Министерство образования Российской федерации
Воронежский государственный университет

Специальный курс
«Исследование операций»
Часть 1. Математическая модель операции

пособие для студентов по специальностям 010100

Воронеж
2003

Утверждено научно-методическим советом математического факультета
2 сентября 2002 года
Протокол № 2

Составители: Михайлова И.В.

Пособие подготовлено на кафедре уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета

Рекомендуется для студентов 4-5 курсов всех форм обучения

ВВЕДЕНИЕ

Вся история человеческого общества неразрывно связана с поисками наиболее рациональных форм деятельности, с поиском правильных решений, принимаемых в различных конкретных ситуациях. Разумеется, ситуации эти на разных этапах истории (от человека каменного века до нашего современника) были различными.

Несмотря на колоссальную разницу между задачами, связанными с поиском правильных решений, можно все же указать общую черту, которой все они обладают, - это задачи о рациональных способах организации целенаправленной человеческой деятельности. Изучением таких задач, отысканием методов их решения и занимается наука, получившая название ***«ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»*** (ИСО). Термин «исследование операций» имеет многочисленные синонимы: в Англии более употребительным является выражение «операционные исследования», американцы часто используют термин «наука об управлении» и т.д.

Термин «исследование операций» возник во время второй мировой войны. Тогда он полностью соответствовал содержанию предмета. Однако зачатки научного мышления, характерного для операционных исследований, появились гораздо раньше: некоторые примитивные модели математического программирования, предложенные экономистами Куинси (1759 г.) и Вальрасом (1874 г.), задача Тейлора о землекопе (1885 г.), результаты, полученные в области динамического программирования Марковым (1856-1922 г.г.), исследования Эрланга по управлению работой автоматических телефонных станций, математический аппарат для решения некоторых задач экономики, предложенный Канторовичем (1938 г.) и т.д. Однако эти исследования оставались долгое время разрозненными, пока не были подхвачены общим потоком разработок, начало которого положили работы, проведенные во время второй мировой войны. Наиболее важным для будущего было то, что многие из специалистов увидели в таких научных разработках военного времени зарождение новой научной дисциплины, а также возможности использования соответствующих научных знаний для многих видов деятельности в мирное время.

Становление ИСО как научной дисциплины относится к 1952 г. и связывается с организацией Американского общества по ИСО.

Под ***ОПЕРАЦИЕЙ*** мы будем понимать совокупность действий, мероприятий, объединенных единым замыслом и направленных на достижение определенной ***ЦЕЛИ.*** Пока не задана цель, не существует операции. Может быть несколько операций, направленных на достижение некоторой цели, но в данной операции цель единственна. В качестве примера рассмотрим работу некоторого промышленного предприятия. Цель – выполнение заказа. На достижение этой цели может быть направлено несколько операций: замена оборудования, пополнение запасов сырья и т.д.

§ 1. Основные компоненты операции

Участники операции (отдельные лица, коллективы, автоматы) могут быть условно разделены на три части: ***ОПЕРИРУЮЩАЯ СТОРОНА, НЕЙТРАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ*** и ***ПРОТИВНИК***.

Оперирующая сторона (ОС) – совокупность участников операции, которые стремятся в данной операции к достижению поставленной цели.

В качестве примера можно рассмотреть спортивное состязание от лица одной из команд (будем говорить «наша» команда): цель – выиграть; ОС – «наша» команда, «наш» тренер и «наши» болельщики; нейтральные элементы – судьи; противник – команда противника, тренер команды противников, болельщики противника.

Члены ОС неодинаково участвуют в проведении операции. Среди них можно выделить ***ИССЛЕДОВАТЕЛЯ ОПЕРАЦИИ*** (ИО), который проводит исследование по отысканию наилучших (в определенном смысле) для ОС способов действий. Несмотря на принадлежность ИО к ОС, он занимает в ней особое место в силу следующих причин:

1) как правило, ИО ***во время исследований*** располагает меньшей информацией об операции, чем ОС к моменту проведения операции;

2) ИО не принимает окончательных решений. Он только предлагает ОС наилучшие для нее способы действий, полученные в результате объективного и осторожного (см. § 2) исследования в рамках модели, предложенной исследователю.

