Федеральное агентство по образованию

ГОУ ВПО «Уральский технический университет – УПИ»

Институт Образовательных Информационных технологий

 Оценка проекта \_\_\_

 Члены комиссии

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И СИМПЛЕКС МЕТОД**

КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Руководитель Александров О. Е.

Студентка Паршакова Г.С.

гр. Ит-44011

Екатеринбург 2007

**СОДЕРЖАНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc186478653)

[1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ 5](#_Toc186478654)

[1.1. Исторические факты 5](#_Toc186478655)

[1.2. Линейное программирование 6](#_Toc186478656)

[1.3. Математическая формулировка общей задачи линейного программирования 6](#_Toc186478657)

[1.4. Графический метод 7](#_Toc186478658)

[1.5. Симплекс-метод 9](#_Toc186478659)

[2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ 14](#_Toc186478660)

[2.1. Постановка задачи 14](#_Toc186478661)

[2.2. Экономико-математическая модель 15](#_Toc186478662)

[2.3. Решение по алгоритму симплекс-метода 15](#_Toc186478663)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 20](#_Toc186478664)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 22](#_Toc186478665)

ВВЕДЕНИЕ

Цель курсового проекта - закрепление теоретических знаний, полученных в лекционном курсе и приобретение навыков самостоятельного применения теоретических знаний к решению практических задач по исследованию систем.

Исследование операций предполагает стремление найти самое оптимальное, эффективное, экономическое решение поставленной задачи. Для нахождения решения в зависимости от структур задачи применяются различные методы теории оптимальных решений - методы математического программирования.

Математическое программирование - область современной математики, исследующая и объясняющая явления, процессы и системы на основе создания новых объектов - математических моделей.

Процедура решения задачи обычно связана с использованием определенного алгоритма (метода), который подбирается в зависимости от области исследования.

Метод - способ познания явлений природы и общественной жизни с целью построения и обоснования системы знаний.

Методы математического программирования:

* линейное программирование;
* нелинейное программирование;
* динамическое программирование;
* целочисленное программирование;
* стохастическое программирование;
* эвристическое программирование;
* теория массового обслуживания;
* сетевые модели планирования и управления;
* имитационное моделирование.

С помощью методов математического программирования решаются различные типы задач:

* задачи управления запасами;
* задачи распределения ресурсов;
* задачи ремонта и замены оборудования;
* задачи массового обслуживания;
* задачи упорядочивания;
* задачи сетевого планирования и управления (СПУ);
* задачи выбора маршрута;
* комбинированные задачи.

Метод анализа, который не просто позволяет получить оптимальное решение, но и дает информацию о том, как может изменяться это решение при изменении параметров модели, то есть метод позволяющий получить ответ на вопрос, типа «что будет, если…?» – метод линейного программирования.

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

## Исторические факты

Выделение класса задач, линейного программирования относят к 30 годам 20 века. Одними из первых исследовавшими в общей форме задачи линейного программирования, были: Джон фон Нейман, знаменитый математик и физик, доказавший основную теорему о матричных играх и изучивший экономическую модель, носящую его имя; советский академик, лауреат Нобелевской премии Л.В. Канторович, сформулировавший ряд задач линейного программирования и предложивший метод их решения (в публикации «Математические методы организации и планирования производства», приведено решение таких задач, как задача повышения эффективности работы транспорта, определение оптимальных производственных режимов, рационального распределения промышленных материалов).

Американский экономист Т. Купманс способствовал тому, чтобы задачи о нахождении экстремумов линейных функций на многогранниках, задаваемых линейными неравенствами, выделили в специализированный раздел математики, предложенный назвать: «Линейное программирование».

Первая постановка транспортной задачи линейного программирования предложена в 1930 г. советским ученым А.Н.Толстым.

В 1947 году американским математиком Дж. Данцигом разработан весьма эффективный конкретный метод численного решения задач линейного программирования - симплекс-метод, при дальнейшем участии А. Чарнса, Л.Форда и Д. Фалкерсона.

Теорема двойственности доказана Д.Гейлом, Г.У.Куном и А.У. Таккером на основе идей Джона фон Неймана.

* 1. Линейное программирование

Линейное программирование – метод математического программирования, позволяющий оптимизировать модели. Оптимизация модели заключается в нахождении условного экстремума (min или max) функции. Пока что все не совсем ясно, ни что такое условный экстремум, ни откуда берется функция, и зачем вообще нужны максимумы и минимумы?

