Уральский государственный технический университет
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
кафедра молекулярной физики

Транспортная задача. Алгорифм опорных элементов.

«225000 бутылок – вынь да полож!»

индивидуальная дополнительная задача

Руководитель д. Ф.-м. н., снс		Александров О.Е.
Студент группа Фт-217		Черей Д.А.

Екатеринбург 2002

Содержание

Введение 3
Условие задачи 3
Решение 5
Алгоритмы 7
Принцип северо-западного угла 8
Построение матрицы маргинальных затрат 8
Поиск наилучшей матрицы маргинальных затрат 9
Улучшение базиса 10
Заключение 11

ВВЕДЕНИЕ

Данная программа разрабатывалась в рамках курса «Теория информационных систем», как дополнительная зачетная задача. Данная задача приведена с решением, которое, между прочим, дано в очень неформальной форме. Целью работы является составить на MathCAD-е решатель соответствующей задачи с подробными пояснениями (комментариями), возможностью изменения и расширения начальных данных. В процессе выполнения задачи решается одна конкретная задача, с определенными условиями, но решение выполнено в форме алгоритма, не зависящего от начальных данных, и от их количества. Так что приведенное решение вполне сгодится и для решения других, подобных транспортных задач, а при незначительной модификации круг решаемых задач значительно расширяется

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

“225000 бутылок – вынь да положь!”

(Транспортная задача. Алгорифм опорных элементов)

Вот уже год, как французы начали пить «Эйфорет». Особенно это относится к парижанам, которые никогда бы не представляют собой этот «Эйфорет», напиток, угрожающий нашим привычкам и невоздержанности. Все началось еще в 1975 г., когда один молодой инженер, химик и диетолог, открыл свойства R178, вещества, которое таинственно для профанов, но которое без всякого ущерба для здоровья доставляет все удовольствия опьянения Немедленно была создана компания по использованию патентов, связанных с R178. Затем последовали волнения в Бургундии, в Шампани и во всех остальных местах, где солнце дает жизнь доброму французскому вину; перегородили дороги, заперли депутатов в винном погребе, публично сожгли портрет изобретателя Но разве можно остановить прогресс? Когда, наконец, министр финансов установил очень выгодную цену па новый налиток, муниципальные органы приняли решение способствовать распространению этого чудодейственного напитка, столь прибыльного для казны. В результате уже упомянутая компания организовала выпуск «Эйфорета», этой смеси воды, красок, ароматических веществ и небольшого

количества неизбежного хлорофилла, сдобренной углекислым газом и громкой рекламой. Чтобы утолить новую страсть десяти миллионов парижан, в окрестностях Парижа было выстроено три завода. После нескольких месяцев отчаянного сопротивления собственники баров, кабачков, ларьков, кафе, кабаре, бистро, пивных и буфетов были вынуждены склониться перед новой модой и заказы на «Эйфорет» потекли рекой. Чтобы удовлетворить требованиям торопящейся и нетерпеливой клиентуры, было, построено пять складов, где производилась оптовая торговля Эти склады поставляли ящики «Эйфорета» розничным торговцам, которые подавали свои заказы за два дня Таким образом, каждый день склады могли

