,G	7

Задача № 7.4

Постройте сетевую модель переноса участка воздушной высоковольтной линии, используя упорядочение работ из табл. 7.4.

Таблица 7.4

Исходные данные задачи № 7.4

Содержание работы	Непосредственно предшествующие работы	Длительность, ед. времени
A – оценка состава и содержания работ	–	1
B – осведомление потребителей электроэнергии о временном отключении системы	A	0,5
C – составление заявки на материалы и оборудование	A	1
D – обследование района проведения работ	A	0,5
E – доставка опор и материалов	C,D	3
F – распределение опор по точкам монтажа	E	3,5
G – увязка точек монтажа	D	0,5
H – разметка точек монтажа	G	0,5
I – рытье ям под опоры	H	3
J – монтаж опор	F,I	4
K – защита старых проводов	F,I	1
L – протяжка новых проводов	J,K	2
M – монтаж арматуры	L	2
N – выверка провиса новых проводов	L	2
O – подстрижка деревьев	D	2
P – обесточивание и переключение линий	B,M,N,O	0,1
Q – включение и фазировка новой линии	P	0,5
R – уборка строительного мусора	Q	1
S – снятие старых проводов	Q	1
T – демонтаж старых опор	S	2
U – доставка неиспользованных материалов на склад	I	2

Задача № 7.5

Найдите нарушения правил построения сетевых графиков в сетевой модели на рис. 7.7.

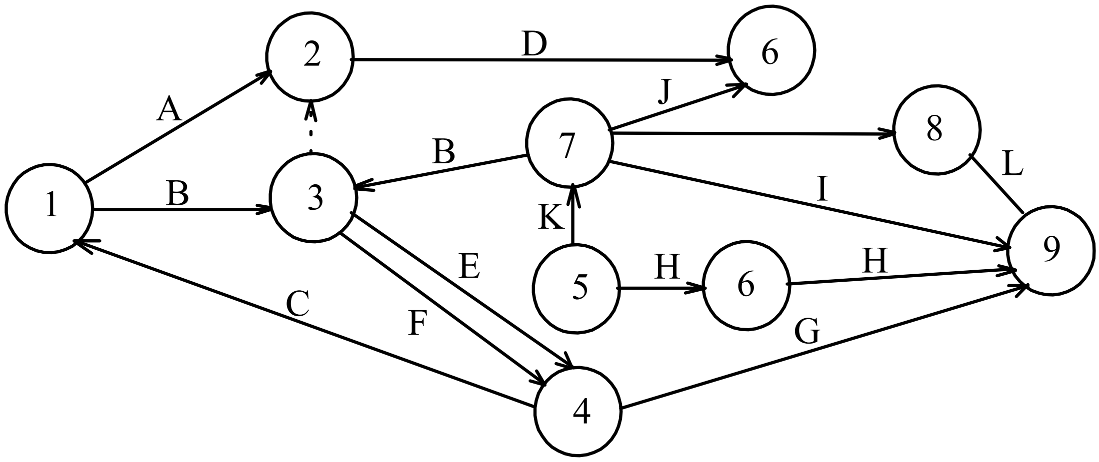

Рис. 7.7. Сетевая модель задачи № 7.5

Задача № 7.6*

Используя данные о непосредственно предшествующих работах (табл. 7.5), перечислите работы, которые неверно отображены на сетевом графике (рис. 7.8), устраните найденные ошибки.

Таблица 7.5

Исходные данные задачи № 7.6

Название	Непосредственно предшествующие работы	Длительность, ед. времени
A	–	9
B	D	6
C	B, F, G	5
D	–	8
E	B, F, G	8
F	A, N	4
G	–	5
H	C, L	7
I	B, G	1
J	I,M	12
K	H,I,M	6
L	I,M	4
M	D	2
N	–	6

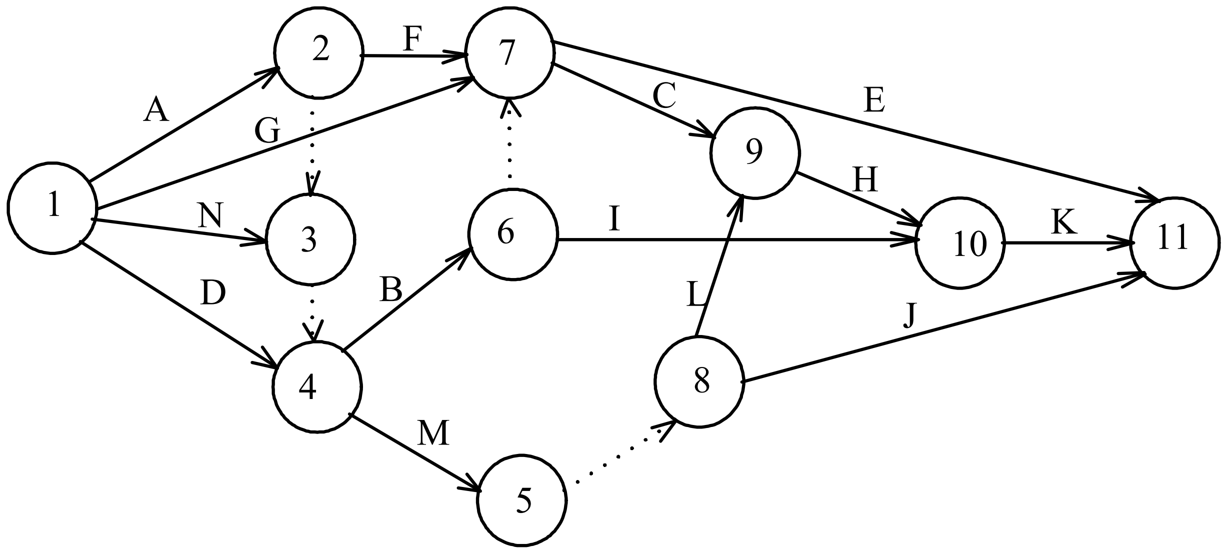

Рис. 7.8. Сетевая модель задачи № 7.6

8. РАСЧЕТ И АНАЛИЗ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

8.1. Теоретическое введение

Календарное планирование предусматривает определение моментов начала и окончания каждой работы и других временных характеристик сетевого графика. Это позволяет проанализировать сетевую модель, выявить критические работы, непосредственно определяющие срок выполнения проекта, провести оптимизацию использования ресурсов (временных, финансовых, исполнителей).

Расчет сетевой модели начинают с временных параметров событий, которые вписывают непосредственно в вершины сетевого графика *(рис. 8.1):*

- $T_р(i)$ – ранний срок наступления события i, минимально необходимый для выполнения всех работ, которые предшествуют событию i;
- $T_п(i)$ – поздний срок наступления события i, превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети;

- $R(i)=T_п(i)-T_р(i)$ – резерв события i, т.е. время, на которое может быть отсрочено наступление события i без нарушения сроков завершения проекта в целом.

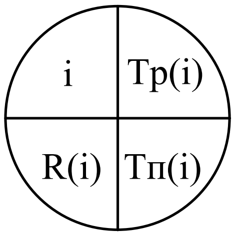

Рис. 8.1. Отображение временных параметров событий на сетевом графике

Ранние сроки свершения событий $T_р(i)$ рассчитываются от исходного (И) к завершающему (З) событию следующим образом:

1) для исходного события И $T_р(И)=0$;

2) для всех остальных событий I

$$T_р(i)=\max_{\forall(k,i)}[T_р(k)+t(k,i)],$$

где максимум берется по всем работам (k,i), входящим в событие i; $t(k,i)$ – длительность работы (k,i) (рис. 8.2).

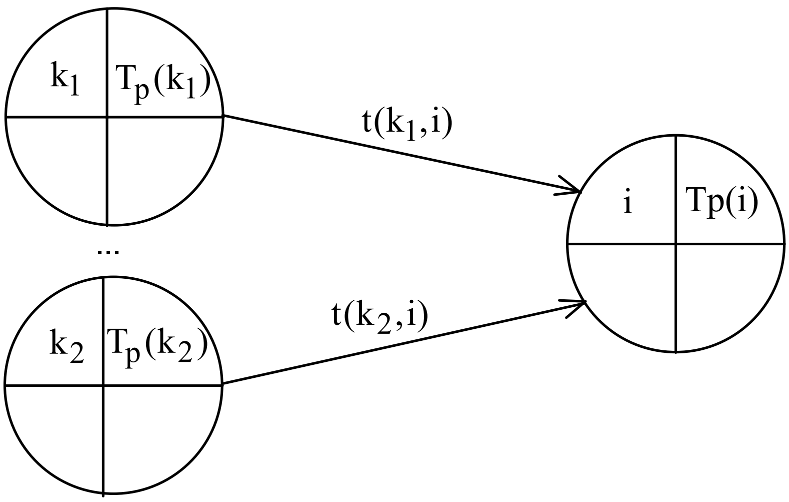

Рис. 8.2. Расчет раннего срока $T_р(i)$ свершения события i

Поздние сроки свершения событий $T_п(i)$ рассчитываются от завершающего к исходному событию:

1) для завершающего события З $T_п(З) = T_р(З)$;

2) для всех остальных событий

$$T_п(i) = \min_{\forall(i,j)} [T_п(j) - t(i,j)],$$

где минимум берется по всем работам (i,j), выходящим из события i; $t(k,i)$ – длительность работы (k,i) (рис. 8.3).

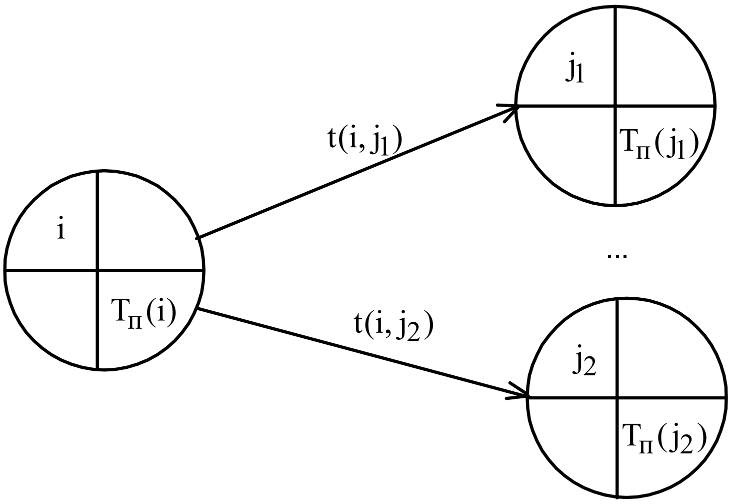

Рис. 8.3. Расчет позднего срока $T_п(i)$ свершения события i

Временные параметры работ определяются на основе ранних и поздних сроков событий:

- $T_{рн}(i,j) = T_р(i)$ – ранний срок начала работы;
- $T_{ро}(i,j) = T_р(i) + t(i,j)$ – ранний срок окончания работы;
- $T_{по}(i,j) = T_п(j)$ – поздний срок окончания работы;
- $T_{пн}(i,j) = T_п(j) - t(i,j)$ – поздний срок начала работы;
- $R_п(i,j) = T_п(j) - T_р(i) - t(i,j)$ – полный резерв работы показывает максимальное время, на которое можно увеличить длительность работы (i,j)

или отсрочить ее начало, чтобы не нарушился срок завершения проекта в целом;

- $R_c(i,j) = T_p(j) - T_p(i) - t(i,j)$ – свободный резерв работы показывает максимальное время, на которое можно увеличить продолжительность работы (i,j) или отсрочить ее начало, не меняя ранних сроков начала последующих работ.

Путь – это последовательность работ в сетевом графике (в частном случае это одна работа), в которой конечное событие одной работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. **Полный путь –** это путь от исходного до завершающего события. **Критический путь –** максимальный по продолжительности полный путь. Работы, лежащие на критическом пути, называют **критическими**. Критические работы имеют нулевые свободные и полные резервы. **Подкритический путь –** полный путь, ближайший по длительности к критическому пути.

Для проведения анализа временных параметров сетевой модели используют **график привязки**, который отображает взаимосвязь выполняемых работ во времени. По вертикальной оси графика привязки откладываются коды работ, по горизонтальной оси – отрезки, соответствующие длительностям работ (раннее начало и раннее окончание работ). График привязки можно построить на основе данных о продолжительности работ. При этом необходимо помнить, что работа (i,j) может выполняться только после того как будут выполнены все предшествующие ей работы (k,i).

8.2. Методические рекомендации

Задача № 8.01

Компания разрабатывает строительный проект. Исходные данные по основным операциям проекта представлены в табл. 8.1. Постройте сетевую модель проекта, определите критические пути модели и проанализируйте, как влияет на ход выполнения проекта задержка работы D на 4 недели.

Таблица 8.1

Исходные данные задачи № 8.01

Название	Непосредственно предшествующие операции	Длительность, недели
A	–	4
B	–	6
C	A,B	7
D	B	3
E	C	4
F	D	5
G	E,F	3

Решение

Построим сетевую модель и рассчитаем временные параметры событий (рис. 8.3). При поиске критических путей на сетевом графике будем использовать следующие условия его критичности:

- ***необходимое условие – нулевые резервы событий, лежащих на критическом пути;***
- ***достаточное условие – нулевые полные резервы работ, лежащих на критическом пути.***

Согласно необходимому условию два полных пути сетевой модели (см. рис. 8.3) $L_1 = 1,2,3,4,6,7$ и $L_2 = 1,3,4,6,7$ могут быть критическими. Проверим достаточное условие критичности для работ (1,2) и (1,3)

$$R_{п}(1,2) = T_{п}(2) - T_{р}(1) - t(1,2) = 6 - 0 - 6 = 0;$$

$$R_{п}(1,3) = T_{п}(3) - T_{р}(1) - t(1,2) = 6 - 0 - 4 = 2.$$

Путь L_2, начинающийся с работы (1,3) не является критическим, т.к. как минимум одна из его работ (1,3) не является критической. Работа (1,3) имеет ненулевой полный резерв, а значит может быть задержана с выполнением, что недопустимо для критических работ.

Таким образом, сетевая модель имеет единственный критический путь $L_{кр} = 1, 2, 3, 4, 6, 7$ длительностью $T'_{кр} = 20$ недель. За выполнением работ этого пути необходим особый контроль, т.к. любое увеличение их длительности нарушит срок выполнения проекта в целом.

Работа D или (2,5) не является критической, ее полный резерв равен 3-м неделям. Это означает, что при задержке работы в пределах 3-х недель срок выполнения проекта не будет нарушен. Поэтому если согласно условию работа D задержится на 4 недели, то весь проект закончится на 1 неделю позже.

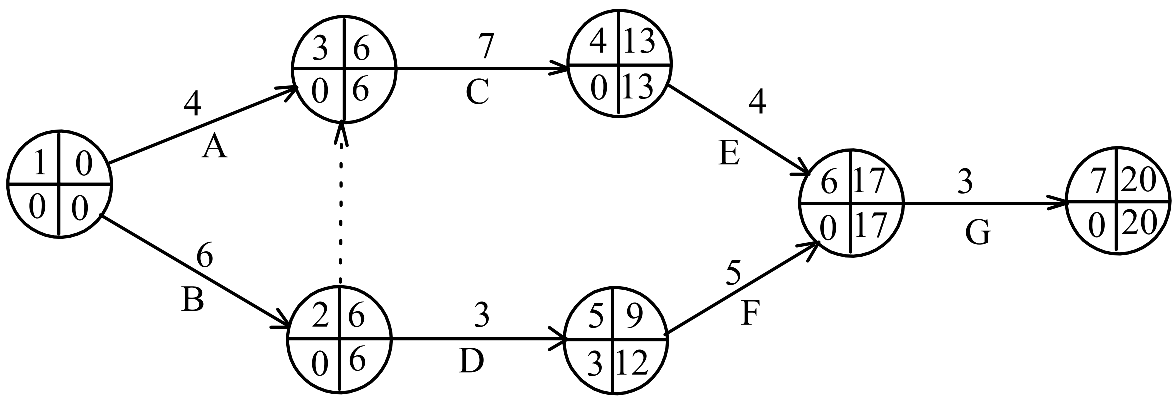

Рис. 8.3. Сетевой график задачи № 8.01

Задача № 8.02

По данным о кодах и длительностях работ в днях (табл. 8.2) постройте *график привязки* сетевой модели, определите критические пути и их длительность. Определите свободные и полные резервы каждой работы, отметьте на графике привязки свободные резервы работ.