В общем-то, все просто, допустим, что имеется какое-нибудь производство, на нём трудится огромное количество работников. Директор этого крупного предприятия, хочет получить наибольшую прибыль от всего произведенного, и затратить как можно меньше трудовых ресурсов, сырьевых, и всяких других. В этом случае функция - это получение прибыли, максимум функции – наибольший прирост денежных средств или минимум функции – меньшие издержки на производство изделий. Таким образом, функция получения прибыли может быть представлена в виде линейной формы и называться она будет *целевая функция.* Связь с *ограничениями* (сырье по неснижаемым ценам, невозможность уменьшения количества рабочих или оборудования…) описывается посредством линейных уравнений или неравенств.

* 1. Математическая формулировка общей задачи линейного программирования

Найти максимальное (минимальное) значение линейной целевой функции

, где

 («свободные» переменные),

при условиях ограничения:



;

Каноническая запись системы ограничений – все ограничения представляются в виде равенств.

Решение задач линейного программирования возможно с использованием геометрического метода или алгебраического симплекс- метода.

* 1. Графический метод

Графический метод решения задач линейного программирования целесообразно использовать для:

* решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами;
* решения задач со многими переменными при условии, что в их канонической записи содержится не более двух свободных переменных.

Начальные данные:

Целевая функция: ,

Ограничения: 

Алгоритм:

1. Построение множества решений, системы ограничений.

Областью допустимых решений системы ограничений может быть:

* выпуклый многоугольник;
* выпуклая многоугольная неограниченная область;
* пустая область;
* луч;
* отрезок;
* единственная точка.

**M**

Рис.1.4.1. Множество решений системы ограничений

1. Целевая функция приравнивается к нулю ;
2. Строится вектор градиент , где

Вектор градиент строится перпендикулярно целевой функции. Он указывает направление, в котором значение целевой функции увеличивается.

Передвигая целевую функцию по направлению вектора градиента, получается, что: первая общая точка – min, последняя общая точка – max.

**M**

**min**

**max**

Рис.1.4.2. Нахождение min и max функции

* 1. Симплекс-метод

Наиболее эффективным методом, для решения задач линейного программирования является симплекс-метод, или метод последовательного улучшения плана. Симплекс-метод является алгебраической формой решения задачи линейного программирования.

*Особенность симплекс-метода:*

Задача должна быть представлена в каноническом виде, в которой целевая функция с критерием min, все ограничения в системе в виде равенств.

*Алгоритм*

1. Сведение задачи линейного программирования к каноническому виду:
	1. Переход от max к min ;
	2. Переход от системы неравенств к системе уравнений: введение неотрицательных дополнительных переменных

Если ограничения заданы в виде системы неравенств смысла «», то к левым частям ограничений прибавляем (+) дополнительные переменные.

Если ограничения заданы в виде системы неравенств смысла «», то из левых частей ограничений вычесть (-) дополнительные переменные.



1. Составление первого опорного плана:
	1. Определение первого базиса, который состоит из базисных переменных*. Базисные переменные* – это переменные, встречающиеся с коэффициентом единица в одном из уравнений и отсутствующие в других уравнениях. Остальные переменные называются *свободными.* Количество базисных переменных должно быть равно количеству ограничений в системе. Первый базис ;
	2. Определение первого решения. Свободные переменные приравниваются к нулю и получаются значения базисных переменных, т.е. . Первое опорное решение
2. Составление первой симплекс таблицы:
	1. В первый столбец таблицы записываются базисные переменные ;
	2. Во второй столбец - первое опорное решение
	3. Заполнение таблицы элементами - коэффициентами при соответствующих неизвестных системы;
	4. Последняя строка таблицы – индексная – (m+1) – заполняется коэффициентами целевой функции, взятыми с противоположным знаками.
	5. Коэффициент записывается без изменения, т.е. значение нуль.

Таблица 1.5.1

Пример первой симплекс таблицы

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | X |  |  | … |  | … |  |
|  |  |  |  | … |  | … |  |
|  |  |  |  | … |  | … |  |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
|  |  |  |  | … |  | … |  |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
|  |  |  |  | … |  | … |  |
| m+1 |  |  |  | … |  | … |  |

1. Определение ведущих столбца и строки:
	1. Просмотр индексной строки, начиная со столбца
	. Выбор максимального положительного элемента из этой строки. Столбец с этим элементом помечается стрелочкой – разрешающий или ведущий столбец;
	2. Для всех положительных элементов ведущего столбца составляется соотношение . После чего выбирается минимальное из этих соотношений;
	3. Строку, где находится минимальное соотношение необходимо выделить горизонтальной стрелкой (разрешающая или ведущая строка);
	4. Элемент симплексной таблицы, стоящий на пересечении ведущих столбца и строки - ведущий элемент, который выделяется кружком.