АКТИВНЫМИ СРЕДСТВАМИ будем называть совокупность материальных, энергетических, денежных и других ресурсов, а также организационных возможностей, используемых ОС для достижения цели.

Результаты проведения операции зависят при данном количестве активных средств от ФАКТОРОВ, которые можно разделить на ***КОНТРОЛИРУЕМЫЕ*** (КФ) и ***НЕКОНТРОЛИРУЕМЫЕ*** (НКФ).

КФ – способы использования активных средств, способы действий ОС, иными словами ***СТРАТЕГИИ*** ОС (СОС), влияющие определенным образом на ход операции, в противном случае операция перестает быть управляемой, а ОС становится пассивным наблюдателем. Значение КФактора обозначим x, а множество возможных значений КФактора - M_0, т.е. $x \in M_0$. Заметим, что M_0, вообще говоря, может быть множеством произвольной природы.

НКФ могут быть классифицированы несколькими способами: по причинам появления и по степени информированности ОС о НКФакторам.

Согласно первой классификации, НКФакторы появляются за счет наличия независимо от ОС действующих людей или автоматов, не преследующих цель ОС (НКФ такого типа можно условно назвать ***СТРАТЕГИЯМИ ПРОТИВНИКА***);

за счет влияния метеорологических условий, недостаточной изученности каких-либо процессов (такие факторы условно будем называть ПРИРОДНЫМИ). Так, в сельском хозяйстве НКФактором является метеорологическая обстановка.

Наиболее яркие примеры НКФакторов первого типа дают военные действия и спорт.

Вторая возможная классификация приводит к появлению

НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ФАКТОРОВ – НФ: ИО известно лишь множество значений N этого фактора; значение НФактора будем обозначать y, т.е. $y \in N$, причем N может быть множеством произвольной природы;

СЛУЧАЙНЫХ ФАКТОРОВ – СФ: СФ – это случайная величина Z, значения которой $z \in Z_0$, а функция распределения вероятностей $F \in \mathbf{F}$ (множества Z_0 и $\mathbf{F}$ известны ОС и ИО).

Для определения эффективности проведения данной операции вводится функция, называемая ***КРИТЕРИЕМ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОПЕРАЦИИ*** (КЭО). Другими словами, КЭО операции есть показатель соответствия между результатом предпринимаемых действий и целью операции. Формально КЭО, обозначаемый W, есть отображение прямого произведения $M_0 \times N \times Z_0$ в множество действительных чисел $\left(W: M_0 \times N \times Z_0 \to R\right)$. Значение функции $W\left(x, y, z\right)$ при фиксированной ситуации $\left(x, y, z\right) \in M_0 \times N \times Z_0$ позволяет судить, насколько хорошо или плохо была проведена данная операция в ситуации $\left(x, y, z\right)$.

Построение ***МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОПЕРАЦИИ*** означает построении функции W.

Решение задачи $\max\left(\min\right)$ в определенном смысле (см. § 4) функции W является математическим эквивалентом стремления достигнуть поставленную цель.

§ 2. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СТРАТЕГИЙ ОС при отсутствии дополнительной информации о значении НКФакторах

2.1. Рассмотрим сначала самый простой случай: в операции есть только КФ со значениями $x \in M_0$, СОС есть $x \in M_0$ и КЭО $W = W(x)$. Для такой простой модели естественными будут следующие определения.

ОЦЕНКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ стратегии x назовем $W(x)$ значение КЭО в точке $x \in M_0$. Стратегию x^0 естественно считать ***ОПТИМАЛЬНОЙ***, если

$$W\left(x^0\right) = \max_{x \in M_0} W(x) \quad \text{или} \quad W\left(x^0\right) = \min_{x \in M_0} W(x) \quad .$$

<u>Задачи:</u>

№ 2.1.1. На обувной фабрике можно производить три вида обуви: мужскую, женскую и детскую. На каждую пару мужской, женской и детской обуви соответственно требуется клея – 20, 20 и 10 г, кожи – 4, 2 и 1 дм^2. Стоимость мужской, женской и детской обуви с учетом всех работ соответственно равна 20, 30 и 10 денежных единиц. Запасы клея составляют 3 т, а кожи – 4000 м^2. Рассмотреть следующие две операции. В первой операции все имеющиеся ресурсы используются полностью, а во второй последнее требование не является обязательным. В обеих операциях цель состоит в выборе такого производства обуви, при котором стоимость выпущенной продукции является максимальной. Построить модель операции.