Таблица 8.2

Исходные данные задачи № 8.02

(i,j)	1,2	1,3	1,4	1,5	2,3	3,6	3,7	4,5	4,6	5,7	6,7
t(i,j), дни	3	3	2	10	2	5	9	10	6	1	4

Общие рекомендации

При поиске критических путей следует помнить, что признаком критической работы являются нулевые значения резервов времени. Это означает, что каждая последующая критическая работа будет начинаться *строго в момент окончания* предыдущей критической работы. Вследствие этого сдвиг любой из работ критического пути обязательно приведет к увеличению первоначальной длительности проекта ($T_{кр}$). Кроме того, следует учесть, что критический путь является *полным*, т.е. соединяет исходное и завершающее события сети. Поэтому на графике привязки первая из работ критического пути всегда начинается в исходном событии сети с нулевого (начального) момента времени, а последняя из работ критического пути всегда завершается позже всех остальных работ сети в завершающем событии.

Из вышеприведенных соображений следует способ определения критического пути на графике привязки (*все найденные работы выписываются последовательно справа налево*):

1) найти на графике привязки и выписать работу (i,j), которая заканчивается позже всех остальных. Это будет последняя работа критического пути (ее конечное событие иметь номер завершающего события сети);

2) из всех работ сети (k,i), конечное событие которых i совпадает с начальным событием i работы (i,j), найденной в п. 1), выбрать и выписать ту, которая на графике вплотную примыкает к работе (i,j);

3) из всех работ сети (l,k), конечное событие которых k совпадает с начальным событием k работы (k,i), найденной в п. 2), выбрать и выписать ту, которая на графике вплотную примыкает к работе (k,i);

4) продолжать п. 3) до тех пор, пока не будет найдена исходная работа сети, т.е. начинающаяся в нулевой момент времени (ее начальное событие будет иметь номер исходного события сети, например, 1).

Следует заметить, что если в сетевой модели несколько критических путей, то, выполняя вышеописанные действия, можно обнаружить несколько работ, удовлетворяющих сформулированным требованиям. В таком случае необходимо продолжать поиск по каждой из таких работ в отдельности. В сложных сетевых моделях подобные разветвления могут привести к большим затратам времени на поиск критически путей. Тем не менее, такой способ хорош для учебных целей, поскольку дает понимание значения критических работ в сетевой модели и учит "читать" и понимать график привязки.

Решение

I. Поиск критических путей

1) Построим график привязки (рис. 8.4).

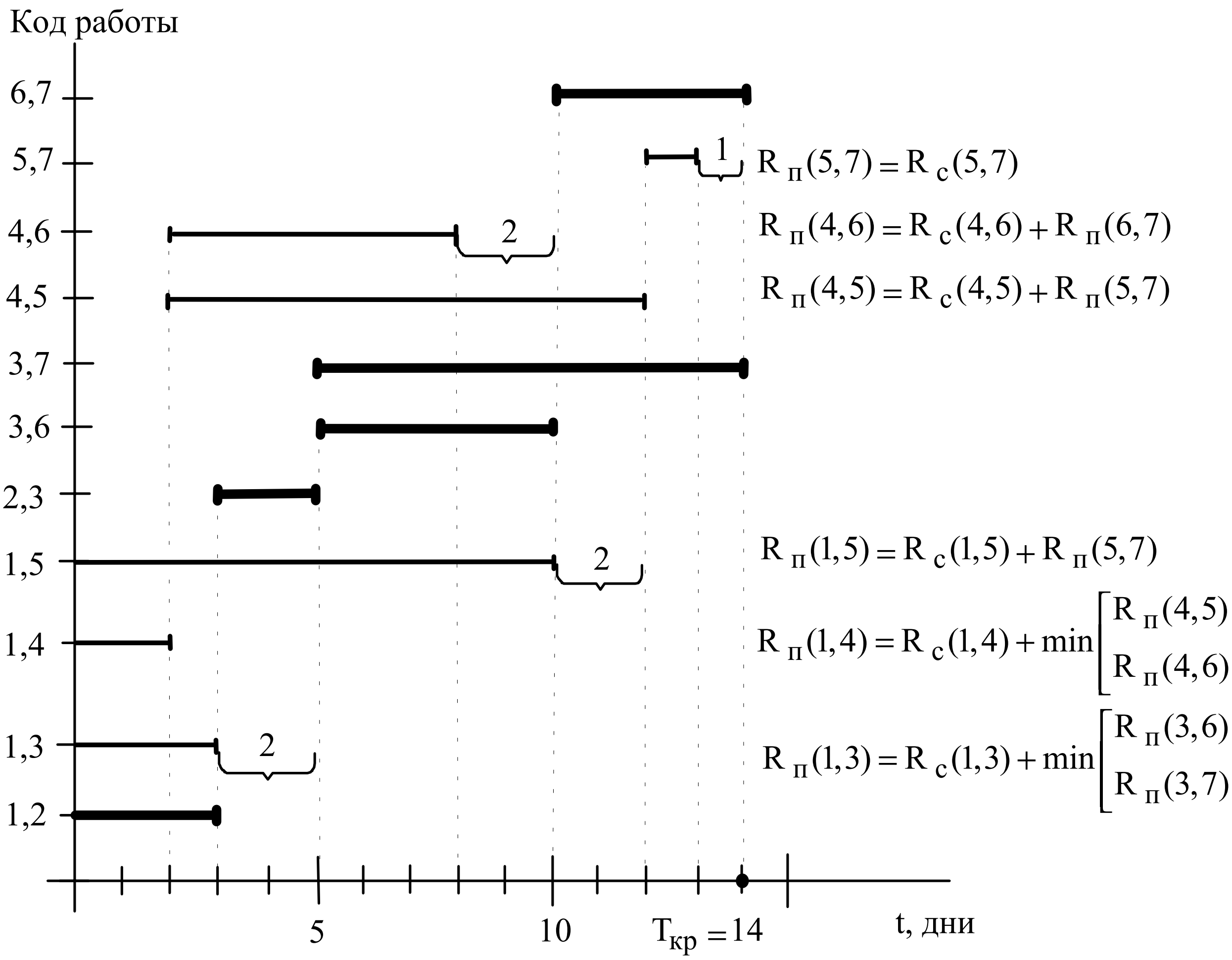

Рис. 8.4. График привязки задачи № 8.02

2) Начнем поиск критических путей (справа налево) с работ, завершающих проект. На графике привязки (см. рис. 8.4) две работы (6,7) и (3,7), которые заканчиваются позже остальных в завершающем событии № 7. Записываем работы, определенные как критические справа налево

$$L_{кр_1} = \ldots (6,7); \tag{8.1}$$

$$L_{кр_2} = \ldots (3,7).$$

3) Найдем критическую работу из $L_{кр_1}$, предшествующую (6,7). Код этой работы должен оканчиваться на 6. Таких работ две – (4,6) и (3,6). Но только одна из них, работа (3,6) по времени своего окончания вплотную "примыкает" на графике к началу работы (6,7). Допишем слева найденную критическую работу (3,6) к выражению (8.1)

$$L_{кр_1} = \ldots (3,6);\ (6,7). \tag{8.2}$$

4) Найдем критическую работу из $L_{кр_1}$, предшествующую (3,6). Код этой работы должен оканчиваться на 3. Таких работ две – (2,3) и (1,3). Но только одна из них, работа (2,3) по времени своего окончания вплотную "примыкает" на графике к началу работы (3,6). Допишем слева найденную критическую работу (2,3) к выражению (8.2)

$$L_{кр_1} = \ldots (2,3); (3,6); (6,7). \tag{8.3}$$

5) Найдем критическую работу из $L_{кр_1}$, предшествующую (2,3). Код этой работы должен оканчиваться на 2. Работа (1,2) по времени своего окончания вплотную "примыкает" на графике к началу работы (2,3). С этой работы начинается критический путь $L_{кр_1}$

$$L_{кр_1} = (1, 2); (2,3); (3,6); (6,7).$$

6) Аналогичный поиск работ критического пути $L_{кр_2}$ приводит к результату $L_{кр_2} = (1,2); (2,3); (3,7)$.

В другой форме записи $L_{кр_1} = 1, 2, 3, 6, 7$ и $L_{кр_2} = 1, 2, 3, 7$.

7) Для наглядности выделим на графике привязки критические работы жирной линией.

II. Поиск резервов работ

1) Для всех найденных критических работ впишем в табл.3 *нулевые* значения свободного и полного резервов. Рассмотрим некритические работы, начиная с конца табл. 8.3.

Таблица 8.3

Резервы работ из задачи № 8.02

i, j	$t(i, j)$	$R_с(i, j)$	$R_п(i, j)$	Критичность
1,2	3	**0**	**0**	Критическая
1,3	3	2	2	–
1,4	2	0	1	–
1,5	10	2	3	–
2,3	2	**0**	**0**	Критическая
3,6	5	**0**	**0**	Критическая
3,7	9	**0**	**0**	Критическая
4,5	10	0	1	–
4,6	6	2	2	–
5,7	1	1	1	–
6,7	4	**0**	**0**	Критическая

2) Работа (5,7), согласно графику привязки (см. рис. 8.4) заканчивается в 13-й день, а завершающее событие 7 сети, в которое она входит, наступает лишь в 14-й день. Т.е. если работа (5,7) задержится на 1 день, то это не повлияет на срок выполнения проекта ($T_{кр} = 14$ дней). Поскольку (5,7) завершающая работа сети, то ее полный и свободный резервы равны $R_п(5,7) = R_с(5,7) = 1$.

3) Работа (4,6) заканчивается в 8-й день, в то время как последующая работа (6,7) начинается в 10-й день. То есть, работа (4,6) может задержаться на 2 дня и это никак не повлияет на время начала последующей работы (6,7), т.е. $R_с(4,6) = 2$.

Правило № 8.1

Полный резерв любой работы складывается из собственного свободного резерва и минимального из полных резервов непосредственно следующих работ.

За работой (4,6) следует только критическая работа (6,7) с нулевым полным резервом. Поэтому $R_{п}(4,6) = R_{c}(4,6) + R_{п}(6,7) = 2 + 0 = 2$.

4) Работа (4,5) заканчивается в 12-й день, в этот же день начинается следующая работа (5,7), т.е. любая задержка выполнения работы (4,5) приведет к задержке начала работы (5,7). Это означает, что работа (4,5) не имеет свободного резерва $R_{c}(4,5) = 0$. Но если сдвинуть во времени работу (4,5) на 1 день, то работа (5,7) также сдвинется на 1 день и это не нарушит срок выполнения проекта, т.к. у работы (5,7) есть временной резерв. Таким образом согласно правилу № 8.1

$$R_{п}(4,5) = R_{c}(4,5) + R_{п}(5,7) = 0 + 1 = 1.$$

5) Работа (1,5) заканчивается в 10-й день, в то время как последующая работа (5,7) начинается в 12-й день. Т.е. работа (1,5) может задержаться на 2 дня и это никак не повлияет на время начала последующей работы (5,7), т.е. $R_{c}(1,5) = 2$. Кроме того, поскольку последующая работа (5,7) имеет резерв в 1 день, то, в общем, работу (1,5) можно сдвинуть на 3 дня и это не нарушит сроков проекта (см. рис. 8.4), т.е.

$$R_{п}(1,5) = R_{c}(1,5) + R_{п}(5,7) = 2 + 1 = 3.$$

6) Работа (1,4) заканчивается во 2-й день, и в этот же день начинаются следующие работы (4,5) и (4,6). Т.е. работа (1,4) не имеет свободного резерва времени $R_{c}(1,4) = 0$. Поскольку после работы (1,4) следуют две работы с различными полными резервами, то согласно правилу № 8.1

$$R_п(1,4) = R_c(1,4) + \min\left[R_п(4,5); R_п(4,6)\right] = 0 + \min[1;2] = 0 + 1 = 1.$$

7) Работа (1,3) заканчивается в 3-й день, а следующие за ней работы (3,6) и (3,7) начинаются в 5-й день, т.е. $R_c(1,3) = 2$. Поскольку обе последующие работы критические, то полный и свободный резерв работы (1,3) совпадают

$$R_п(1,3) = R_c(1,3) + \min\left[R_п(3,6); R_п(3,7)\right] = 2 + \min[0;0] = 2 + 0 = 2.$$

8) Ненулевые свободные резервы работ обозначены на графике привязки фигурными скобками (см. рис. 8.4).

8.3. Варианты задач для самостоятельного решения

Задача № 8.1

Рассчитайте временные параметры событий и работ сетевых моделей задач № 7.1–7.4, определите критические пути и их длительность.

Задача № 8.2

Определите критические пути и указанные параметры работ в сетевой модели (рис. 8.3): Rc(1,5), Rп(1,5), Трн(5,7), Тпн(5,7), Тро(2,6), Тпн(3,6), Тро(4,7), Тпо(1,5), Тпн(1,5).

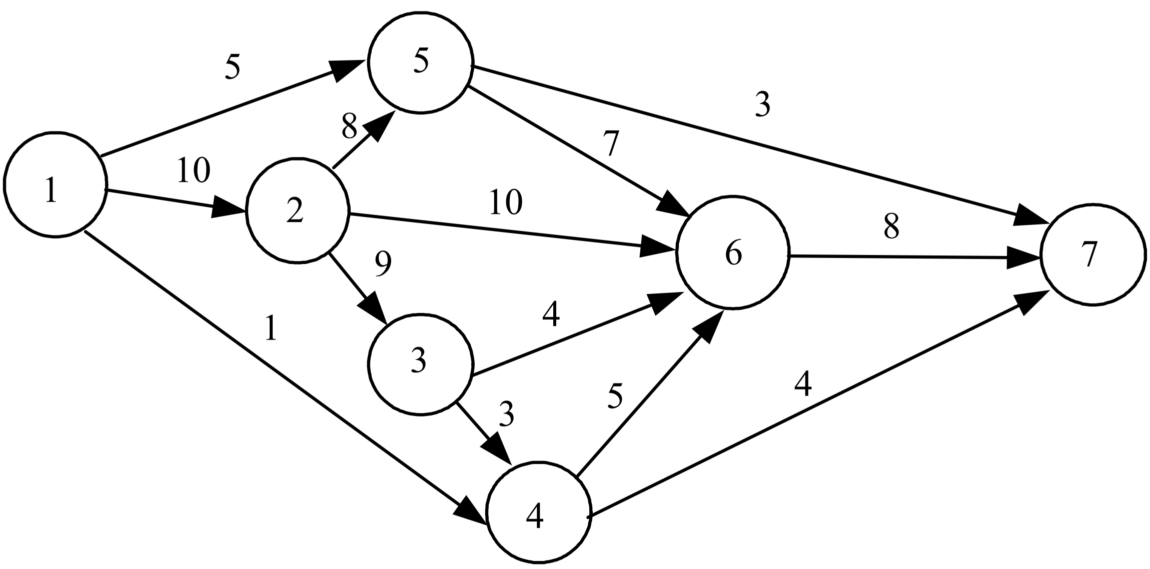

Рис. 8.3. Сетевая модель задачи № 8.2

Задача № 8.3

Задание из задачи № 8.2 для рис. 8.4: Rс(1,3), Rп(1,2), Tро(3,7), Tрн(2,5), Tпн(1,6), Tпо(1,3), Tпн(4,5), Tро(1,4), Tпо(1,2).