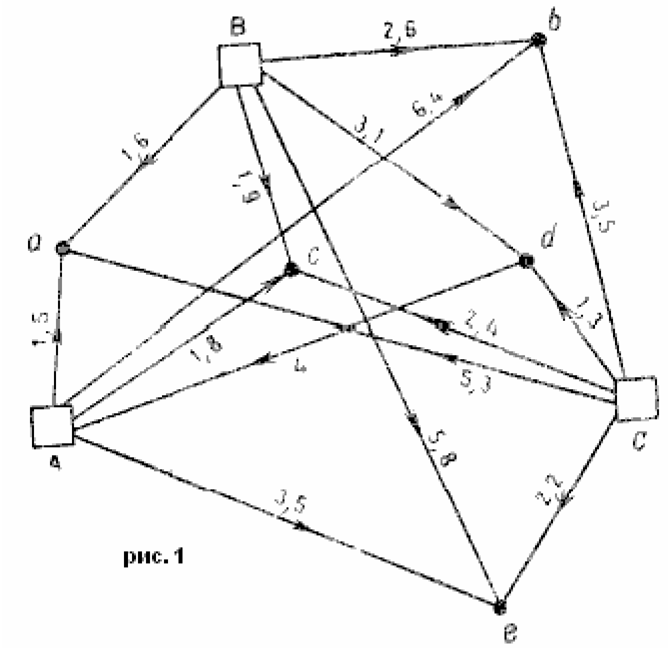

рис. 1

информировать *диспетчера по пополнению запасов* о количестве напитка, которое должно быть поставлено в следующий день.

На рисунке указано географическое расположение трех заводов A, B и C и пяти складов a, b, c, d и e. Из-за различия в расстояниях и тем самым в транспортных расходах стоимость перевозки одной бутылки «Эйфорета» зависит от завода-производителя и склада назначения

Транспортные расходы указаны при соответствующих дугах графа на рис.1. На 5 июня 1975 г. диспетчер обладал следующей информацией: Производство (тыс. бутылок): A = 90; *B* = 75; C = 35; всего 200.

Потребность (тыс. бутылок): a = 40; b = 35; c = 70; *d = 30;* e = 50; всего 225.

После всего вышесказанного, условие задачи формулируется крайне просто, а именно, <u>при каком распределении потоков доставки товара транспортные расходы будут минимальными.</u>

РЕШЕНИЕ

Так как суммарная потребность значительно превосходит суммарную производительность, 25000 парижан будут вынуждены заменить свой любимый напиток давно вышедшим из моды воврейским шипучим. Но не будем оплакивать судьбу этих несчастных людей. Нас интересует больше позиция диспетчера. Мы ведь находимся в 1975 г., когда методы исследования операций вошли в программы обучения поэтому естественно, что наш диспетчер, желая организовать распределение бутылок с «Эйфоретом», прибегает к научным методам. Время идет быстро: напомним, что еще в средние века купец, знакомый с правилами деления мог сойти за ученого! Как организовать ежедневные перевозки так, чтобы общая сумма транспортных издержек

	a	b	c	d	e	
A	1.5	6.4	1.8	4	3.5	90
B	1.6	2.6	1.9	3.1	5.8	75
C	5.3	3.5	2.4	1.3	2.2	35
F	50	50	50	50	50	25
	40	35	70	30	50	

Таблица 1

была минимальной? Так как объем производства и потребности в «Эйфорете» изменяются ото дня ко дню, задачу приходится решать ежедневно. Для начала диспетчер строит таблицу 1, в которой приведены расходы по перевозкам, уже указанные на рис. 1, а также объемы требований и имеющиеся резервы, приведенные внизу столбцов и на концах строк. Поскольку потребности превосходят объем производств, диспетчер вводит фиктивный завод *F*, для которого транспортные расходы оказываются гораздо более высокими, чем расходы для фактически имеющихся заводов. Таким образом, в условиях оптимального окончательного решения фиктивный завод должен будет выпускать ровно 25000 бутылок. Пусть фиктивные издержки по транспортировке тысячи бутылок от завода до какого-либо склада составляют 50.

	a	b	c	d	e	
A	40	35	15	0	0	90
B	0	0	55	20	0	75
C	0	0	0	10	25	35
F	0	0	0	0	25	25
	40	35	70	30	50	

рис. 2

К счастью, у диспетчера сохранились в памяти некоторые основные сведения, почерпнутые им в период профессионального обучения. Так, например, он запомнил, что в задачах такого рода, имеющих таблицу с *m* строками и *n* столбцами, оптимальное решение обязательно должно содержать не менее чем (m-1)*(n-1) нулей. Поэтому не следует искать оптимальное решение ни наугад, ни в расчете на одну лишь интуицию (даже взбодренную несколькими стаканами «Эйфорета»). Оптимальные решения составляют часть множества всех решений, содержащих не более *(m–l)(n–* 1) нулей. Если знать одно из таких решений, часто называемых *базисными решениями,* то можно, действуя по описываемому далее методу, последовательно уменьшить общие издержки, выбирая при этом решения, содержащие не менее (m–1)*(n–1) нулей каждое. Получить такое решение можно по правилу северо-западного угла. (См. рис. 2).