А) Найти оптимальные стратегии в обеих операциях и сравнить наилучшие результаты.

Б) Предположим, что детская обувь не выпускается совсем. Найти необходимое и достаточное условие на количества ресурсов, при котором во второй операции оптимальное производство не использует всех ресурсов.

№ 2.1.2. В приемной в ожидании личной встречи с директором собралось n посетителей. Предварительный опрос позволил выяснить, что рассмотрению вопроса i-го посетителя директор должен уделить время T_i , $i=1,...,n$. Директор, зная , что хотя общее (суммарное) время, которое он уделит всем посетителям, одно и то же, $T=\sum_{i=1}^{n}T_i$ (независимо от очередности их приема), хотел бы так организовать прием, чтобы посетители находились в приемной в целом как можно меньше. Какова должна быть очередность приема?

№ 2.1.3. Имеется начальное количество средств K_0, которое нужно распределять в течение m лет между двумя отраслями производства 1 и 2. Средства, вложенные в i-ю отрасль, приносят доход $f_i(x)$, однако уменьшаются при этом до $g_i(x)<x$. По истечении года оставшиеся от K_0 средства заново распределяются между отраслями. Новых средств извне не поступает, и в производство вкладываются все оставшиеся в наличии средства; доход не вкладывается, а накапливается отдельно.

Требуется найти способ управления ресурсами, при котором суммарный доход от обеих отраслей за m лет будет максимальным.

Решить задачу в случаях:

а) $K_0=10$; $m=5$; $f_1(x)=x^2$; $g_1(x)=0,75x$; $f_2(x)=2x^2$; $g_2(x)=0,3x$;

б) $K_0=2$; $m=5$; $f_1(x)=1-e^{-x}$; $g_1(x)=0,75x$; $f_2(x)=1-e^{-2x}$; $g_2(x)=0,3x$.

В общем случае значение КЭО при фиксированной СОС есть функция от значений НКФ. Поэтому предыдущее определение не может быть использовано при оценке качества произвольной стратегии. Желательно эффективность стратегии характеризовать одним числом.

Есть несколько способов построения оценок эффективности стратегий. Мы рассмотрим тот, который основывается на ***ПРИНЦИПЕ ГАРАНТИРОВАННОГО РЕЗУЛЬТАТА***, а именно, в своих исследованиях ИО ориентируется на наихудшее для ОС значения НКФ.

2.2. Рассмотрим операцию, компоненты которой КФ $x \in M_0$, СОС $x \in M_0$, СФ Z с множеством значений Z_0 и функцией распределения вероятностей $F \in \mathbf{F}$. Тогда КЭО $W = W(x, z)$.

Пусть ОС разрешает ИО осреднять критерий, что означает фактически переход к другому критерию $\overline{W}_F(x) = M_F\left(W(x, Z)\right)$, который является математическим ожиданием случайной величины $W(x, Z)$ относительно распределения F, если математическое ожидание существует. Тогда ***ОЦЕНКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ*** стратегии x называется число

$$\underline{\overline{W}}(x) = \inf_{F \in \mathbf{F}} M_F\left(W(x, Z)\right) = \inf_{F \in \mathbf{F}} \int_{Z_0} W(x, z) dF(z),$$

если решается задача на максимуме и, в противном случае

$$\underline{\overline{W}}(x) = \sup_{F \in \mathbf{F}} M_F\left(W(x, Z)\right) = \sup_{F \in \mathbf{F}} \int_{Z_0} W(x, z) dF(z) .$$

В силу закона больших чисел такой переход к осредненному критерию оправдан в случае многократного проведения данной операции при неизменном комплексе условий.

Если же ОС не разрешает осреднять критерий, то единственное, что остается ИО, это оценить эффективность стратегии следующим образом

$$\underline{W}(x) = \inf_{z \in Z_0} W(x, z) \quad \text{или} \quad \underline{W}(x) = \sup_{z \in Z_0} W(x, z),$$

что крайне неразумно. Фактически мы получаем оценку, которая совсем не учитывает информацию о распределении СФ Z.