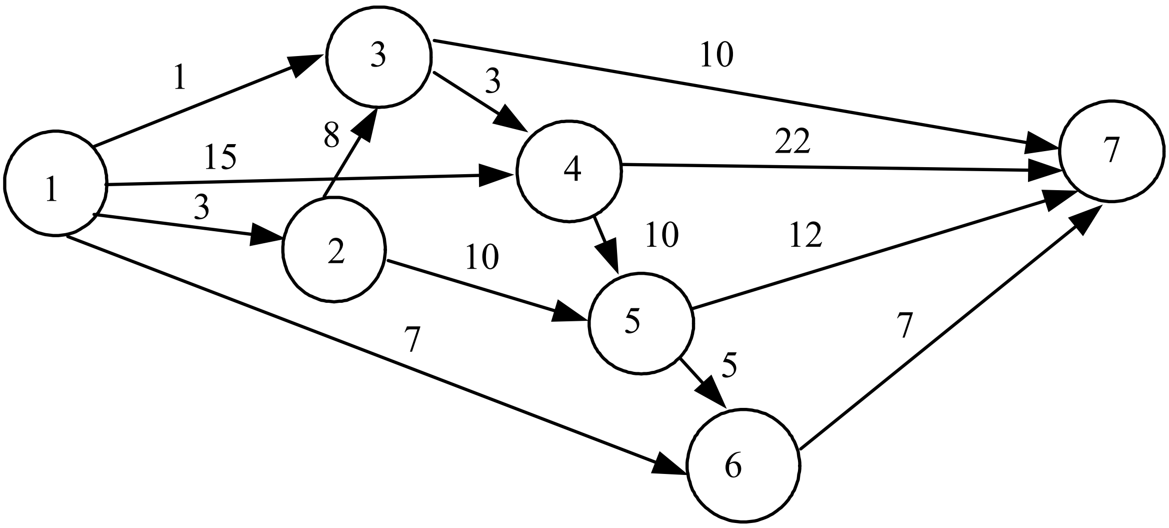

Рис. 8.4 Сетевая модель задачи № 8.3

Задача № 8.4

Определите критические пути и указанные параметры работ в сетевой модели, полученной после *исправлений* в процессе решения задачи № 7.6 (см. рис. 7.8): Tрн(H), Rп(N), Tпн(F), Tпо(A), Rс(A), Tпн(M), Tро(M), Rп(A), Tро(G), Tпн(E), Rс(J), Tпн(G).

Задача № 8.5

Проанализируйте, как повлияет на ход выполнения проекта, представленного на рис.8.3, одновременная задержка следующих работ: (1,5) – на 19 дней, (3,6) – на 3 дня. Аргументируйте свой ответ.

*Задача № 8.6**

Проанализируйте, как повлияет на ход выполнения проекта, представленного на рис. 8.4, одновременная задержка следующих работ: (1,2) – на 2 дня, (1,3) – на 11 дней, (3,7) –на 3 дня, (5,6) – на 1 день. Аргументируйте свой ответ.

Задачи № 8.7, 8.8, 8.9

По данным о кодах и длительностях работ (табл. 8.4) постройте график привязки сетевой модели, определите критические пути и их длительность, численные значения свободных и полных резервов каждой работы сведите в таблицу, отметьте на графике привязки свободные резервы работ.

Таблица 8.4

Исходные данные задач № 8.7, 8.8, 8.9

Задача № 8.7		Задача № 8.8		Задача № 8.9	
(i,j)	t(i,j)	(i,j)	t(i,j)	(i,j)	t(i,j)
1,2	4	1,2	5	1,2	1
1,3	6	1,3	2	1,3	3
2,4	5	1,4	4	1,4	2
2,6	0	2,3	4	2,5	4
3,4	2	2,5	2	3,4	4
3,5	1	3,5	0	3,6	5
4,6	7	3,6	8	4,5	0
4,8	8	4,7	3	4,7	3
5,6	0	5,8	7	4,8	2
5,7	5	6,9	6	5,7	4
6,7	1	7,8	9	6,8	6
6,8	6	7,9	8	7,8	3
7,8	3	8,9	10	7,11	2
7,9	6			8,9	7
8,9	3			8,10	5
				9,10	0
				9,11	6
				10,11	1

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Губин Н.М., Добронравов А.С., Дорохов Б.С. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении в отрасли связи. М.: Радио и связь, 1993.

2. Сетевые графики в планировании. / Под ред. Разумова И.М. М.: Высшая школа, 1975.

3. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: математическое программирование. Минск: Вышэйшая школа, 2001.

4. Сетевое планирование и управление./ Под ред. Голенко Д.И. М.: Экономика, 1967.

5. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М.: Мир, 1985.

6. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом "Вильямс", 2001.

7. Эддоус М., Стенсфилд Р. Методы принятия решений. М.: ЮНИТИ, 1997.

Часть IV. МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

9. РЕГРЕССИОННЫЙ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

9.1. Теоретическое введение

Регрессионный и корреляционный анализ позволяет установить и оценить зависимость изучаемой случайной величины Y от одной или нескольких других величин X, и делать прогнозы значений Y. Параметр Y, значение которого нужно предсказывать, является **зависимой** переменной. Параметр X, значения которого нам известны заранее и который влияет на значения Y, называется **независимой** переменной. Например, X – количество внесенных удобрений, Y – снимаемый урожай; X – величина затрат компании на рекламу своего товара, Y – объем продаж этого товара и т.д.

Корреляционная зависимость Y от X – это функциональная зависимость

$$\bar{y}_x = f(x), \tag{9.1}$$

где $\bar{y}_x$ – среднее арифметическое (**условное среднее**) всех возможных значений параметра Y, которые соответствуют значению $X = x$. Уравнение (9.1) называется **уравнением регрессии** Y на X, функция $f(x)$ – **регрессией** Y на X**,** а ее график – **линией регрессии** Y на X.

Основная задача регрессионного анализа – установление ***формы*** корреляционной связи, т.е. вида функции регрессии (линейная, квадратичная, показательная и т.д.).

Метод наименьших квадратов позволяет определить коэффициенты уравнения регрессии таким образом, чтобы точки, построенные по исходным данным (x_i, y_i), лежали как можно ближе к точкам линии регрессии (9.1). Формально это записывается как минимизация суммы квадратов отклонений (ошибок) функции регрессии и исходных точек

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^p - y_i\right)^2 \to \min,$$

где y_i^p – значение, вычисленное по уравнению регрессии; $\left(y_i^p - y_i\right)$ – **отклонение** ε (ошибка, остаток) (рис. 9.1); n – количество пар исходных данных.

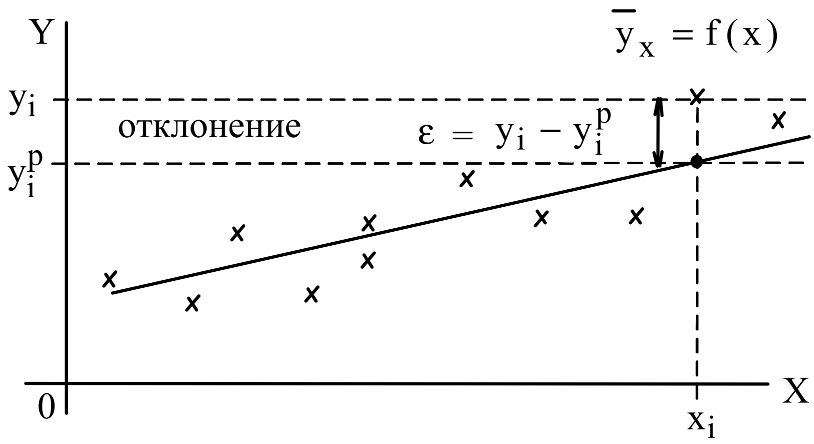

Рис. 9.1. Понятие отклонения ε для случая линейной регрессии

В регрессионном анализе предполагается, что математическое ожидание случайной величины ε равно нулю и ее дисперсия одинакова для всех наблюдаемых значений Y. Отсюда следует, что рассеяние данных возле линии регрессии должно быть одинаково при всех значениях параметра X. В случае, показанном на рис. 9.2 данные распределяются вдоль линии регрессии неравномерно, поэтому метод наименьших квадратов в этом случае неприменим.

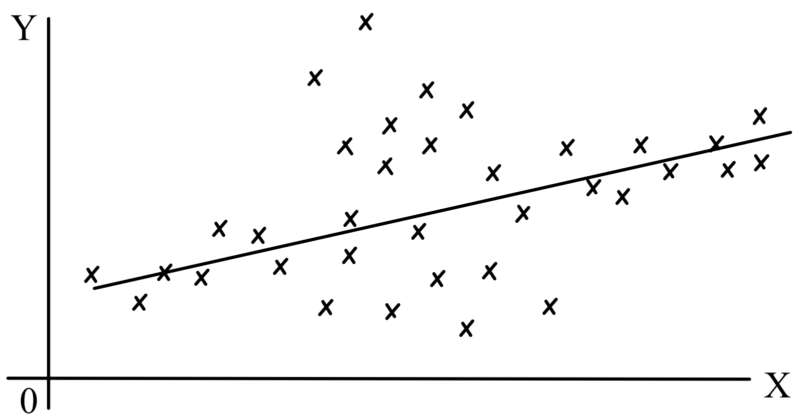

Рис. 9.2. Неравномерное распределение исходных точек вдоль линии регрессии

Основная задача корреляционного анализа – оценка ***тесноты*** (силы) корреляционной связи. Теснота корреляционной зависимости Y от X оценивается по величине рассеяния значений параметра Y вокруг условного среднего $\bar{y}_x$. Большое рассеяние говорит о слабой зависимости Y от X, либо об ее отсутствии и, наоборот, малое рассеяние указывает на наличие достаточно сильной зависимости.

Коэффициент детерминации r^2 показывает, на сколько процентов $(r^2 \cdot 100\%)$ найденная функция регрессии описывает связь между исходными значениями параметров X и Y

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^p - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}, \tag{9.2}$$

где $\left(y_i^p - \bar{y}\right)^2$ – объясненная вариация; $\left(y_i - \bar{y}\right)^2$ – общая вариация (рис. 9.3).

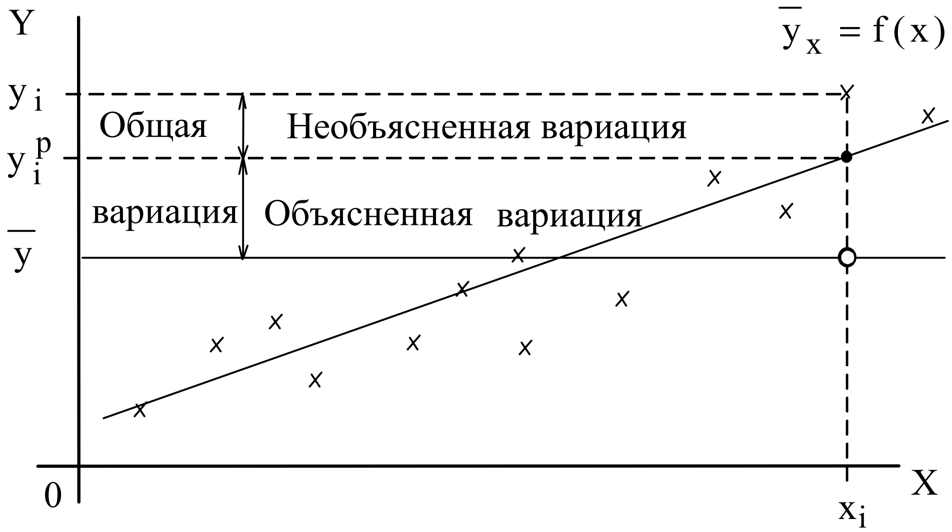

Рис. 9.3. Графическая интерпретация коэффициента детерминации для случая линейной регрессии

Соответственно, величина $(1 - r^2) \cdot 100\%$ показывает, сколько процентов вариации параметра Y обусловлены факторами, не включенными в регрессионную модель. При высоком $(r^2 \geq 75\%)$ значении коэффициента детерминации можно делать прогноз $y^* = f(x^*)$ для конкретного значения x^*.

9.2. Методические рекомендации

Для проведения регрессионного анализа и прогнозирования необходимо:

1) ***построить график*** исходных данных и попытаться зрительно, приближенно определить характер зависимости;

2) ***выбрать вид функции*** регрессии, которая может описывать связь исходных данных;

3) ***определить численные коэффициенты*** функции регрессии;

4) ***оценить силу*** найденной регрессионной зависимости на основе коэффициента детерминации r^2;

5) ***сделать прогноз*** (при $r^2 \geq 75\%$) или сделать вывод о невозможности прогнозирования с помощью найденной регрессионной зависимости. При этом не рекомендуется использовать модель регрессии для тех значений независимого параметра X, которые не принадлежат интервалу, заданному в исходных данных.

9.2.1. Линейная регрессия

Коэффициенты **линейной** регрессии $y = a_0 + a_1 x$ вычисляются по следующим формулам (все суммы берутся по n парам исходных данных)

$$a_1 = \frac{n\left(\sum y_i x_i\right) - \sum y_i \sum x_i}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2};$$

$$a_0 = \frac{1}{n}\left(\sum y_i - a_1 \sum x_i\right). \tag{9.3}$$

Для удобства вычислений используют вспомогательную таблицу (табл. 9.1), в которой рассчитываются необходимые суммы.

Таблица 9.1

Вспомогательная таблица для линейной функции

Заголовки данных	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^p	$(y_i^p - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
Промежуточные значения							
	...	...	...	...	...	...	...
Сумма ($\sum_{i=1}^{n}$) по столбцу					–		

Задача № 9.01

Некоторая фирма занимается поставками различных грузов на короткие расстояния внутри города. Перед менеджером стоит задача оценить стоимость таких услуг, зависящую от затрачиваемого на поставку времени. В качестве наиболее важного фактора, влияющего на время поставки, менеджер выбрал пройденное расстояние. Были собраны исходные данные о десяти поставках (табл. 9.2).

Таблица 9.2

Исходные данные задачи № 9.01

Расстояние, миль	3,5	2,4	4,9	4,2	3,0	1,3	1,0	3,0	1,5	4,1
Время, мин	16	13	19	18	12	11	8	14	9	16

Постройте график исходных данных, определите по нему характер зависимости между расстоянием и затраченным временем, проанализируйте применимость метода наименьших квадратов, постройте уравнение регрессии, проанализируйте силу регрессионной связи и сделайте прогноз времени поездки на 2 мили.

Решение

На рис. 9.4 построены исходные данные по десяти поездкам.