На рис.1 имеется ровно 12 нулей (их могло бы оказаться и больше, и тогда мы имели бы еще одно базисное решение). Найденному решению соответствуют издержки в 5455 франков. Как получить лучшее решение? Снабдим для удобства обозначений строки и столбцы рассматриваемой матрицы номерами (таблицу 2).

	a 1	b 2	c 3	d 4	e 5
A 1	40 / -1	35	15 / +1	X	X
B 2	X	X	55 / -1	20 / +1	X
C 3	X / +1	X	X	10 / -1	25
F 4	X	X	X	X	25

Таблица 2

Для улучшения решения займемся рассуждениями в духе маргинальной теории. Что произошло бы, если бы мы поместили единицу в пустую до того клетку матрицы? Как изменились бы в связи с этим общие издержки? Например, если мы поместим единицу в клетку (3,1) (т. е. в клетку, находящуюся на пересечении третьей строки и первого столбца), то, чтобы избежать изменения суммы элементов в третьей строке, нужно удалить единицу из клетки (3,4). Но тогда в свою очередь, чтобы сохранить сумму элементов в столбце нужно вписать единицу в клетку (2,4). Продолжение этого процесса приводит к удалению единицы из клетки (2,3), к добавлению единицы в клетку (1,3) и, наконец, к удалению единицы из клетки (1,1). Возвращаясь вновь к таблице издержек 1, мы отмечаем, что итогом этой операции будет изменение издержек на

5,3-1,3 + 3,1 - 1,9+1,8-1,5 = 5,5 сантима.

Итак, предложенное изменение не представляет интереса, так как оно приводит к увеличению издержек на 5,5 сантима за бутылку. Но если систематически

рассчитывать маргинальные затраты для всех незатронутых клеток в базисном решении, то, образуя каждый раз контур, или замкнутую лестницу, мы получим

614= 4-3.1 + 1.9-1.8=1

615= 3.5 -2.2 + 1.3 - 3.1+1.9 - 1.8 = -0.4

621=1.6-1.9+1.8-1.5 = 0

622= 2.6-1.9 + 1.8 - 6.4 = -3.9 ***

625= 5.8-2.2 + 1.3-3.1 = 1.8

631= 5.3-1.3 + 3.1-1.9 + 1.8-1.5 = 5.5

632= 3.5 -1.3+ 3.1 -1.9+1.8-6.4 = - 1.2

633= 2.4-1.3 + 3.1 -1.9 = 2.3

641= 50-50 + 2.2-1.3+3.1 – 1.9+1.8-1.5 = 2.4

642= 50 -50 + 2.2-1.3 + 3.1-1.9 + 1.8-6.4 =-2.5

643= 50-50 + 2.2- 1.3 +3.1 -1.9 = 2.1

644= 50-50 + 2.2- 1.3 = 0.9.

Мы видим, что каждая маргинальная затрата обозначена индексами строки и столбца, в которые помещается новая единица. Некоторые из затрат оказываются отрицательными, например 622=-3.9, принимает наибольшее по абсолютной величине отрицательное значение. Для того чтобы перейти от базисного решения к другому решению, нужно «опустошить» одну из клеток и заполнить некоторую пустую клетку соответствующей величиной, так сказать улучшить решение (см. алгоритм улучшения)

	a	b	c	d	e	
A	40	0	30	0	20	90
B	0	35	40	0	0	75
C	0	0	0	30	5	35
F	0	0	0	0	25	25
	40	35	70	30	50	

рис. 3

Повторив процедуру оптимизации решение еще один раз мы получим наилучшую матрицу маргинальных затрат, соответствующее которой уменьшение транспортных расходов будет нулевое, а значит придем к оптимальному решению (см. рис.3). При данном решении транспортные расходы минимальны и соответственно равны 4010 франков.