Оценка эффективности неосредненного критерия может быть все-таки полезной, например, при однократном проведении операции или в случае равномерного распределения на заданном отрезке для СФ.

<u>Задачи:</u>

№ 2.2.1. Межотраслевое объединение ведет строительство автомобильного завода. Предстоит выполнить следующие основные работы:

A. строительство заводских корпусов;
B. завершение разработки модели нового автомобиля;
C. наем рабочей силы;
E. отладка модели автомобиля.

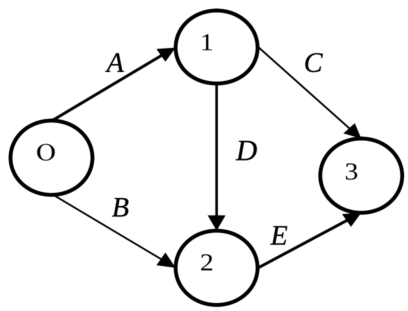

Рис. 1

Очередность выполнения работ задана сетевым графиком (рис. 1).

Пусть $t_A = 2$ и $t_D = 1$ - время выполнения работ A и D, а для остальных работ времена их выполнения точно неизвестны и являются независимыми случайными величинами. При этом t_B и t_C принимают значения 2, 3, 4 с вероятностями $1/3$, а t_E принимает значения 1, 2, 3 с вероятностями $1/3$. Ниже приведена зависимость дополнительной прибыли объединения от времени выполнения всего комплекса работ:

Время выполнения всего комплекса работ	3	4	5	6	7
Дополнительная прибыль объединения (в тыс.руб.)	120	110	100	50	0

В распоряжении объединения имеется резерв, ввод которого ускоряет все строительство завода на одну единицу времени, но потребует дополнительных расходов в 20 тыс. руб.

Следует ли использовать резерв, если целью объединения является увеличение по мере возможности чистой дополнительной прибыли (т.е. дополнительной прибыли за вычетом расходов в случае использования резерва)? Составить модель операций. Критерий эффективности записать с помощью матрицы. Осреднить полученный критерий и ответить на вопрос о целесообразности ввода резерва.

№ 2.2.2. Склад имеет форму треугольника G с вершинами A_j, $j = 1, 2, 3$. Грабитель может проникнуть на склад только в точках A_j с вероятностями p_j, относительно которых лишь известно, что $p_j' \le p_j \le p_j''$, $j = 1, 2, 3$. Цель операции – «наилучшим» образом установить сторожевую вышку на территории склада, чтобы обнаружить грабителя в момент проникновения на склад. Известно, что вероятность необнаружения грабителя пропорциональна квадрату расстояния до грабителя. Составить модель операции. Найти оценку эффективности произвольной стратегии, если

а) $p_j' = 0$, $p_j'' = 1$, $j = 1, 2, 3$;

б) $p_j' = 0$, $p_j'' = \dfrac{1}{2}$, $j = 1, 2, 3$;

в) $p_1' = p_1'' = p_2'' = p_3'' = \dfrac{1}{2}$, $p_2' = p_3' = 0$.

№ 2.2.3. В автомобильном туннеле скорость движения машин n не превосходит 50 км/ч и связана с плотностью потока (количеством машин на километр дороги) P следующим эмпирическим соотношением

$$P = \frac{60 - n}{Z},$$

где Z - случайная величина, которая в любой момент определяется соотношением легковых и грузовых машин, проходящих через туннель. Известно, что величина z равномерно распределена на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$. Регулировка движения в туннеле производится путем выбора скорости движения n. Цель операции состоит в увеличении потока машин Π, т.е. количества машин, выходящих из туннеля за час.

Составить модель операции. Найти оценку эффективности произвольной стратегии в каждом из следующих предположений:

а) оперирующая сторона разрешает осреднение критерия;

б) оперирующая сторона не разрешает осреднение критерия.

Найти скорость движения машин, при которой поток Π будет максимальным.