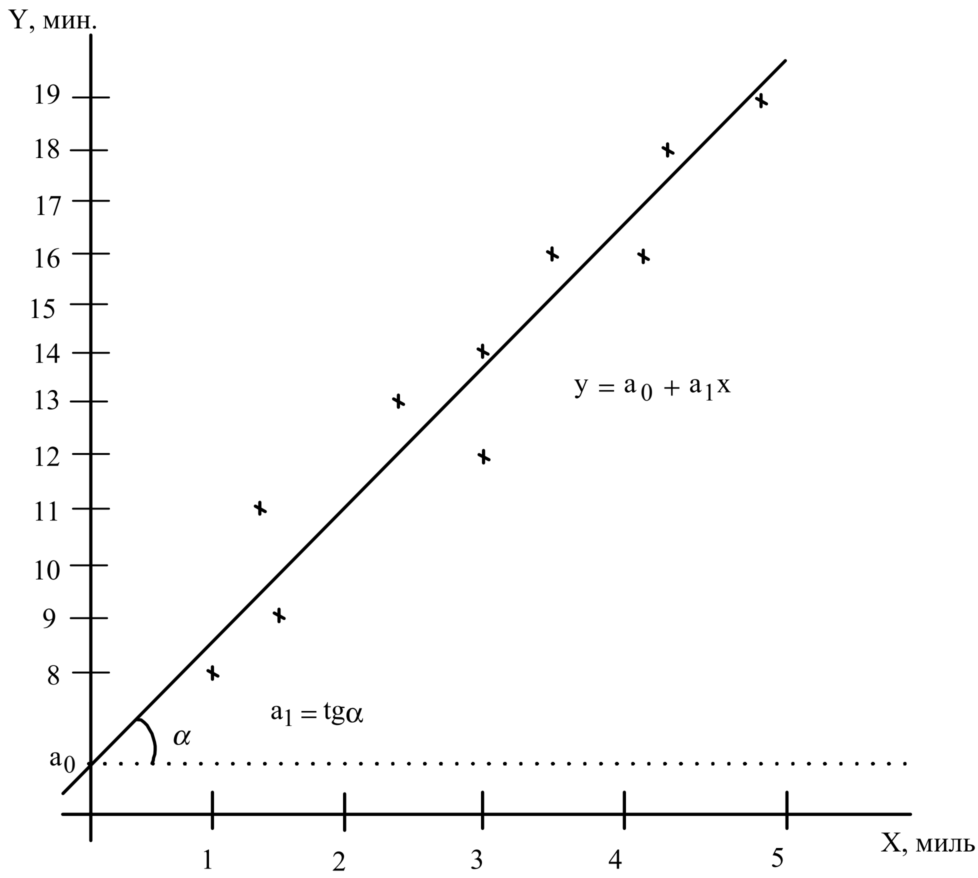

Рис. 9.4. График исходных данных задачи № 9.01

Помимо расстояния на время поставки влияют пробки на дорогах, время суток, дорожные работы, погода, квалификация водителя, вид транспорта. Построенные точки не находятся точно на линии, что обусловлено описанными выше факторами. Но эти точки собраны вокруг прямой линии, поэтому можно предположить линейную связь между параметрами. Все исходные точки равномерно распределены вдоль предполагаемой прямой линии, что позволяет применить метод наименьших квадратов.

Вычислим суммы, необходимые для расчета коэффициентов линейной регрессии, коэффициента детерминации с помощью табл. 9.3.

Таблица 9.3

Вспомогательная таблица задачи № 9.01

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^p	$(y_i^p - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
3,5	16	12,25	56,00	15,223	2,634129	5,76
2,4	13	5,76	31,2	12,297	1,697809	0,36
4,9	19	24,01	93,1	18,947	28,59041	29,16
4,2	18	17,64	75,60	17,085	12,14523	19,36
3,0	12	9,00	36,00	13,893	0,085849	2,56
1,3	11	1,69	14,30	9,371	17,88444	6,76
1,0	8	1,00	8,00	8,573	25,27073	31,36
3,0	14	9,00	42,00	13,893	0,085849	0,16
1,5	9	2,25	13,50	9,903	13,66781	21,16
4,1	16	16,81	65,60	16,819	10,36196	5,76
$\sum=28{,}9$	$\sum=136$	$\sum=99{,}41$	$\sum=435{,}30$	–	112,4242	122,4

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{16+13+19+18+12+11+8+14+9+16}{10} = 13{,}6\,.$$

По формулам (9.3) вычислим коэффициенты линейной регрессии

$$a_1 = \frac{10 \cdot 435{,}30 - 136 \cdot 28{,}9}{10 \cdot 99{,}41 - 835{,}21} = 2{,}660\ ;$$

$$a_0 = 0{,}1 \cdot (136 - 2{,}660 \cdot 28{,}9) = 5{,}913.$$

Таким образом, искомая регрессионная зависимость имеет вид

$$y^p = 5{,}913 + 2{,}660x. \tag{9.4}$$

Наклон линии регрессии $a_1 = 2{,}66$ минут на милю – это количество минут, приходящееся на одну милю расстояния. Координата точки пересечения прямой с осью Y $a_0 = 5{,}913$ минут – это время, которое не зависит от пройденного расстояния, а обуславливается всеми остальными возможными факторами, явно не учтенными при анализе.

По формуле (9.2) вычислим коэффициент детерминации

$$r^2 = \frac{112{,}424}{122{,}400} = 0{,}918 \text{ или } 91{,}8\%.$$

Таким образом, линейная модель объясняет 91,8% вариации времени доставки. Не объясняется $100\% - 91{,}8\% = 8{,}2\%$ вариации времени поездки, которые обусловлены остальными факторами, влияющими на время поставки, но не включенными в линейную модель регрессии.

Поскольку коэффициент детерминации имеет достаточно высокое значение и расстояние 2 мили, для которого надо сделать прогноз, находится в пределах диапазона исходных данных (см. табл. 9.2), то мы можем использовать полученное уравнение линейной регрессии (9.4) для прогнозирования

$$y^*(2\,\text{мили}) = 5{,}913 + 2{,}660 \cdot 2 = 11{,}2 \text{ минут.}$$

При прогнозах на расстояния, не входящие в диапазон исходных данных, нельзя гарантировать справедливость модели (9.4). Это объясняется тем, что связь между временем и расстоянием может изменяться по мере увеличения расстояния. На время дальних перевозок могут влиять новые факторы такие, как использование скоростных шоссе, остановки на отдых, обед и т.п.

Приблизительным, но самым простым и наглядным способом проверки удовлетворительности регрессионной модели является графическое представление отклонений (рис. 9.5).

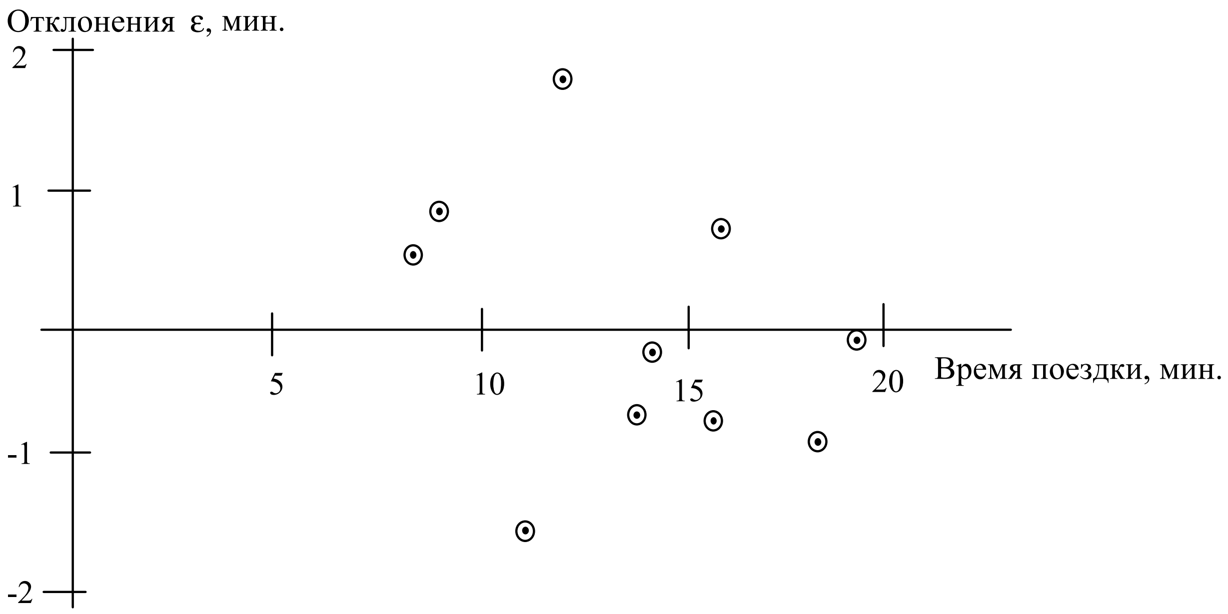

Рис. 9.5. График отклонений в задаче № 9.01

Отложим отклонения $\left(y_i^p - y_i\right)$ по оси Y, для каждого значения y_i. Если регрессионная модель близка к реальной зависимости, то отклонения будут носить случайный характер и их сумма будет близка к нулю. В рассмотренном примере $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^p - y_i\right) = 0{,}004$.

9.2.2. Нелинейная регрессия

Рассмотрим наиболее простые случаи ***нелинейной*** регрессии: гиперболу, экспоненту и параболу. При нахождении коэффициентов гиперболы и экспоненты используют прием приведения нелинейной регрессионной зависимости к линейному виду. Это позволяет использовать для вычисления коэффициентов функций регрессии формулы (9.3).

Гипербола

При нахождении **гиперболы** $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$ вводят новую переменную $z = \frac{1}{x}$, тогда уравнение гиперболы принимает линейный вид $y = a_0 + a_1 z$. После этого используют формулы (9.3) для нахождений линейной функции, но вместо значений x_i используются значения $z_i = \frac{1}{x_i}$

$$a_1 = \frac{n\left(\sum y_i z_i\right) - \sum y_i \sum z_i}{n\left(\sum z_i^2\right) - \left(\sum z_i\right)^2}; \qquad a_0 = \frac{1}{n}\left(\sum y_i - a_1 \sum z_i\right).$$

При проведении вычислений во вспомогательную таблицу вносятся соответствующие колонки.

Экспонента

Для приведения к линейному виду **экспоненты** $y = a_0 e^{a_1 x}$ проведем логарифмирование

$$\ln y = \ln\left(a_0 e^{a_1 x}\right);$$

$$\ln y = \ln a_0 + \ln\left(e^{a_1 x}\right);$$

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x\,.$$

Введем переменные $b_0 = \ln a_0$ и $b_1 = a_1$, тогда $\ln y = b_0 + b_1 x$, откуда следует, что можно применять формулы (9.3), в которых вместо значений y_i надо использовать $\ln y_i$

$$b_1 = \frac{n\left(\sum\, [\ln y_i]\, x_i\right) - \sum \ln y_i \sum x_i}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}; \qquad b_0 = \frac{1}{n}\left(\sum \ln y_i - b_1 \sum x_i\right).$$

При этом мы получим численные значения коэффициентов b_0 и b_1, от которых надо перейти к a_0 и a_1, используемых в модели экспоненты. Исходя из введенных обозначений и определения логарифма, получаем

$$a_0 = e^{b_0},\ a_1 = b_1\,.$$

Парабола

Для нахождения коэффициентов **параболы** $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ необходимо решить линейную систему из трех уравнений

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 + \left(\sum x_i^2\right) a_2 = \sum y_i\,, \\ \left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 + \left(\sum x_i^3\right) a_2 = \sum \left(y_i x_i\right), \\ \left(\sum x_i^2\right) a_0 + \left(\sum x_i^3\right) a_1 + \left(\sum x_i^4\right) a_2 = \sum \left(y_i x_i^2\right). \end{cases}$$

Оценка силы нелинейной регрессионной связи

Сила регрессионной связи для гиперболы и параболы определяется непосредственно по формуле (9.2). При вычислении коэффициента детерминации экспоненты все значения параметра Y (исходные, регрессионные, среднее) необходимо заменить на их логарифмы, например, y_i^p – на $\ln\left(y_i^p\right)$ и т.д.

9.3. Варианты задач для самостоятельного решения

Задача № 9.1

Постройте регрессионные модели (линейную, гиперболу, экспоненту, параболу) для следующих исходных данных (табл. 9.4). Для облегчения расчетов исходные данные содержат только четыре пары значений (x_i, y_i).

Таблица 9.4

Исходные данные задачи № 9.1

X	1	2	3	4
Y	30	7	8	1

Проверьте расчетным способом удовлетворительность моделей и сделайте прогноз для $x^* = 1{,}6$.

Задача № 9.2

Постройте регрессионные модели (линейную, гиперболу, экспоненту, параболу) для следующих исходных данных (табл. 9.5). Для облегчения расчетов исходные данные содержат только четыре пары значений (x_i, y_i).

Таблица 9.5

Исходные данные задачи № 9.2

X	1	2	3	4
Y	13	4	10	6

Проверьте расчетным способом удовлетворительность моделей и сделайте прогноз для $x^* = 3{,}4$.

Задача № 9.3

Для исходных данных, представленных в табл. 9.6, были построены следующие регрессионные модели:

- $y = 6{,}067 - 0{,}085x$;

- $y = 6{,}78 - \dfrac{4{,}029}{x}$;
- $y = -2{,}017 + 3{,}957x - 0{,}367x^2$;
- $y = 5{,}918e^{-0{,}043x}$.

Таблица 9.6

Исходные данные задачи № 9.3

X	3	8	5	10	7	6	4	9	1	2
Y	6	5	9	1	8	9	8	4	2	4

С помощью графика отклонений выберите удовлетворительную модель и проверьте свой выбор с помощью соответствующего расчета.

Задача № 9.4

В табл. 9.7 представлены данные о ценах на комплектующие для ПЭВМ. Комплектующие производятся различными компаниями-производителями и разбиты на группы по своим функциональным возможностям.

Таблица 9.7

Исходные данные задачи № 9.4

Группа	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4
Цена, $	50	60	70	80	95	100	115	120	105	120
130	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7
Цена, $	130	110	150	190	120	130	220	145	265	270

Постройте график исходных данных и с его помощью проанализируйте применимость метода наименьших квадратов. Подтвердите свои выводы с помощью расчета (для линейной модели). Прокомментируйте экономические причины полученного результата.

Задача № 9.5

Санаторный комплекс ежемесячно заключает с пекарней договор на выпечку хлеба сорта C_1. Чтобы полностью использовать свои производственные мощности пекарня выпекает также хлеб сорта C_2, который пускает в свободную продажу. В табл. 9.8 приведены данные об объемах выпуска хлеба пекарней за последний год. Для облегчения расчетов числовые данные – условные.

Таблица 9.8

Объемы выпуска хлеба [тыс. шт.] в задаче № 9.5

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_1	1	2,3	1,5	0,5	4	5	2	3,5	1	4,5	2,5	1,5
C_2	9	6,5	8,1	8,7	4	0,2	7,6	5	8,7	2	7	8,4

Проанализируйте график исходных данных и постройте регрессионную модель *функции производственных возможностей* пекарни. Проверьте удовлетворительность модели и сделайте прогноз объема выпуска хлеба C_2, если санаторный комплекс сделает заказ хлеба C_1 – 3 тысячи булок.

Примечание 9.1. **Функция производственных возможностей** показывает зависимость объемов выпуска товаров 1 и 2 при фиксированном значении труда и капитала.

10. МЕТОДЫ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СГЛАЖИВАНИЯ

10.1. Теоретическое введение

Методы скользящего среднего и экспоненциального сглаживания используются для прогнозирования временных рядов. Формально **временной ряд** – это множество пар данных (X,Y), в которых X – это моменты или периоды времени (независимая переменная), а Y – параметр (зависимая переменная), характеризующий величину исследуемого явления. Цель исследования временных рядов состоит в ***выявлении тенденции*** изменения фактических значений параметра Y во времени и ***прогнозировании*** будущих значений Y. Модель, построенную по ретроспективным данным можно использовать при наличии ***устоявшейся тенденции*** в динамике значений прогнозируемого параметра. К возможным ситуациям нарушения такой тенденции относятся: коренное изменение плана деятельности фирмы, которая стала терпеть убытки; резкое изменение параметров внутренней или внешней ситуации (цен на сырье; уровня инфляции); стихийные бедствия, военные действия, общественные беспорядки.

Суть методов **скользящего среднего** и **экспоненциального сглаживания** состоит в том, фактические уровни исследуемого временного ряда заменяются их средними значениями, погашающими случайные колебания. Это позволяет более четко выделить основную тенденцию изменения исследуемого параметра. Эти относительно простые методы прогнозирования временных рядов, основанные на представлении прогноза y^*_{t+1} в виде суммы m предыдущих наблюдаемых значений y_{t-i} $(i=\overline{1, m-1})$, причем каждое из них учитывается с определенным весовым коэффициентом β_t

$$y^*_{t+1} = \beta_t y_t + \beta_{t-1} y_{t-1} + \ldots \beta_{t-m+1} y_{t-m+1}.$$

Использование методов скользящего среднего и экспоненциального сглаживания основано на следующих допущениях:

- временной ряд является ***устойчивым*** в том смысле, что его элементы являются реализациями следующего случайного процесса:

$$y_t = b + \varepsilon_t,$$

где b – неизвестный постоянный параметр, ε_t – случайная ошибка.