АЛГОРИТМЫ

Принцип северо-западного угла

Этот принцип используется для получения самого первого (базисного) решения Таким образом, прибегая к числам нашего решения, такое базисное решение

	a	b	c	d	e	
A	40	35	15	0	0	90
B	0	0	55	20	0	75
C	0	0	0	10	25	35
F	0	0	0	0	25	25
	40	35	70	30	50	

изображено на рисунке:
Будем, начиная с северо-западного угла (обозначенного стрелкой), заполнять первую строку, насыщая последовательно столбцы a и b; запишем далее остаток запаса в первую клетку столбца c. Насытим затем столбец c, строку B, столбец d, строку C и, наконец, столбец e. Строка F окажется при этом насыщенной автоматически.
Другими словами мы начинаем с левой верхней клетки записывать некоторые значения, когда сумма значений в столбце или строке сравняется с необходимой (для строк указана справа, для столбцов - внизу), т.е. насытится, начинаем записывать в следующий столбец, если насытился столбец, или соответственно в следующую строку, если насытилась строка.

Построение матрицы маргинальных затрат

В процессе решения задачи необходимо получить матрицу маргинальных затрат, а именно матрицу, состоящую из 0, 1, -1. Каждая такая матрица соответствует отдельному нулевому элементу в базисе (здесь под базисом понимается какое-либо решение, которое необходимо улучшить). Матрица строится так, что при добавлении ее элементов к соответствующим элементам базиса, суммы по вертикали и горизонтали не изменяются, а значит, преобразованный базис также является решением. Как было сказано ранее, при построении первого базиса принципом северо-западного угла, в нем будет не менее (m-1)*(n-1) нулей, а значит для каждого нулевого элемента базиса существует единственная матрица маргинальных затрат, т.е. матрица определяется однозначно. Таким образом находя матрицу маргинальных затрат для какого-либо нуля базиса, первым делом единица ставится именно в эту клетку (для которой собственно и находим матрицу). Условие сохранения суммы по горизонтали и вертикали имеет первостепенный характер, исходя из этого остальные элементы (в матрице маргинальных затрат, соответствующие не нулевым

элементам базиса) должны иметь противоположный знак. Данный алгоритм имеет рекурсивный характер, так при рассмотрении ряда (столбец или строка), на следующем шаге рекурсии учитывается направление, рассматриваемое на предыдущем шаге, и собственное направление меняется на другое. Имеется всего два направления горизонталь и вертикаль. Таким образом, рассматривая горизонталь и ставя в клетку значение, начинается следующий шаг рекурсии, и рассматривается уже вертикаль, связанная с этой клеткой.

Изначально ставя 1 в начальную клетку, есть два пути, по которым можно запустить рекурсию – горизонталь и вертикаль. Пусть вначале заполним матрицу маргинальных затрат 0.5 и -0.5, начиная рекурсию по горизонтали. Далее запустим рекурсию уже по вертикали (из той же начальной клетки), заполня все теми же 0.5 и -0.5. Только уже эти значения будут не просто ставиться в соответствующую клетку, а будут приплюсовываться к уже имеющимся значениям. Тогда в силу сохранения сумм по вертикалям и горизонталям и единственности матрицы маргинальных затрат, противоречивые значения попадающие в одну клетку в сумме дадут 0, а совпадающие дадут 1 или -1.

Таким образом, мы получим матрицу, в которой стоит единица в клетке, соответствующей той, для которой в базисе и искали матрицу маргинальных затрат, также в других клетках стоят 1 и -1, таким образом, что суммы по вертикалям и горизонталям сохранятся *Именно такую матрицу и надо было найти. В* программе данный алгоритм реализован функцией Marg(), а рекурсия по одному направлению функцией ExtraMarg(). Marg() дважды вызывает ExtraMarg() вначале для вертикали, а потом для горизонтали. Результатом является искомая матрица маргинальных затрат.