Таблица 1.5.2

Пример симплекс таблицы с ведущим элементом

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | X |  |  | … |  | … |  |
|  |  |  |  | … |  | … |  |
|  |  |  |  | … |  | … |  |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
|  |  |  |  | … |  | … |  |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
|  |  |  |  | … |  | … |  |
| m+1 |  |  |  | … |  | … |  |

* 1. Если в индексной строке нет положительных элементов, то оптимальное решение найдено и оно находится в столбцах Б и Х.
	2. Если в ведущем столбце нет положительных элементов, то оптимального решения нет.
1. Построение нового опорного плана (переход к новому плану осуществляется в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана – Гаусса):
	1. В столбец Б записывается новый базис, т.е. переменная помеченная горизонтальной стрелкой
	 выходит из базиса и на её место записывается переменная
	, соответствующая ведущему столбцу;
	2. Заполняется строка, где находится ведущий элемент, а именно все элементы ведущей строки предыдущей симплексной таблицы необходимо разделить на ведущий элемент. В результате этого на месте ведущего элемента в новой симплекс таблице будет стоять 1, а в остальных клетках j столбца, включая клетку индексной строки, записываются нули;
	3. Все остальные новые элементы находятся по правилу прямоугольника:

, где

* НЭ – новый элемент;
* СТЭ – элемент старого плана;
* ВЭ – ведущий элемент
* А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.
1. Возвращаемся к 4 этапу алгоритма;
2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ
	1. Постановка задачи

Шоколадная фабрика «Bonbon» к празднику выпустила три новых вида шоколадных изделий. Суточные ресурсы фабрики:

* Производственного оборудования – 240 ед.
* Сырья - 280 ед.
* Труд - 120 ед.

Расход ресурсов, на единицу шоколадного изделия представлен в таблице 2.1.1.

Предполагаемая прибыль первого вида шоколадных изделий - 30 усл. ден. ед., второго - 42 усл. ден. ед., третьего – 36 усл. ден. ед.

Сколько нужно произвести шоколадных изделий каждого вида, чтобы прибыль от реализации оказалась наибольшей, и выпуск новой продукции оказался экономически выгоден фабрике.

Таблица 2.1.1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ресурсы | Шоколадные изделия | Суточные запасы |
| 1 | 2 | 3 |
| Оборудование | 7 | 4 | 5 | 240 |
| Сырье | 2 | 8 | 6 | 280 |
| Труд | 2 | 4 | 5 | 120 |
| Прибыль, за 1 шт. (усл. ден. ед.) | 30 | 42 | 36 |  |

* 1. Экономико-математическая модель

Переменные решения:

;

;

.

Целевая функция:

.

Система ограничений:

.

Канонический вид:

.

* 1. Решение по алгоритму симплекс-метода
1. Первый базис

.

1. Первая симплекс таблица

Таблица 2.3.1

Первая симплекс таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | X |  |  |  |  |  |  |
|  | 240 | 7 | 4 | 5 | 1 | 0 | 0 |
|  | 280 | 2 | 8 | 6 | 0 | 1 | 0 |
|  | 120 | 2 | 4 | 5 | 0 | 0 | 1 |
| m+1 | 0 | 30 | 42 | 36 | 0 | 0 | 0 |

1. Поиск ведущего элемента
* Максимальное положительное значение в индексной строке – 42,

- ведущий столбец;

* Минимальное соотношение -ведущая строка;
* Ведущий элемент – 4.

Таблица 2.3.2

Первая симплекс таблица с ведущим элементом

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | X |  |  |  |  |  |  |
|  | 240 | 7 | 4 | 5 | 1 | 0 | 0 |
|  | 280 | 2 | 8 | 6 | 0 | 1 | 0 |
|  | 120 | 2 | 4 | 5 | 0 | 0 | 1 |
| m+1 | 0 | 30 | 42 | 36 | 0 | 0 | 0 |

1. Пересчет таблицы:
* вместо в базис войдет переменная ;
* ведущая строка (вместо ведущего элемента записывается 1):
* столбцы переписываются без изменений;
* значения столбца записываются в столбец
* остальные элементы новой таблицы:

Таблица 2.3.3

Пример расчет новых элементов таблицы

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | X |  |  |  |  |  |  |
|  | СЭ |  | B |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | A |  | ВЭ |  |  |  |  |
| m+1 |  |  |  |  |  |  |  |

Таблица 2.3.4

Вторая симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | X |  |  |  |  |  |  |
|  | 120 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 |
|  | 40 | -2 | 0 | -4 | 0 | 1 | -2 |
|  | 30 | 0,5 | 1 | 1,25 | 0 | 0 | 0,25 |
| m+1 | -1260 | 9 | 0 | -16,5 | 0 | 0 | -10,5 |

1. В индексной строке есть положительный элемент – 9.
2. Пересчет таблицы:
* максимальное положительное значение в индексной строке – 9,

- ведущий столбец;

* минимальное соотношение - ведущая строка;
* ведущий элемент – 5.

Таблица 2.3.5

Вторая симплекс таблица с ведущим элементом

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | X |  |  |  |  |  |  |
|  | 120 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 |
|  | 40 | -2 | 0 | -4 | 0 | 1 | -2 |
|  | 30 | 0,5 | 1 | 1,25 | 0 | 0 | 0,25 |
| m+1 | -1260 | 9 | 0 | -16,5 | 0 | 0 | -10,5 |

* вместо в базис войдет переменная ;
* ведущая строка (вместо ведущего элемента записывается 1):
* столбцы переписываются без изменений;
* значения столбца записываются в столбец ;
* остальные элементы новой таблицы:

Таблица 2.3.6

Третья симплекс таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | X |  |  |  |  |  |  |
|  | 24 | 1 | 0 | 0 | 0,2 | 0 | -0,2 |
|  | 88 | 0 | 0 | -4 | 0 | 1 | -1,6 |
|  | 18 | 0 | 1 | 1,25 | 0 | 0 | 0,35 |
| m+1 | -1476 | 0 | 0 | -16,5 | 0 | 0 | -8,7 |

В индексной строке нет положительных элементов, значит оптимальное решение найдено и оно находится в столбцах Б и X

1476 условных денежных единиц.

Чтобы получить ежедневную максимальную прибыль от продажи новых видов шоколадных изделий, необходимо произвести 24 штуки первого шоколадного изделия и 18 штук второго.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализируя результаты, полученные с помощью моделирования задачи в программном продукте Microsoft Office Excel и решения ее симплекс-методом линейного программирования, можно сделать выводы, что фабрике «BonBon» экономически не выгоден выпуск третьего вида шоколадных изделий. При заданных условиях необходимо, чтобы прибыль от производства третьего вида шоколадных изделий была увеличена на 16,5 условных денежных единиц, это может быть осуществимо за счет повышения цены на него. Показатель о необходимом увеличении прибыли можно узнать, если сгенерировать «Отчет по устойчивости» после «поиска решения» в Microsoft Office Excel. Колонка «Нормированный градиент» покажет: когда шоколадное изделие входит в оптимальный план, то показатель будет 0. Если шоколадное изделие не входит в оптимальный план, в этой колонке стоит отрицательное число, показывающие на сколько (по абсолютной величине) нужно увеличить прибыль от производства единицы этого шоколадного изделия, чтобы он вошел в оптимальный план. Также, в ходе анализа полученных результатов, можно заметить что ежедневное количество используемых ресурсов сырья на фабрике на производство всех видов шоколадных изделий можно сократить, тем самым сократив затраты и увеличив прибыль.

Решение в ручную, подобных задач оптимизации симплекс-методом очень трудоемко, при большом объеме производства, то есть огромном количестве видов выпускаемой продукции. На сегодняшний день разработаны программные продукты, с помощью которых очень быстро и легко можно рассчитать план оптимизации производства, необходимо ввести начальные условия и получить результат, программа рассчитает всё сама.

Решение подобной задачи в Microsoft Office Excel, тоже не является идеальным вариантом, для тех, кто не является опытным пользователем или знатоком выбранного программного продукта, поскольку решение подразумевает не только ввод собственных данных, но и организацию этих данных. Необходимы некоторые навыки работы с этим пакетом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ашманов С.А. Линейное программирование. М.: Наука, 1981. 304 с.
2. Барсов А.С. Что такое линейное программирование. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 104с.
3. Диязитдинова А.Р. Курс лекций. Самара: 2005.
4. Зайченко Ю.П. Исследование операций
5. Костюкова О.И. Исследование операций. Мн: БГУИР, 2003. 94 с.