- случайная ошибка ε_t имеет нулевое математическое ожидание и постоянную дисперсию;
- данные для различных периодов времени не коррелированны.

Метод скользящего среднего

Расчет прогноза и сглаживание временного ряда **методом скользящего среднего** производится по формуле

$$y^*_{t+1} = \frac{y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-m+1}}{m}. \quad (10.1)$$

При этом предполагается, что все m значений y_{t-i} за m моментов времени вносят равный вклад в прогнозируемое значение y^*_{t+1} и учитываются с одинаковым весовым коэффициентом $\frac{1}{m}$.

Метод экспоненциального сглаживания

В **методе экспоненциального сглаживания** весовые коэффициенты предыдущих наблюдаемых значений увеличиваются по мере приближения к последним (по времени) данным. Кроме того, в формировании прогнозируемого значения участвуют все n известных значений y_{t-i} $(i = \overline{1, n-1})$ временного ряда

$$y^*_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-1} + \ldots \quad (10.2)$$

Для расчета прогноза и для сглаживания временного ряда методом экспоненциального сглаживания используют формулу (10.2) в виде

$$y^*_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)y^*_t, \quad (10.3)$$

где $\alpha \in (0, 1)$ – **константа сглаживания**. Таким образом, значение y^*_{t+1} можно вычислить рекуррентно на основании значения y^*_t.

10.2. Методические рекомендации

Задача № 10.01

Постройте и проанализируйте график временного ряда, представленного в табл. 10.1 с точки зрения применимости методов скользящего среднего и экспоненциального сглаживания.

Таблица 10.1

Исходные данные задачи № 10.01

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t, тыс. шт.	46	50	48	53	51	52	57

Сделайте прогноз для t=8 методом скользящей средней для m=4; методом экспоненциального сглаживания для α=0,6.

Решение

График исходного временного ряда представлен на рис. 10.1.

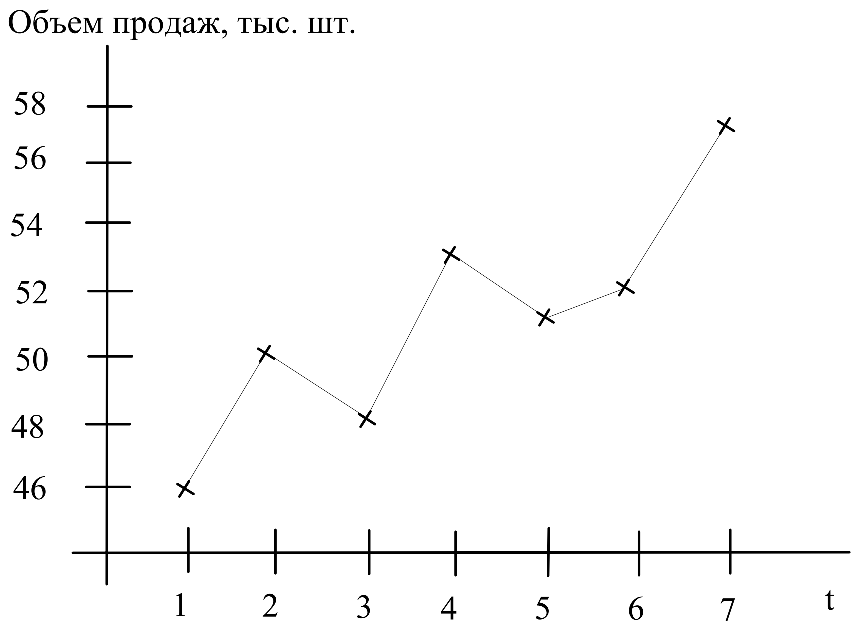

Рис. 10.1.График временного ряда задачи № 10.01

Из графика видно, что наблюдается явная тенденция к возрастанию значений временного ряда y_t, что приведет к неточности в прогнозах, выполненных методами скользящего среднего и экспоненциального сглаживания (это следует из допущений методов), к подавлению этой тенденции.

Для прогнозирования методом скользящего среднего достаточно выполнить единственный расчет

$$y^*_{8(m=4)} = \frac{53+51+52+57}{4} = 53,250 \text{ [тыс. шт.]}.$$

Для прогнозирования методом экспоненциального сглаживания необходимо провести расчеты для всех моментов времени, за исключением t=1:

$$y^*_{2(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 46 + 0,4 \cdot 46 = 46,000;$$

$$y^*_{3(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 50 + 0,4 \cdot 46 = 48,400;$$

$$y^*_{4(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 48 + 0,4 \cdot 48,400 = 48,160;$$

$$y^*_{5(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 53 + 0,4 \cdot 48,160 = 51,064;$$

$$y^*_{6(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 51 + 0,4 \cdot 51,064 = 51,026;$$

$$y^*_{7(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 52 + 0,4 \cdot 51,026 = 51,610;$$

$$y^*_{8(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 57 + 0,4 \cdot 51,610 = 54,844 \text{ [тыс. шт.]}.$$

Не существует четкого правила для выбора числа членов скользящей средней m или параметра экспоненциального сглаживания α. Они определяются статистикой исследуемого процесса. Чем меньше m и чем больше α, тем сильнее реагирует прогноз на колебания временного ряда, и наоборот, чем больше m и чем меньше α, тем более инерционным является процесс прогнозирования. На практике величина n обычно принимается в пределах от 2 до 10, а α – в пределах от 0,01 до 0,30. При наличии достаточного числа элементов временного ряда значение m и α, приемлемое для прогноза, можно определить следующим образом:

- задать несколько предварительных значений m (α);
- сгладить временной ряд, используя каждое заданное значение m (α);
- вычислить среднюю ошибку прогнозирования как среднее абсолютное отклонение (mean absolut deviation – MAD)

$$MAD = \frac{\sum_t \left| y_t - y_t^* \right|}{n}; \qquad (10.4)$$

- выбрать значение m (α), соответствующее минимальной ошибке.

10.3. Варианты задач для самостоятельного решения

Задача № 10.1

В табл. 10.2 приведены данные о спросе на некоторый товар за прошедшие два года.

Таблица 10.2

Объем спроса на товар

Месяц t	Спрос y_t, тыс. шт.	Месяц t	Спрос y_t, тыс. шт.
1	46	13	54
2	56	14	42
3	54	15	64
4	43	16	60
5	57	17	70
6	56	18	66
7	67	19	57
8	62	20	55
9	50	21	52
10	56	22	62
11	47	23	70
12	56	24	72

Постройте и проанализируйте график временного ряда с точки зрения применимости методов скользящего среднего и экспоненциального сглаживания. На основании анализа графика выберите наиболее приемлемое значение:

1) m из m=4 и m=8;
2) α из α=0,05 и α=0,3.

Проверьте свои предположения с помощью методики, описанной в п. 10.2. Сделайте прогноз спроса на следующий месяц методом скользящего среднего и экспоненциального сглаживания.

Задача № 10.2

В табл. 10.3 содержатся данные за десятилетний период о количестве людей (Y), посетивших туристическую зону на воздушном транспорте.

Таблица 10.3

Исходные данные задачи № 10.2

Год	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Y, тыс. чел.	500	522	540	612	715	790	840	900	935	980

Проанализируйте эти данные с точки зрения применимости методов скользящего среднего и экспоненциального сглаживания. Выберите приемлемое по вашему мнению значение m и α и сделайте прогноз на 2003 г.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа, 1972.

2. Ниворожкина Л.И., Морозова З.А., Герасимова И.А., Житников И.В. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов: Руководство для решения задач. Ростов н/Д: Феникс, 1999.

3. Редкозубов С.А. Статистические методы прогнозирования в АСУ. М.: Энергоатомиздат, 1981.

4. Таха Х.А. Введение в исследование операций. в 2-х книгах. М.: Мир, 1985.

5. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом "Вильямс", 2001.

6. Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров. Анализ данных на компьютере. Под ред. В.Э.Фигурнова. М.: ИНФРА-М, Финансы и статистика.

7. Чекотовский Э.В. Графический анализ статистических данных в Microsoft Excel 2000. М.: Издательский дом "Вильямс", 2002.

8. Эддоус М., Стенсфилд Р. Методы принятия решений. М.: ЮНИТИ, 1997.

Часть V. УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

11. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

11.1. Теоретическое введение

11.1.1. Модель Уилсона

Математические модели управления запасами (УЗ) позволяют найти оптимальный уровень запасов некоторого товара, минимизирующий суммарные затраты на покупку, оформление и доставку заказа, хранение товара, а также убытки от его дефицита. **Модель Уилсона** является простейшей моделью УЗ и описывает ситуацию закупки продукции у внешнего поставщика, которая характеризуется следующими *допущениями*:

- интенсивность потребления является априорно известной и постоянной величиной;
- заказ доставляется со склада, на котором хранится ранее произведенный товар;
- время поставки заказа является известной и постоянной величиной;
- каждый заказ поставляется в виде одной партии;
- затраты на осуществление заказа не зависят от размера заказа;
- затраты на хранение запаса пропорциональны его размеру;
- отсутствие запаса (дефицит) является недопустимым.

Входные параметры модели Уилсона

1) ν – интенсивность (скорость) потребления запаса, [ед. тов. / ед. t];

2) s – затраты на хранение запаса, $[\text{руб.}/\text{ед.тов.}\cdot\text{ед.t}]$;

3) K – затраты на осуществление заказа, включающие оформление и доставку заказа, [руб.];

4) $t_д$ – время доставки заказа, [ед.t].

Выходные параметры модели Уилсона

1) Q – размер заказа, [ед. тов.];

2) L – общие затраты на управление запасами в единицу времени, [руб./ед.t];

3) τ – период поставки, т.е. время между подачами заказа или между поставками, [ед.t];

4) h_0 – **точка заказа**, т.е. размер запаса на складе, при котором надо подавать заказ на доставку очередной партии, [ед. тов.].

Циклы изменения уровня запаса в модели Уилсона графически представлены на рис. 11.1. Максимальное количество продукции, которая находится в запасе, совпадает с размером заказа Q.

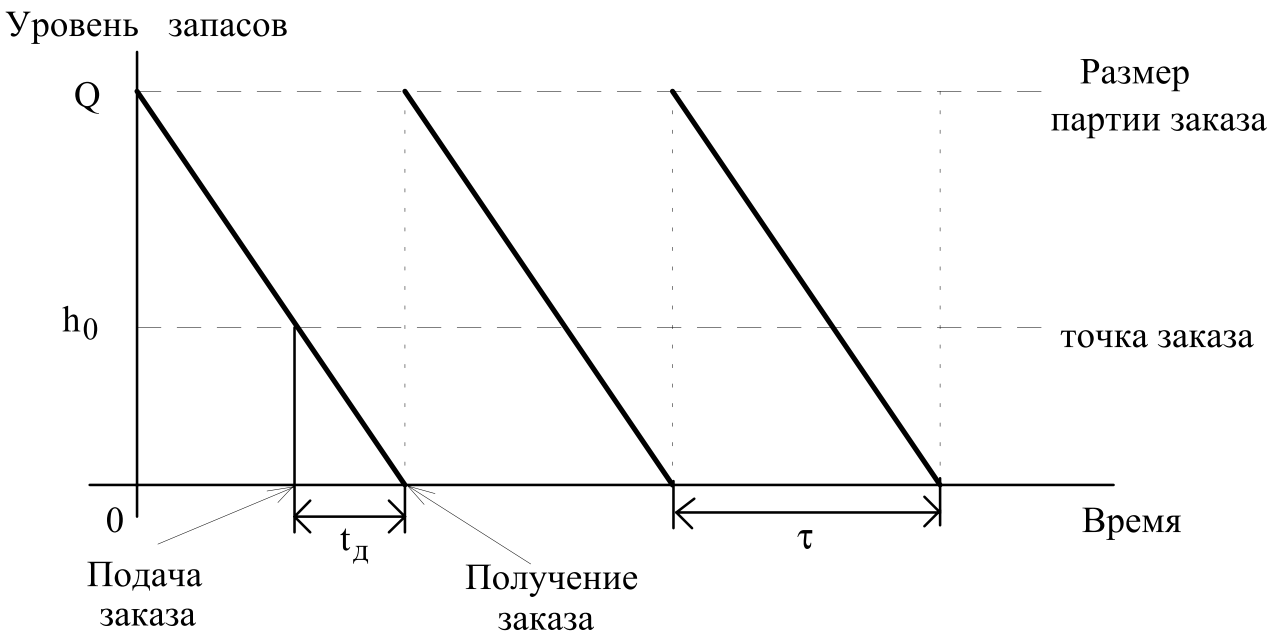

Рис. 11.1. График циклов изменения запасов в модели Уилсона

Формулы модели Уилсона

$$Q_w = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \quad \text{(формула Уилсона),} \qquad (11.1)$$

где Q_W – оптимальный размер заказа в модели Уилсона;

$$L = K \cdot \frac{\nu}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2};$$

$$\tau = \frac{Q}{\nu};$$

$$h_0 = \nu t_д.$$

График затрат на УЗ в модели Уилсона представлен на рис. 11.2

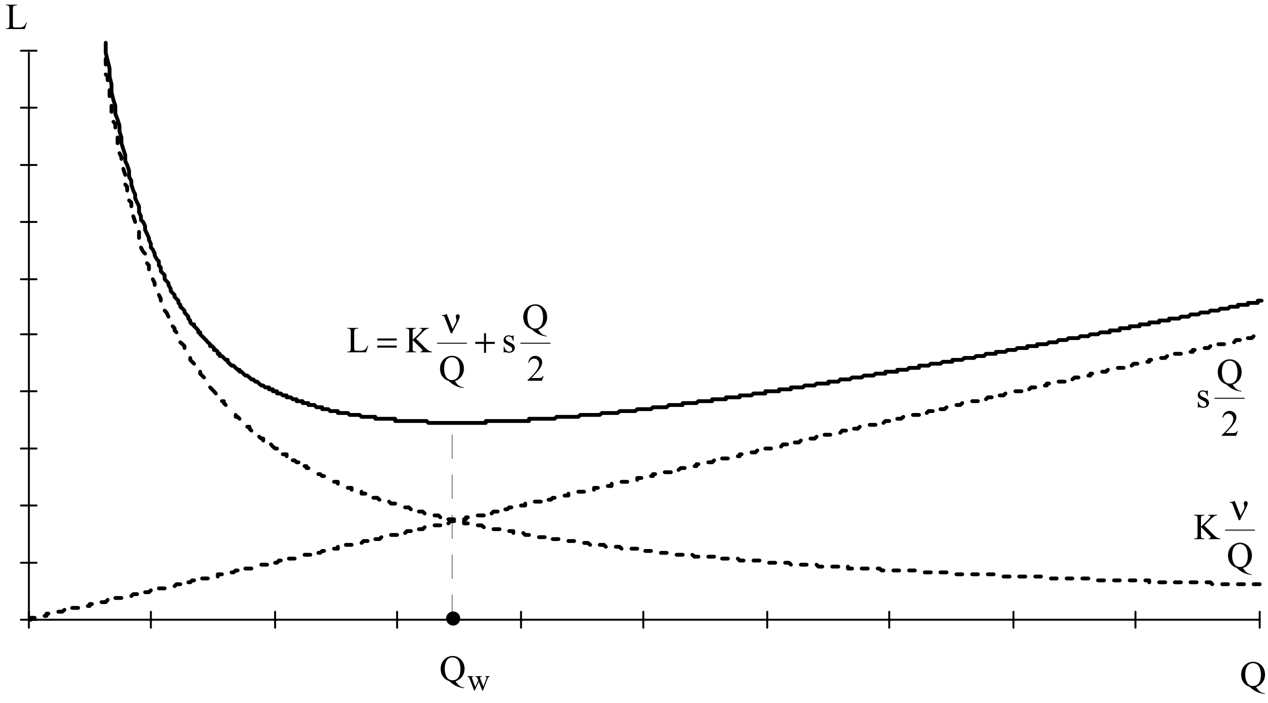

Рис. 11.2. График затрат на УЗ в модели Уилсона

11.1.2. Модель планирования экономичного размера партии

Модель Уилсона, используемую для моделирования процессов закупки продукции у внешнего поставщика, можно модифицировать и применять в случае собственного производства продукции. На рис. 11.3 схематично представлен некоторый производственный процесс. На первом станке производится партия деталей с интенсивностью λ деталей в единицу времени, которые используются на втором станке с интенсивностью ν [дет./ед.t].