Поиск наилучшей матрицы маргинальных затрат

Наилучшей матрицей маргинальных затрат является та, для которой изменение транспортных расходов приводит к их уменьшению, т.е. увеличение их является отрицательным. Если же в процессе поиска наилучшей матрицы маргинальных затрат для какого-то базиса все изменения расходов положительны это означает, что данный базис является оптимальным и других оптимальных решений больше нет. Если же минимальное увеличение расходов нулевое, то данный базис оптимальный, но есть еще и другие решения расходы при которых такие же, как и в данном случае. Таким образом, чтобы найти наилучшую матрицу маргинальных затрат, необходимо найти увеличение транспортных расходов для каждой матрицы и выбрать ту, для

которой это увеличение минимально. В случае отсутствия отрицательных увеличений дальнейшая оптимизация решения прекращается, поскольку данное решение уже оптимально. В программе данный алгоритм реализован функцией BestMargInBasis(), результатом является наилучшая матрица маргинальных затрат, или же 0 – как признак того, что данное решение уже оптимально.

Улучшение базиса с учетом наилучшей матрицы маргинальных затрат

Когда наилучшая матрица маргинальных затрат найдена, необходимо в соответствии с ней оптимизировать базис. Пусть имеется следующий базис, изображенный на рисунке 4. Для него соответственно наилучшая матрица маргинальных затрат изображена на рисунке 5.

$$\begin{pmatrix} 40 & 35 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 40 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

рис. 4 **рис. 5** **рис. 6**

Если к элементам базиса добавить соответствующие элементы матрицы маргинальных затрат, то получится новое решение, которое будет соответствовать меньшим транспортным расходам. Но наибольшее уменьшение расходов будет если матрицу маргинальных затрат немного преобразовать, а именно умножить на какое-то положительное число. Это число ищется с учетом того, чтобы при суммировании в новом базисе не было отрицательных элементов. Чтобы уменьшение транспортных расходов было наибольшим, это искомое число также должно быть максимальным из возможных, а именно, оно равняется минимальному элементу базиса, соответствующего -1 в матрице маргинальных затрат. В данном случае это 35. Тогда после преобразования получится новый базис (см. рис. 6), которому соответствуют меньшие транспортные расходы. В программе данный алгоритм реализован функцией

MaxiMarg(), результатом действия которой, является новое решение, преобразованное с учетом матрицы маргинальных затрат.

Заключение

В ходе решения вводится фиктивный завод, выпускающий 25000 бутылок «Эйфорета». Такой выход из ситуации расхождения потребностей и производства вполне приемлем, однако, в таком случае один из пунктов назначения будет испытывать дефицит, это не совсем выгодно экономически. Полностью насытить все конечные пункты назначения не удастся в любом случае, но возможно решить эту проблему другим путем. Потребности пунктов назначения уменьшаются так, чтобы в сумме не превысить производства, если сказать точнее суммарное производство должно равняться суммарным потребностям, и тогда отсутствует необходимость введения фиктивного завода. В этом случае транспортные расходы будут уже не минимальными, но с экономической точки зрения может оказаться выгодней определить дефицит каждого пункта вручную, хотя и потерять в деньгах.

Определим потребности следующим образом:

a=36, b=31, c=62, d=27, e=44.

Тогда получится оптимальное решение, изображенное на рисунке 7.

	a	b	c	d	e
A	36		18		36
B		31	44		
C				27	8

рис. 7

Расходы, соответствующие этому решению равны 4293 франка, это больше чем при вводе фиктивного завода, но дает возможность более беспристрастно удовлетворить клиентуру.

Если же по условиям задачи возникает перепроизводство, т.е. производство заводов больше, чем потребность в товаре, необходимо вводить фиктивного потребителя и задавать транспортные издержки по доставке товара к этому потребителю на порядок выше, чем к остальным.