№ 2.2.4. Продавец газет покупает k газет для продажи и за каждую проданную газету получает прибыль, равную a. Непроданные газеты он возвращает, но при этом терпит убыток, равный b, на каждой непроданной газете. Спрос, т.е. количество z людей, покупающих газеты, является неконтролируемым фактором, принимающим значения на отрезке $[a, b]$, где a, b - известные натуральные числа. Цель газетчика – так выбрать число газет k для продажи, чтобы по мере возможности увеличить прибыль от продажи. Составить модель операции. Найти оценку эффективности произвольной стратегии и оптимальную стратегию, если спрос Z является случайной величиной с известным математическим ожиданием m и дисперсией $D > 0$.

2.3. Предположим теперь, что в рассматриваемой операции нет СФ, но есть НФ $y \in N$. Тогда ***ОЦЕНКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ*** стратегии x назовем число

$$\underline{W}(x) = \inf_{y \in N} W(x, y) \quad \text{или} \quad \underline{W}(x) = \sup_{y \in N} W(x, y) .$$

<u>Задачи:</u>

№ 2.3.1. Спелеолог продвигается из точки C_1 в точку C_2 по пещере, имеющей следующую форму (рис. 2).

Здесь C_i, $i = 1, 2, 3$ - выходы из пещеры, D - точка разветвления, $C_1D = 3$ км, $C_1C_2 = 8$ км, $DC_3 = 2{,}5$ км. В некоторый момент времени t_0 спелеолог повредил себе ногу и, начиная с этого момента, его цель состоит в том, чтобы как можно быстрее выйти из пещеры, выбирая

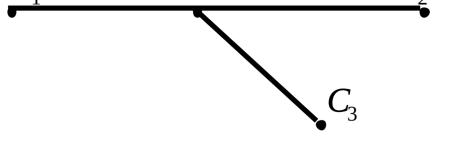

Рис. 2

любой из выходов. Предполагается, что спелеолог при желании может измерять расстояние, пройденное по пещере. Положение спелеолога в момент t_0 на отрезке $[C_1, C_2]$ характеризуется расстоянием y, пройденным от C_1. Составить модель операции в следующих вариантах информированности спелеолога об y:

а) известно, что $3{,}5 \le y \le 5$;

б) известно, что $2 \le y \le 4$, но спелеолог не помнит, проходил ли он точку D.

№ 2.3.2. Город имеет форму круга G радиуса R. Будем предполагать, что из любой точки города можно проехать на машине в любую другую точку по прямой линии и что машины движутся по городу с постоянной скоростью. Решается вопрос о размещении в городе трех пожарных частей. Нужно так выбрать точки расположения пожарных частей, чтобы до возникшего в точке y пожара можно скорее всего добраться. Составить модель операции. Найти оценку эффективности произвольной стратегии.

§ 3. Общее определение стратегии ОС

Как уже отмечалось ранее, ОС может располагать к моменту проведения операции дополнительной информацией. Эту дополнительную информацию принято называть ***ИНФОРМАЦИОННОЙ ГИПОТЕЗОЙ***. Формально информационная гипотеза задается с помощью ***ИНФОРМАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ*** $R: N \times Z_0 \to R^k$, $k = 1, 2, ...$

Вид информационной функции R должен быть обязательно сообщен ИО к моменту исследования. К моменту же проведения операции станет известным ОС значение функции $R(y,z)$.

В зависимости от информированности ОС о значениях НКФ принято выделять следующие типы информационной функции R:

а) **<u>Полная информированность ОС</u>**, то есть ОС к началу проведения операции будут сообщены значения всех присутствующих в операции НКФ. В этом случае информационная функция является тождественной $\overset{\mathbf{I}}{R}(y,z) = (y,z)$, $(y,z) \in N \times Z_0$.

в) **<u>Отсутствие информации</u>** о значении НКФ. Тогда информационная функция тождественная равна некоторой константе $R_0(y,z) \equiv C$, $(y,z) \in N \times Z_0$.

с) Частичная информированность ОС о значении НКФ, задаваемая некоторой функцией $R = R(y,z)$.

<u>*Пример.*</u> Рассмотрим некоторую операцию, в которой из НКФ есть НФ (стратегия противника) $y = (y_1, y_2, y_3)$, где y_i - количество самолетов i-го типа, участвующих в операции, $i = \overline{1,3}$.