Рис. 11.3. Схема производственного процесса

Входные параметры модели планирования экономичного размера партии

1) λ – интенсивность производства продукции первым станком, [ед. тов./ед. t];

2) ν – интенсивность потребления запаса, [ед. тов./ед. t];

3) s – затраты на хранение запаса, $[\text{руб./ед.тов.} \cdot \text{ед.t}]$;

4) K – затраты на осуществление заказа, включающие подготовку (переналадку) первого станка для производства продукции, потребляемой на втором станке, [руб.];

5) $t_{п}$ – время подготовки производства (переналадки), [ед.t].

Выходные параметры модели планирования экономичного размера партии

1) Q – размер заказа, [ед. тов.];

2) L – общие затраты на управление запасами в единицу времени, [руб./ед.t];

3) τ – период запуска в производство партии заказа, т.е. время между включениями в работу первого станка, [ед. t];

4) h_0 – точка заказа, т.е. размер запаса, при котором надо подавать заказ на производство очередной партии, [ед. тов.].

Изменение уровня запасов происходит следующим образом (рис. 11.4):

- в течение времени t_1 работают оба станка, т.е. продукция производится и потребляется одновременно, вследствие чего запаса накапливается с интенсивностью $(\lambda - \nu)$;

- в течение времени t_2 работает только второй станок, потребляя накопившийся запас с интенсивностью ν.

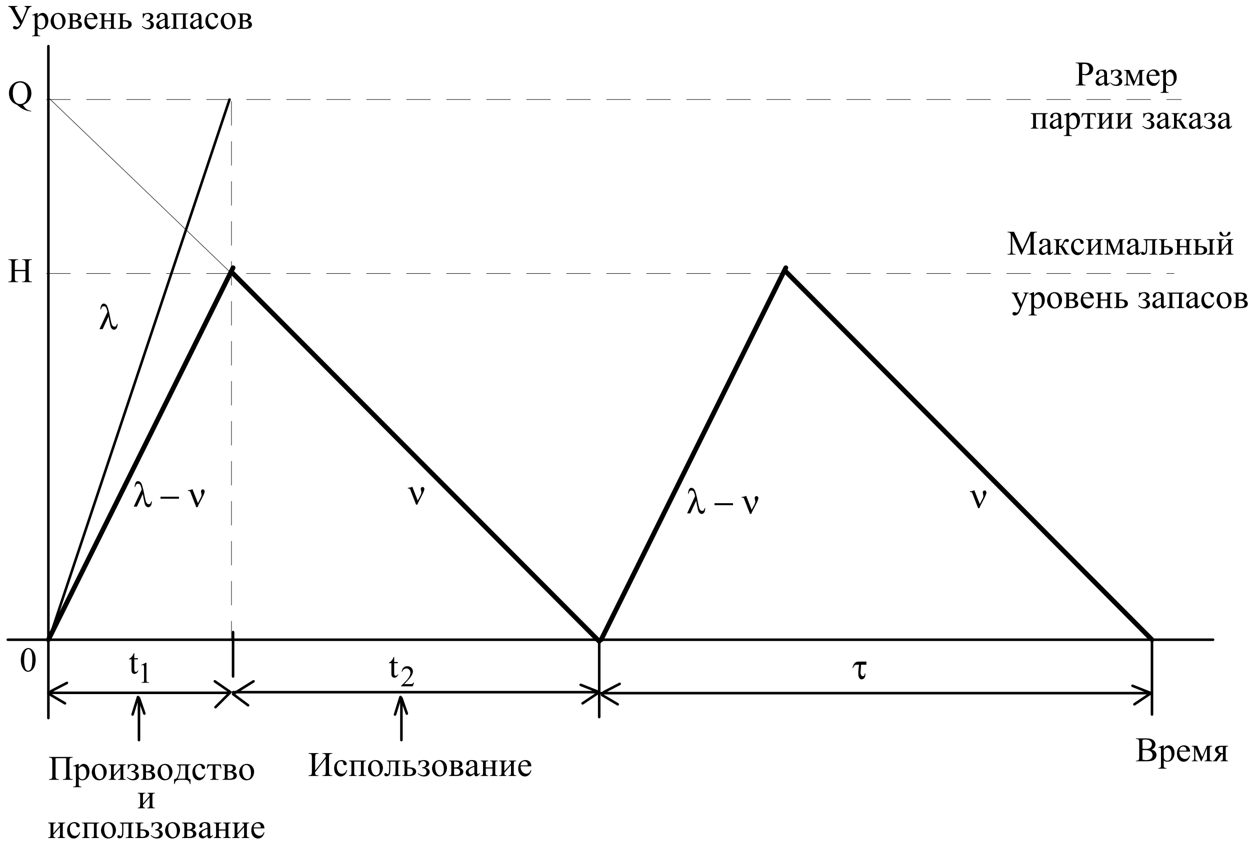

Рис. 11.4. График циклов изменения запасов в модели планирования экономичного размера партии

Формулы модели экономичного размера партии

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\nu\lambda}{s(\lambda-\nu)}} \text{ или } Q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{S(1-\nu/\lambda)}},$$

где * – означает оптимальность размера заказа;

$$L = K\frac{\nu}{Q} + s\frac{Q(\lambda-\nu)}{2\lambda} \text{ или } L = K\frac{\nu}{Q} + \frac{sQ(1-\nu/\lambda)}{2};$$

$$H = \frac{Q(\lambda-\nu)}{\lambda} \text{ или } H = Q(1-\nu/\lambda);$$

$$\tau = \frac{Q}{\nu}; \qquad h_0 = \nu\, t_{п}.$$

11.2. Методические рекомендации

Основная сложность при решении задач по УЗ состоит в правильном определении входных параметров задачи, поскольку не всегда в условии их числовые величины задаются в явном виде. При использовании формул модели УЗ необходимо внимательно следить за тем, чтобы все используемые в формуле числовые величины были согласованы по единицам измерения. Так, например, оба параметра s и ν должны быть приведены к одним и тем же временных единицам (к дням, к сменам или к годам), параметры K и s должны измеряться в одних и тех же денежных единицах и т.д.

Задача № 11.01

Объем продажи некоторого магазина составляет в год 500 упаковок супа в пакетах. Величина спроса равномерно распределяется в течение года. Цена покупки одного пакета равна 2 руб. За доставку заказа владелец магазина должен заплатить 10 руб. Время доставки заказа от поставщика составляет 12 рабочих дней (при 6-дневной рабочей неделе). По оценкам специалистов, издержки хранения в год составляют 40 коп. за один пакет. Необходимо определить: сколько пакетов должен заказывать владелец магазина для одной поставки; частоту заказов; точку заказа. Известно, что магазин работает 300 дней в году.

Решение

Примем за единицу времени год, тогда $\nu = 500$ шт. пакетов в год, $K = 10$ руб., $s = 0{,}4$ руб./шт.$\cdot$год. Поскольку пакеты супа заказываются со склада поставщика, а не производятся самостоятельно, то будем использовать модель Уилсона.

$$Q_W = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 500}{0{,}4}} = 158{,}11 \approx 158 \text{ штук.}$$

Поскольку число пакетов должно быть целым, то будем заказывать по 158 штук. При расчете других параметров задачи будем использовать не $Q^{*} = 158{,}11$, а Q=158. Годовые затраты на УЗ равны

$$L = K \cdot \frac{\nu}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2} = 10 \cdot \frac{500}{158} + 0{,}4 \cdot \frac{158}{2} = 63{,}25 \text{ рублей в год.}$$

Подачу каждого нового заказа должна производиться через

$$\tau = \frac{Q}{v} = \frac{158}{500} = 0{,}316 \text{ года.}$$

Поскольку известно, что в данном случае год равен 300 рабочим дням, то

$$\tau = 0{,}316 \text{ год} \cdot 300 \ \frac{\text{раб.дней}}{\text{год}} = 94{,}8 \approx 95 \text{ рабочих дней.}$$

Заказ следует подавать при уровне запаса, равном

$$h_0 = \nu T_д = \frac{500}{300} \cdot 12 = 20 \text{ пакетам,}$$

т.е. эти 20 пакетов будут проданы в течение 12 дней, пока будет доставляться заказ.

Задача № 11.02

На некотором станке производятся детали в количестве 2000 штук в месяц. Эти детали используются для производства продукции на другом станке с интенсивностью 500 шт. в месяц. По оценкам специалистов компании, издержки хранения составляют 50 коп. в год за одну деталь. Стоимость производства одной детали равна 2,50 руб., а стоимость на подготовку производства составляет 1000 руб. Каким должен быть размер партии деталей, производимой на первом станке, с какой частотой следует запускать производство этих партий?

Решение

$K = 1000$ руб., $\lambda = 2000$ шт. в месяц или 24000 шт. в год, $\nu = 500$ шт. в месяц или 6000 шт. в год, $s = 0{,}50$ руб. в год за деталь. В данной ситуации необходимо использовать модель планирования экономичного размера партии.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\nu\lambda}{s(\lambda-\nu)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1000\cdot 6000\cdot 24000}{0{,}50(24000-6000)}} = 5656{,}9 \approx 5657 \text{ шт.}$$

Частота запуска деталей в производство равна

$$\tau = \frac{Q}{\nu} = \frac{5657}{6000} = 0{,}94 \text{ года или } 11{,}28 \text{ месяцев.}$$

Общие затраты на УЗ составляют

$$L = K\frac{\nu}{Q} + s\frac{Q(\lambda-\nu)}{2\lambda} = \frac{1000\cdot 6000}{5657} + \frac{0{,}50\cdot 5657\cdot 18000}{2\cdot 24000} = 2121{,}32 \text{ руб. в год.}$$

11.3. Варианты задач для самостоятельного решения

Задача № 11.1

Используя график циклов изменения запасов в модели планирования экономичного размера партии (см. рис. 11.4), выведите формулы для расчета длительности периодов производства/использования запаса (t_1) и использования запаса (t_2).

Задача № 11.2

Постройте график общих годовых затрат на УЗ для задачи № 11.01 ($Q \leq 200$ шт.) с учетом затрат владельца магазина на закупку пакетов супа у поставщика (12.1) (см. рис. 11.2). Графически определите наиболее выгодный объем заказа, если суп отпускается упаковками по 90 шт.

Задача № 11.3

Фирма может производить изделие или покупать его. Если фирма сама выпускает изделие, то каждый запуск его в производство обходится в 20 руб. Интенсивность производства составляет 120 шт. в день. Если изделие закупается, то затраты на осуществление заказа равны 15 руб. Затраты на содержание изделия в запасе независимо от того, закупается оно или производится, равны 2 коп. в день. Потребление изделия фирмой оценивается в 26 000 шт. в год.

Предполагая, что фирма работает без дефицита, определите, что выгоднее: закупать или производить изделие (в месяце 22 рабочих дня).

Задача № 11.4

Подтвердите свое решение задачи № 11.3 графически, для этого на одном рисунке постройте графики общих затрат фирмы на УЗ ($Q \in [200;1200]$) для случаев покупки и производства изделий (см. рис. 11.2).

*Задача № 11.5**

При строительстве участка автодороги длиной 500 м используют гравий, расход которого составляет 120 кг/м. Сроки строительства составляют 17 дней. Работа идет в одну смену. Расход гравия равномерный. Гравий доставляется грузовыми машинами, емкостью 7 т, в течение 4 часов. Затраты на один рейс грузовика равны 15 руб. Затраты на хранение гравия на месте строительства составляют 1 руб. 10 коп. в сутки за тонну.

Определить параметры УЗ: оптимальный объем заказа, количество грузовых машин, используемых для доставки, период поставок, точку заказа, затраты на УЗ за всю стройку. Постройте график двух последних циклов изменения запаса гравия на месте строительства.

Задача № 11.6

Подтвердите свое решение задачи № 11.5 графически. Для этого отобразите на одном рисунке графики затрат на УЗ для различных вариантов доставки гравия, которые были проанализированы при решении задачи. Покажите на этих графиках оптимальные объемы заказа для каждого из вариантов и окончательно выбранный размер заказа.

Задача № 11.7

В течение смены длительностью 24 дня в санатории отдыхают 83 человека. Ежедневно каждый из отдыхающих должен получить 200 г кефира. Кефир на молокозаводе пакуется в пакеты по 0,5 л (6 руб./шт) и 1 л (10 руб./шт) и доставляется транспортом санатория в течение 2 часов. Срок годности кефира ограничен 5 днями. Его хранение в холодильниках санатория обходится в среднем в 12 коп. за 1 л в сутки. Стоимость оформления и доставки заказа составляет 54 руб.

Организуйте поставку кефира в санаторий в течение одной санаторной смены, учитывая в затратах на УЗ (12.1) цену покупки кефира. Постройте график циклов изменения запаса кефира.

*Задача № 11.8**

Придумайте условие задачи УЗ, максимально приближенное к реальности, для которого могут быть использованы описанные модели УЗ (одна из моделей). Решите эту задачу.

Пример ситуации для задачи: семья из трех человек решает, что выгодней – делать запас картофеля на всю зиму или покупать картофель в течение зимы мелкими партиями. При этом надо учесть такие факторы, как потери картофеля при хранении в домашних условиях, возможное повышение цен на картофель в течение рассматриваемого периода и т.д.

12. МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ СКИДКИ

12.1. Теоретическое введение

Уравнение общих затрат для ситуации, когда учитываются затраты на покупку товара, имеет вид

$$L = K\frac{\nu}{Q} + s\frac{Q}{2} + c\nu \ \text{[руб./ед.t]}, \qquad (12.1)$$

где c – цена товара [руб./ед. тов.]; $c\nu$ – затраты на покупку товара в единицу времени [руб./ед.t]. Если цена закупки складируемого товара постоянна и не зависит от Q, то ее включение в уравнение общих затрат приводит к перемещению графика этого уравнения параллельно оси Q и не изменяет его формы (см. рис. 12.1). Т.е. в случае постоянной цены товара ее учет не меняет оптимального решения Q_W.

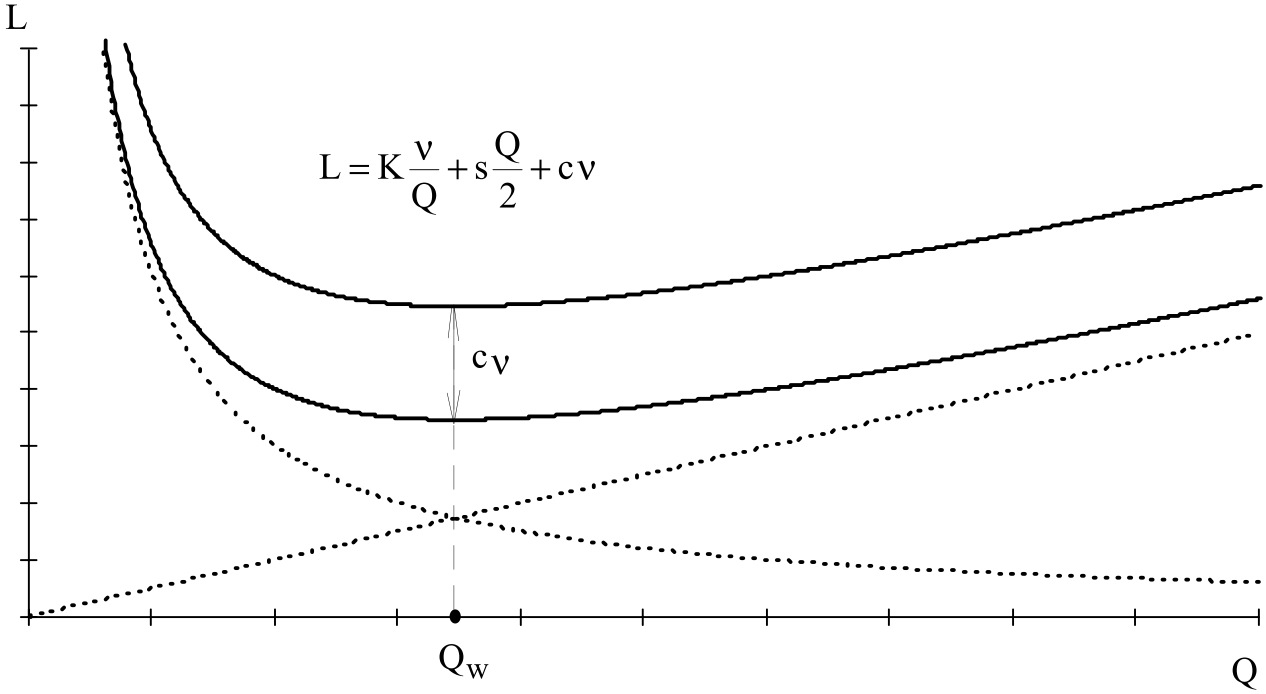

Рис. 12.1. График затрат на УЗ с учетом затрат на покупку

Если на заказы большого объема предоставляются скидки, то заказы на более крупные партии повлекут за собой увеличение затрат на хранение, но это увеличение может быть компенсировано снижением закупочной цены. Таким образом, оптимальный размер заказа может изменяться по сравнению с ситуацией отсутствия скидок. Поэтому затраты на приобретение товара необходимо учитывать в модели покупок со скидками.

Новые входные параметры модели, учитывающей скидки

1) Q_{p1}, Q_{p2} – **точки разрыва цен**, т.е. размеры покупок, при которых начинают действовать соответственно первая и вторая скидки, [ед. тов.];

2) c, c_1, c_2 – соответственно исходная цена, цена с первой скидкой, цена со второй скидкой, [руб./ед. тов.].

Влияние единственной скидки на общие затраты на УЗ показано на рис.12.2.

Чтобы определить оптимальный размер заказа Q^*, необходимо проанализировать, в какую из трех областей попадает точка разрыва цены Q_{p1} (см. рис. 12.2). Правило выбора Q^* для случая с одной скидкой имеет вид:

$$Q^* = \begin{cases} Q_w, \text{ если } 0 \le Q_{p_1} < Q_w & \text{(область I)}, \\ Q_{p_1}, \text{ если } Q_w \le Q_{p_1} < Q_1 & \text{(область II)}, \\ Q_w, \text{ если } Q_{p_1} \ge Q_1 & \text{(область III)}. \end{cases} \tag{12.2}$$

12.2. Методические рекомендации

Правильность решения задач с УЗ со скидками в большой степени определяется *качественно построенным графиком* общих затрат с указанием на графике всех параметров, используемых при решении. Поэтому в первую очередь необходимо анализировать ситуацию графически и только после этого проводить численные вычисления. Например, если внимательно проанализировать ситуации на рис. 12.2, то можно принимать решение без непосредственного использования правила (12.2). Зрительно легко определить более "выгодный" объем заказа, найдя точку, координата которой по оси L лежит ниже других вариантов заказов.

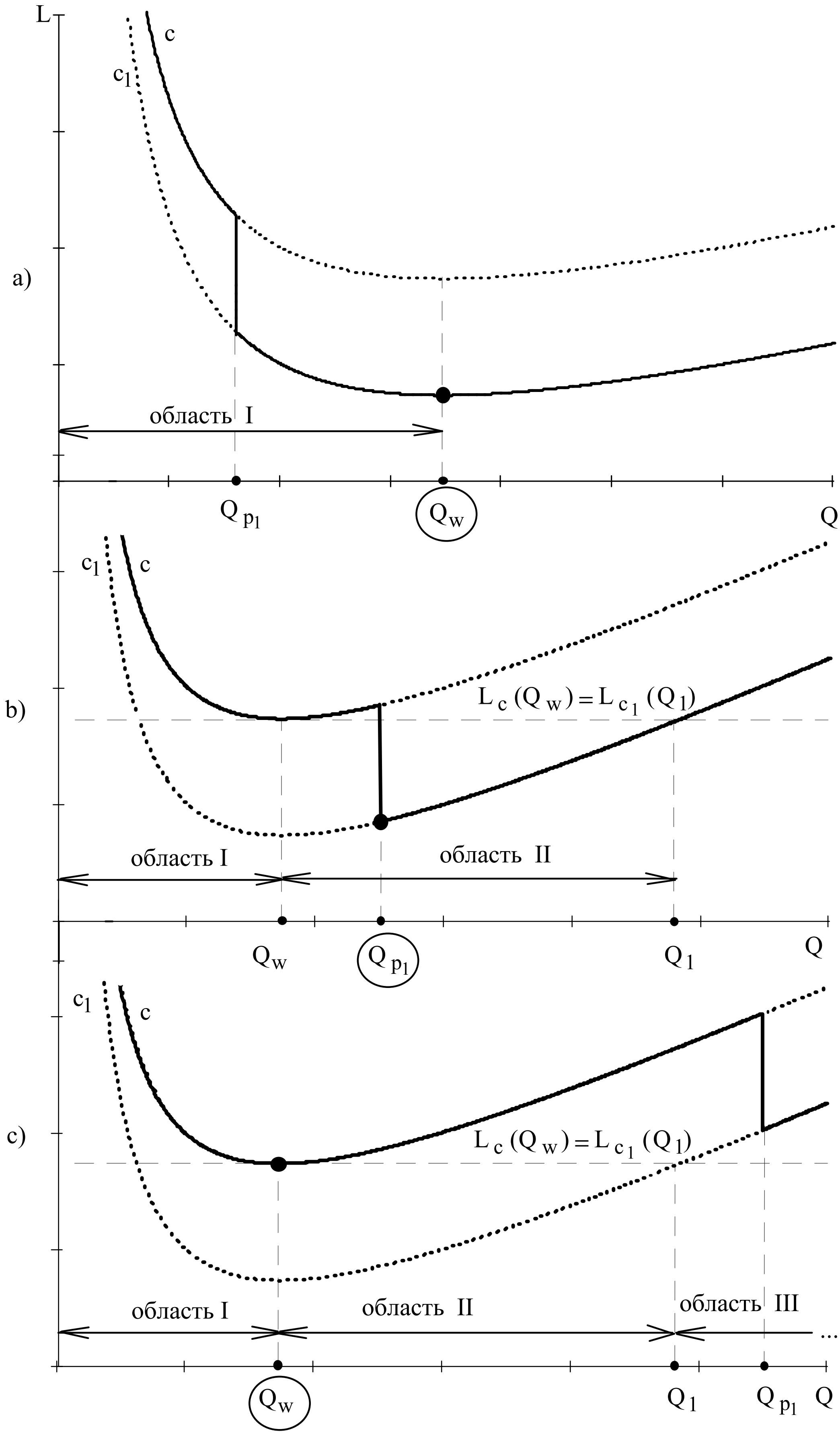

Рис. 12.2. График затрат с учетом скидок: a) $Q^* = Q_w$; b) $Q^* = Q_{p_1}$; c) $Q^* = Q_w$

При решении задач с двумя скидками сначала находится оптимальный объем заказа с учетом первой скидки, а затем рассматривается вторая скидка, т.е. обе подзадачи решаются по правилу (12.2).

Задача №12.01

Пусть затраты на заказ равны 10 руб., затраты на хранение продукции 1 руб. в сутки, интенсивность потребления товара 5 шт. в день, цена товара – 2 руб. за штуку, а при объеме закупки 15 шт. и более – 1 руб. Определите оптимальный размер заказа, цену покупки и затраты на УЗ.

Решение

Начинаем решение с приблизительного построения пунктирными линиями графиков двух функций общих затрат, соответствующих двум ценам, которые указываем над соответствующими линиями затрат: $c = 2$ руб./шт. и $c_1 = 1$ руб./шт. (рис. 12.3).

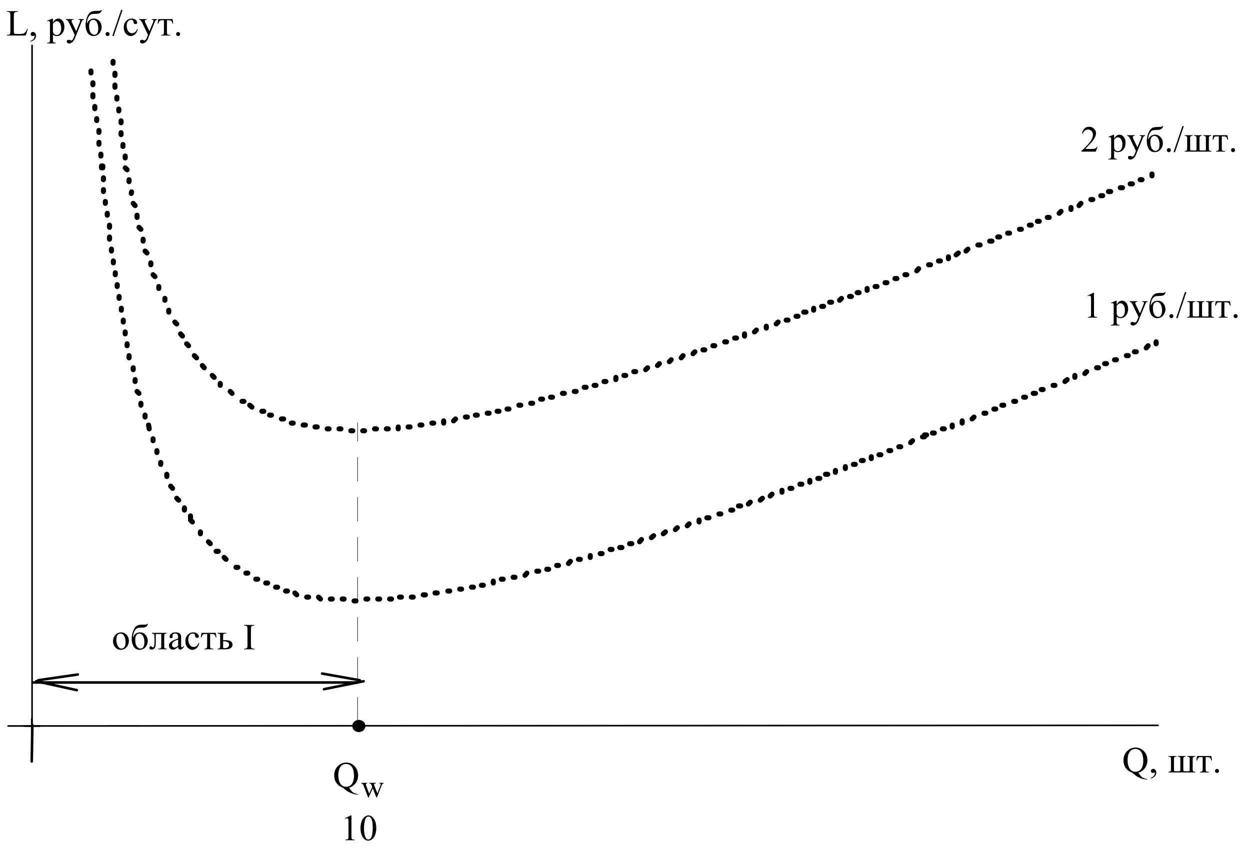

Рис. 12.3. Общие затраты на УЗ к задаче № 12.01

Поскольку объем заказа, задаваемый формулой Уилсона (11.1), легко определяется зрительно как точка минимума обеих функций, то без предварительных вычислений *графически* находим объем Уилсона Q_W и отмечаем его на графике.

Только после этого, используя параметры $K = 10$ руб., $\nu = 5$ шт. в день, $s = 1$ руб. за 1 шт. в сутки, вычисляем значение Q_W и *подписываем его на графике под обозначением* Q_W.

$$Q_W = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 5}{1}} = 10 \text{ [шт.]}.$$

Очевидно, что в область I $Q_{p1} = 15$ шт. не попадает, т.к. $Q_{p1} > Q_W$. Таким образом, Q_{p1} может попасть в области II или III. Границей между этими областями служит размер заказа Q_1, уравнивающий общие затраты при цене со скидкой 1 руб./шт. и затраты при заказе Q_W по исходной цене 2 руб./шт. Сначала строим Q_1 *графически* (рис. 12.4).

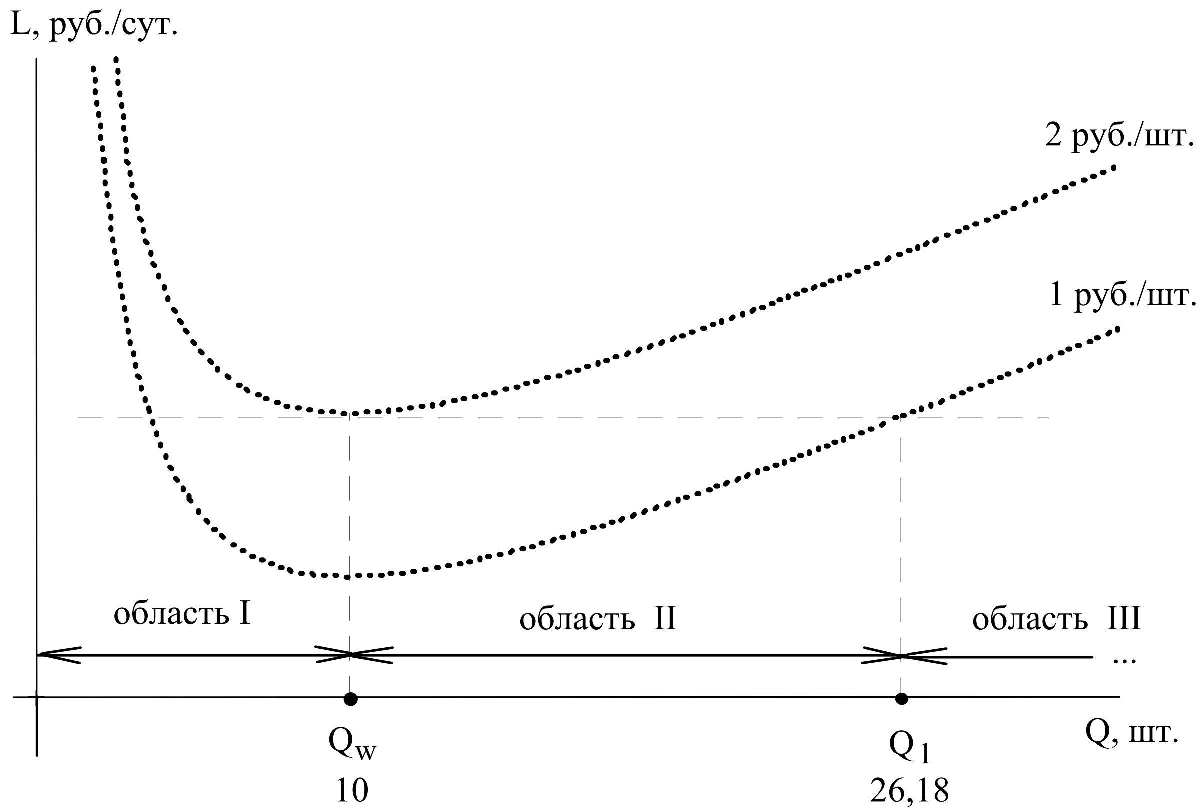

Рис. 12.4. Построение Q_1 на графике общих затрат УЗ задаче № 12.01

Только после этого найдем Q_1 численно. Используя рис. 12.4, запишем выражение, показывающее равенство затрат,

$$L_c(Q_w) = L_{c_1}(Q_1), \qquad (12.3)$$

с численными значениями параметров:

$$L_{2\,\text{руб./шт.}}(10) = L_{1\,\text{руб./шт.}}(Q_1).$$

После использования (12.1) для раскрытия левой и правой частей (12.3) получаем

$$L_{2\text{руб.}}(Q) = K \cdot \frac{\nu}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2} + c\nu = 10 \cdot \frac{5}{10} + 1 \cdot \frac{10}{2} + 2 \cdot 5 = 20 \text{ [руб./ сут.]},$$

$$L_{1\text{руб.}}(Q_1) = K \cdot \frac{\nu}{Q_1} + s \cdot \frac{Q_1}{2} + c_1\nu = 10 \cdot \frac{5}{Q_1} + 1 \cdot \frac{Q_1}{2} + 1 \cdot 5 = \frac{50}{Q_1} + \frac{Q_1}{2} + 5,$$

$$\frac{50}{Q_1} + \frac{Q_1}{2} + 5 = 20,$$

$$Q_1^2 - 30Q_1 + 100 = 0,$$

$$Q_1 = 26{,}18 \text{ шт. или } Q_1 = 3{,}82 \text{ шт.}$$

Всегда выбираем больший из корней $Q_1 = 26{,}18$, т.к. меньший по значению корень не дает нам информации о границе областей II и III (см. рис. 12.4), и отмечаем *численное значение* 26,18 на графике.