а) $\bar{R}(y)=y$, то есть к началу операции разведка сообщит ОС количество самолетов каждого из трех типов, участвующих в операции.

в) $R_0(y)\equiv 0$. Это означает, что никаких дополнительных сведений о количестве самолетов противника к началу операции не ожидается.

с) $R_1(y)=\sum_{i=1}^{3} y_i$. Другими словами, к началу операции будет известна только общая численность самолетов противника. Если же $R_2(y)=y_1$, то соответствующая информационная гипотеза такая: к началу операции будет точно известно только количество самолетов первого типа.

Информационная гипотеза используется ИО при выборе поведения для ОС, что и отражено в общем понятии стратегии.

СТРАТЕГИЕЙ ОПЕРИРУЮЩЕЙ СТОРОНЫ (СОС) с точки зрения ИО является правило поведения (другими словами способ действия или способ использования активных средств), разрешенное информационной гипотезой (ожидающейся информацией). Дадим теперь формальное описание СОС.

Рассмотрим операцию с информационной гипотезой, задаваемой некоторой функцией $R=R(y,z)$. СОС будем называть такое отображение $\tilde{x}$ множества $N\times Z_0$ (возможных значений НКФ) в множестве M_0 (возможных способов действий ОС), то есть $\tilde{x}:N\times Z_0\to M_0$, что из условия $R(y_1,z_1)=R(y_2,z_2)$ следует, что $\tilde{x}(y_1,z_1)=\tilde{x}(y_2,z_2)$. Другими словами, те значения НКФ, которые не различает информационная гипотеза, не должны быть различимы и в предлагаемом исследователем способе поведения ОС.

Для случаев а) , в) и с) , рассмотренных выше, возможны следующие множества стратегий.

а) $\bar{R}(y,z)=(y,z)$. Тогда множество возможных стратегий

$$\bar{M}=\left\{\tilde{x}:N\times Z_0\to M_0\right\}$$

есть множество всех возможных отображений $N\times Z_0$ в M_0.

в) $R_0(y,z)\equiv C$. В таком случае множество возможных СОС

$$\bar{M}_0=\left\{\tilde{x}:\tilde{x}\in\bar{M}\ ,\ \tilde{x}(y,z)\equiv x\in M_0\right\}$$

есть множество **СТРАТЕГИЙ-КОНСТАНТ**. Эти стратегии мы обсуждали и в § 1-2.

с) $R=R(y,z)$ - некоторая функция, отличная от $\bar{R}$ и R_0. В этом случае множество возможных СОС есть

$$\bar{M}_R=\left\{\tilde{x}:\tilde{x}\in\bar{M}\ ;\ R(y_1,z_1)=R(y_2,z_2)\Rightarrow\tilde{x}(y_1,z_1)=\tilde{x}(y_2,z_2)\right\}.$$

Очевидно, что $\bar{M}_0\subset\bar{M}_R\subset\bar{M}$.

Пример. Рассмотрим операцию, в которой ОС располагает двумя «самолетами», а «противник» тремя «зенитками». В операции участвуют один «самолет» и одна «зенитка». Построить множество СОС в случаях а), в) и с).

Выделим сначала основные компоненты операции.

КФ – участвующий в операции «самолет»; значение КФ x - номер этого «самолета» и $x \in M_0 = \{1, 2\}$.

НФ – «зенитка», участвующая в операции; значение НФ y - номер этой «зенитки» и $y \in N = \{1, 2, 3\}$.

СОС - $\tilde{x}: N \to M_0$ или $\tilde{x} = \tilde{x}(y)$. Заметим, что $\tilde{x}(y)$ есть номер «самолета» в зависимости от номера «зенитки», участвующей в операции.

а) $\vec{R}(y) = y$. Множество возможных СОС $\vec{M}$ состоит, очевидно, из восьми стратегий. Выпишите все эти стратегии.

в) $R_0(y) \equiv 0$. Тогда $\vec{M}_0 = \left\{ \vec{x}_1(y) \equiv 1\ ,\ \vec{x}_2(y) \equiv 2 \right\}$.