Таким образом, точка разрыва цен $Q_{p1} = 15$ попадает в область II, т.к.

$$10 \le 15 \le 26{,}18 \ (Q \le Q_{p1} \le Q_1).$$

Отметим эту точку на графике в любом месте области II (рис. 12.5).

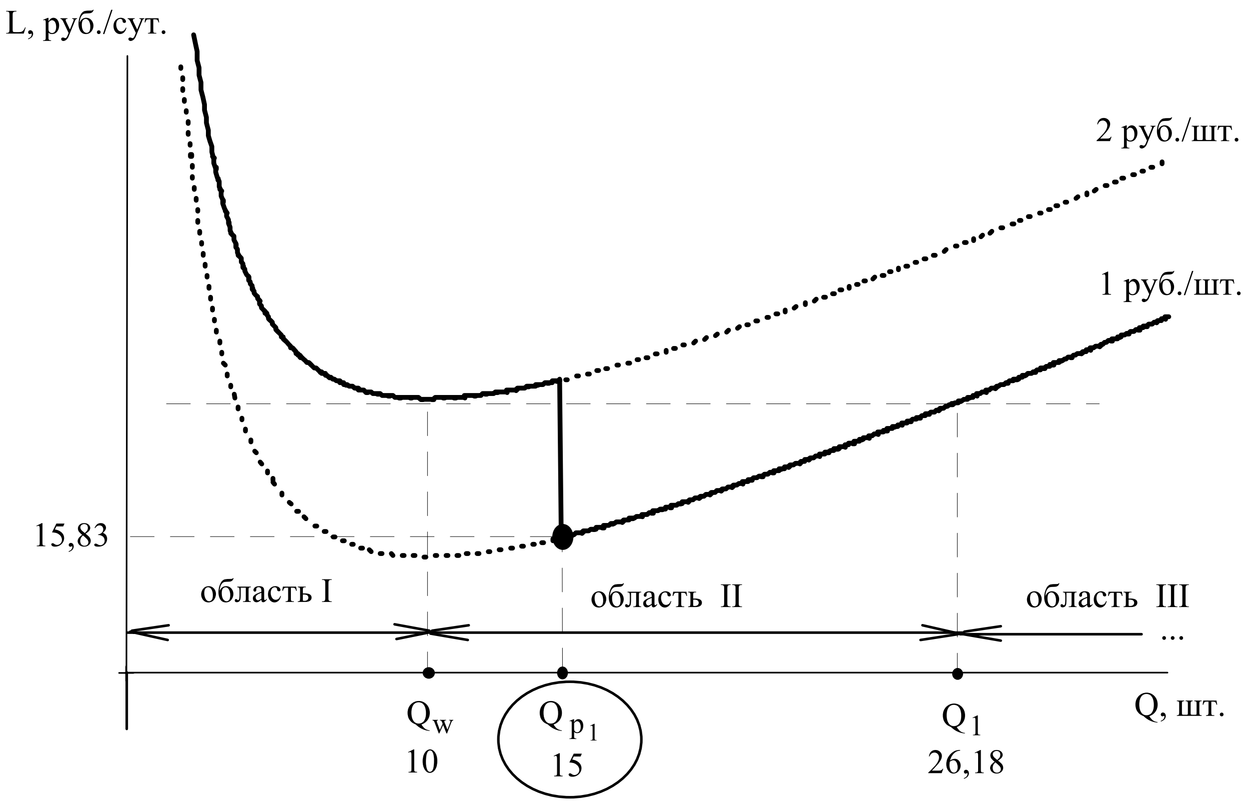

Рис. 12.5. Оптимальное решение задачи № 12.01

После этого *сплошной линией* обведем те участки обеих функций затрат, которые соответствуют действующим ценам, т.е. до объема $Q_{p1} = 15$ обведем верхнюю линию затрат, а после – нижнюю.

Согласно правилу (12.2) и графику (см. рис. 12.5) оптимальным является объем заказа $Q^* = 15$ шт. по цене 1 руб./шт. Таким образом, в данной ситуации скидкой пользоваться выгодно. Общие затраты при этом составляют $L_1(15) = 10 \cdot \frac{5}{15} + 1 \cdot \frac{15}{2} + 1 \cdot 5 = 15{,}83$ [руб./ сут.]. Если бы заказывали по 10 шт. товара, то общие затраты составили бы 20 рублей, т.е. при заказе в 15 шт. экономия средств составляет 4,17 рублей в сутки.

Задача № 12.02

Рассмотрим задачу № 11.01. Пусть поставщик супа в пакетах предоставляет следующие скидки

Размер заказа	Цена, руб./шт.
1–199	2
200–499	1,96 (2% скидки)
500 и более	1,92 (4% скидки)

Следует ли владельцу магазина воспользоваться одной из скидок, предоставляемых поставщиком? Каковы при этом будут размер заказа и общие затраты на УЗ?

Решение

1. Строим пунктирными линиями графики трех функций затрат и обозначаем на них соответствующие цены $c = 2$, $c_1 = 1{,}96$ и $c_2 = 1{,}92$ (рис. 12.6). Строим на графике точку, соответствующую Q_w.

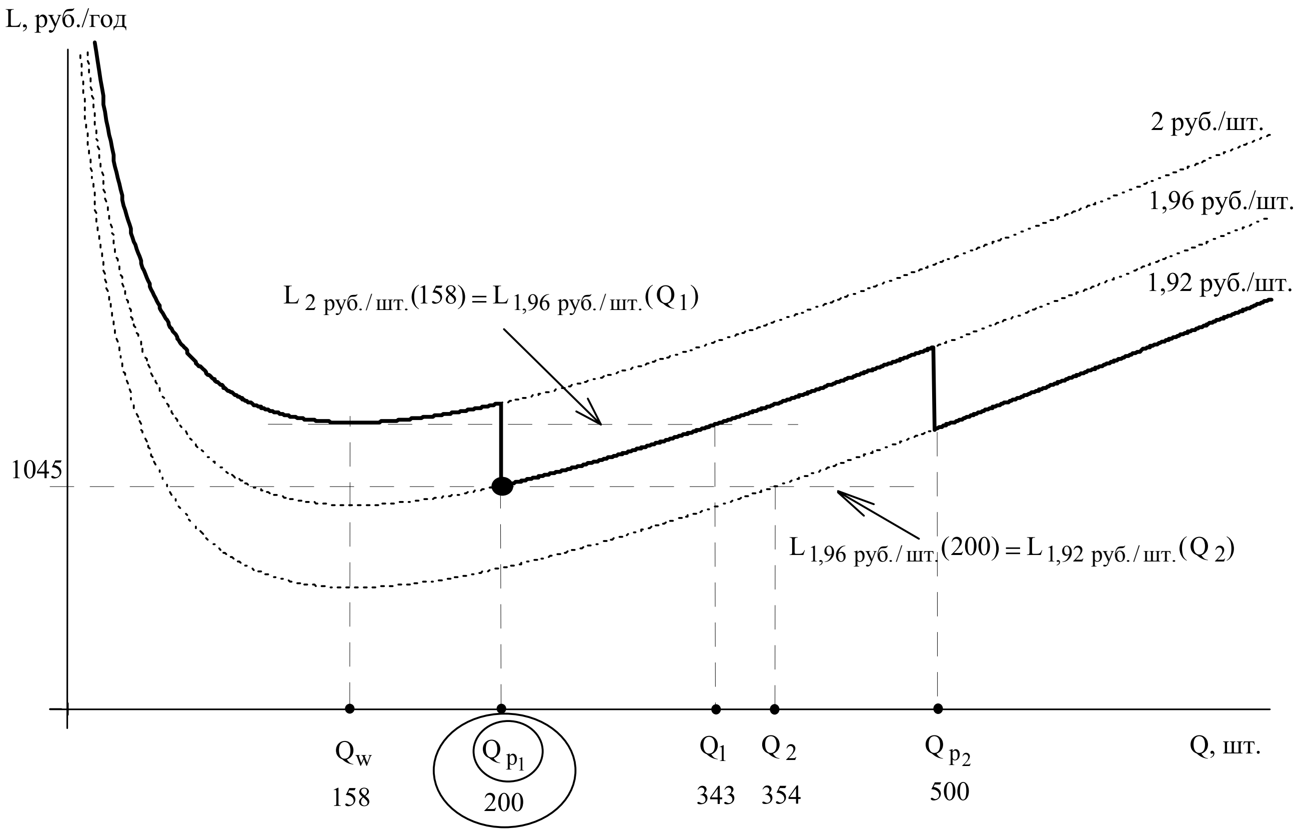

Рис. 12.6. Решение задачи № 12.02 с двумя скидками

2. Вычисляем значение $Q_w = 158$ (см. решение задачи № 11.01), отмечаем это значение на графике.

3. Поскольку $Q_{p1} = 200$ не попадает в область I, то необходимо найти границу областей II и III. Для этого строим на графике уровень затрат, соответствующий заказу Q_W и цене c=2 руб. до пересечения со второй линией затрат, и *графически* находим и строим Q_1.

4. Находим Q_1 *численно*, используя выражение

$$L_c(Q_W) = L_{c_1}(Q_1) \text{ или } L_{2\text{ руб./шт.}}(158) = L_{1{,}96\text{ руб./шт.}}(Q_1);$$

$$Q_1 = 343 \text{ [шт.]}.$$

5. Используя правило (12.2) и график на рис. 12.6, находим более дешевый объем заказа (с учетом только первой скидки)

$$Q^{*1} = Q_{p1} = 200 \text{ [шт.]}.$$

6. Чтобы рассмотреть вторую скидку, построим на графике уровень затрат, соответствующий заказу, оптимальному при действии только первой скидки, т.е. $Q^{*1} = Q_{p1} = 200$ и цене $c_1 = 1{,}96$ руб./шт. При пересечении этого уровня и третьей линии общих затрат *графически определяем* Q_2.

7. Находим *численно* Q_2=354, исходя из выражения

$$L_{c_1}\left(Q^{*1}\right) = L_{c_2}(Q_2) \text{ или } L_{1{,}96\text{ руб.}}(200) = L_{1{,}92\text{ руб.}}(Q_2).$$

8. Используя правило (12.2) и график затрат, находим наиболее дешевый объем заказа с учетом первой и второй скидок

$$Q^{*} = Q_{p1} = 200 \text{ шт.}$$

9. Таким образом, пользоваться второй скидкой владельцу магазина невыгодно. Оптимальный для него вариант – заказывать 200 пакетов по цене 1,96 руб./шт. обойдется в $L_{1{,}96\text{ руб.}}(200) = 1045$ [руб./год].

12.3. Варианты задач для самостоятельного решения

Задача № 12.1

Рассмотрите задачу №12.01 и определите оптимальный объем заказа и общие затраты на УЗ за *цикл изменения уровня запасов* для случаев, когда скидки предоставляются при размере заказа: 1) 30 шт.; 2) 5 шт.

Задача № 12.2

Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации УЗ? Известно, что $\nu = 320$ шт./дн.; K=20 руб.; s=2 руб./шт.*дн.; C=5 руб./шт.; $C_1 = 4$ руб./шт.; $C_2 = 3$ руб./шт.; $Q_{p_1} = 500$ шт.; $Q_{p_2} = 700$ шт.

Задача № 12.3

Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации УЗ? Известно, что $\nu = 240$ шт./дн.; K=30 руб.; s=3 руб./шт.*дн.; C=6 руб./шт.; $C_1 = 5$ руб./шт.; $C_2 = 3$ руб./шт.; $Q_{p_1} = 50$ шт.; $Q_{p_2} = 500$ шт.

Задача № 12.4

Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации УЗ? Известно, что $\nu = 0{,}460$ т/дн.; K=20 руб.; s=4,2 руб./т*дн.; C=10 руб./т; $C_1 = 7$ руб./т.; $C_2 = 3$ руб./т; $Q_{p_1} = 3$ т; $Q_{p_2} = 4$ т.

Задача № 12.5

Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации УЗ? Известно, что $\nu = 0{,}850$ т/дн.; K=25 руб.; s=2,6 руб./т*дн.; C=12 руб./т; $C_1 = 9$ руб./т.; $C_2 = 5$ руб./т; $Q_{p_1} = 2$ т; $Q_{p_2} = 3$ т.

Задача № 12.6

Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации УЗ? Известно, что $\nu = 0{,}290$ т/дн.; K=30 руб.; s=5,6 руб./т*дн.; C=8 руб./т; $C_1 = 6$ руб./т.; $C_2 = 4$ руб./т; $Q_{p_1} = 2{,}5$ т; $Q_{p_2} = 4$ т.

*Задача № 12.7**

Придумайте и графически отобразите без привязки к конкретным числовым значениям все возможные варианты решений задач с двумя скидками.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Букан Дж., Кенинсберг Э. Научное управление запасами. М.: Наука, 1967.
2. Губин Н.М., Добронравов А.С., Дорохов Б.С. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении в отрасли связи. М.: Радио и связь, 1993.
3. Таха Х.А. Введение в исследование операций. в 2-х книгах. М.: Мир, 1985.
4. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом "Вильямс", 2001.
5. Эддоус М. , Стенсфилд Р. Методы принятия решений. М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997.

Алесинская Татьяна Владимировна

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ПО КУРСУ
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Ответственный за выпуск ***Алесинская Т.В.***

Редактор ***Кочергина Т.Ф.***

Корректор ***Чиканенко Л.В.***

Компьютерная верстка ***Седова Т.В.***

ЛР № 020565 от 23 июня 1997г. Подписано к печати

Формат 60x841/16. Бумага офсетная

Печать офсетная Усл.-п.л.- 9,5 Уч.-изд.- 9,3

Заказ № Тираж 500 экз.

<< С >>

Издательство Таганрогского государственного
радиотехнического университета.

ГСП 17А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44

Типография Таганрогского государственного радиотехнического университета

ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1