с) Пусть

$$R(y) = \begin{cases} 0\ , & y = 1,3 \\ 1\ , & y = 2 \end{cases}.$$

То есть «зенитки» с нечетными номерами не могут быть различимы разведкой ОС. Тогда ИО не может уже рекомендовать ОС такой способ действия, как

$$\tilde{x}(y) = \begin{cases} 1\ , & y = 1,2 \\ 2\ , & y = 3 \end{cases},$$

который при использовании «противником» «зенитки» с номером *один* предлагает выпустить «самолет» *один*, а в случае использования «противником» *третьей* зенитки – *второй* «самолет».

Поэтому

$$\vec{M}_R = \left\{ \vec{x}_1\ ,\ \vec{x}_2\ ,\ \vec{x}_3\ ,\ \vec{x}_4 \right\},$$

где

$$\vec{x}_3(y) = \begin{cases} 1\ , & y = 1,3 \\ 2\ , & y = 2 \end{cases}; \quad \vec{x}_4(y) = \begin{cases} 2\ , & y = 1,3 \\ 1\ , & y = 2 \end{cases}.$$

§ 4.ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СТРАТЕГИЙ ОС при наличии дополнительной информации о значении НКфакторов

4.1. Рассмотрим операцию, компоненты которой КФ $x \in M_0$, НФ $y \in N$, КЭО $W = W(x, y)$, СОС $\tilde{x} = \tilde{x}(y)$, где M одно из трех возможных множеств стратегий $\vec{M}_0, \vec{M}_R, \vec{M}$. Тогда **ОЦЕНКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ** СОС $\tilde{x}$ назовем число

$$\underline{W}\left(\tilde{x}\right)=\inf_{y\in N}W\left(\tilde{x}(y),y\right)\ . \qquad (1)$$

Очевидно, что $\underline{W}\left(\tilde{x}\right)$ будет получено в результате операции, если ОС использует стратегию $\tilde{x}$ и находится в самой худшей для себя ситуации. А именно: противнику известны СОС $\tilde{x}$ и он преследует цель, противоположную цели ОС (если цель противника противоположна цели ОС, то есть КЭО для противника есть - W, то он будет стремиться уменьшить величину критерия W, а если ему известна еще СОС $\tilde{x}$, то он, естественно, выберет y таким, чтобы реализовать (1) или подойти достаточно близко к этой величине).

Если противник имеет непротивоположную цель, выражаемую критерием $W_1(x,y)$, и ИО известен этот критерий, то ОС, сообщая противнику свою стратегию и уточняя соответствующим образом множество значений НФ, может улучшить оценку (1).

Так, если ИО известно, то противник знает СОС $\tilde{x}$, то он может исходить из того, что противник, стремясь максимизировать функцию W_1, выберет y_1 таким образом, чтобы

$$W_1\left(\tilde{x}\left(y_1\right),y_1\right)=\max_{y\in N}W_1\left(\tilde{x}\left(y\right),y\right)\ . \qquad (2)$$

Поскольку ИО неизвестны мотивы выбора y_1 из всех реализующих максимум (2), то оставаясь на позициях гарантированного результата, за оценку эффективности стратегии $\tilde{x}$ он должен принять

$$\underline{\underline{W}}\left(\tilde{x}\right)=\inf_{y_1\in N\left(\tilde{x}\right)}W\left(\tilde{x}\left(y_1\right),y_1\right),$$

где

$$N\left(\tilde{x}\right)=\left\{y_1:W_1\left(\tilde{x}\left(y_1\right),y_1\right)=\max_{y\in N}W_1\left(\tilde{x}\left(y\right),y\right)\right\}.$$

Так как $N\left(\tilde{x}\right)\subset N$, то для любой СОС $\tilde{x}\in M$,

$$\underline{\underline{W}}\left(\tilde{x}\right)\geq\underline{W}\left(\tilde{x}\right).$$

Другими словами, если цель противника не противоположна цели ОС, то ОС выгоднее сообщить свою стратегию, иначе даже общность целей может быть ничуть не лучше, чем их противоположность.

Стратегию $\overset{!}{x}{}^0=\overset{!}{x}{}^0(y)$ назовем **ОПТИМАЛЬНОЙ** в множестве стратегий M , если

$$\underline{W}\left(\overset{!}{x}{}^0\right)=\max_{\tilde{x}\in M}\underline{W}\left(\tilde{x}\right).$$

Число

$$W_\Gamma(M)=\sup_{\tilde{x}\in M}\underline{W}\left(\tilde{x}\right)=\sup_{\tilde{x}\in M}\inf_{y\in N}W\left(\tilde{x}\left(y\right),y\right)$$

принято называть **НАИЛУЧШИМ ГАРАНТИРОВАННЫМ РЕЗУЛЬТАТОМ.**

4.2. Предположим теперь, что в рассматриваемой операции нет НФакторов, но есть СФ Z - случайная величина со значениями $z\in Z_0$ и функцией распределения вероятностей $F\in \mathbf{F}$. Тогда КЭО $W=W(x,z)$ и СОС $\tilde{x}=\tilde{x}(z)\in M$.

Пусть ОС разрешает ИО осреднять критерий, то есть разрешает ИО переход к другому критерию $\overline{W}\left(\tilde{x}\right)=M\left[W\left(\tilde{x}(Z),Z\right)\right]$, который является математическим ожиданием случайной величины $W\left(\tilde{x}(Z),Z\right)$. Тогда **ОЦЕНКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ** стратегии $\tilde{x}(z)$ называется число

$$\underline{W}\left(\tilde{x}\right)=\inf_{F\in\mathbf{F}} M\left[W\left(\tilde{x}(Z),Z\right)\right]=\inf_{F\in\mathbf{F}}\int_{Z_0} W\left(\tilde{x}(z),z\right)dF(z).$$

4.3. Рассмотрим теперь общий случай, а именно операцию, в которой присутствуют все факторы. Пусть КФ : $x\in M_0$; НФ : $y\in N$; СФ : Z- случайная величина со значениями $z\in Z_0$ и функцией распределения $F\in\mathbf{F}$; КЭО : $W=W(x,y,z)$; СОС : $\tilde{x}=\tilde{x}(y,z)\in M$. Предположим, что ОС разрешает ИО осреднять критерий. Тогда **ОЦЕНКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ** СОС назовем число

$$\underline{W}\left(\tilde{x}\right)=\inf_{F\in\mathbf{F}}\int_{Z_0} W\left(\tilde{x}(y,z),y,z\right)dF(z),$$

если НФ y не зависит от реализации z случайной величины Z. Например, y - стратегия противника не зависит от ошибки разведки ОС - Z. Если же y зависит от реализации z СФактора Z, то оценкой будет число

$$\underline{W}\left(\tilde{x}\right)=\int_{Z_0}\ \inf_{F\in\mathbf{F}}\int_{y\in N} W\left(\tilde{x}(y,z),y,z\right)dF(z).$$

Задачи:

№ 4.1. Пусть $x\in M_0=\{1,2,3,4\}$, $y\in N=\{1,2,3\}$ и

$$\left(W(x,y)\right)=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ -3 & 2 & 3\\ 4 & 3 & -8\end{pmatrix}.$$

Найти оценки эффективности стратегий $\vec{x}_1=(1,1,1)$, если

а) y - неопределенный фактор;

б) Y - случайный фактор, N - множество возможных значений СФ и распределение вероятностей $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$.

№ 4.2. Пусть $x \in M_0 = [-1;1]$; y - стратегия противника, имеющего интересы, противоположные интересам оперирующей стороны, $y \in N = [-1,1]$; Z - случайная величина, значения которой $z \in Z_0 = [-1,1]$. Найти оценки эффективности стратегий $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$, где

$$\tilde{x}_1(y,z) = yz$$

$$\tilde{x}_2(y,z) = \begin{cases} 1, & z \le 0,\ y \le 0 \ \textit{или} \ z \ge 0,\ y \ge 0 \\ -1, & \textit{в других случаях} \end{cases}$$

если

а) противник не знает реализации z;

б) противник знает реализацию z.

Решить задачу, считая

1) Z - случайная величина с плотностью распределения вероятностей $f(z) = (1-|z|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(z)$, $z \in R$;

2)

Z_0	$-0,5$	$0,5$	$p_1 \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$
P	p_1	p_2	

3)

Z_0	z_1	z_2	$z_1, z_2 \in [-1,1]$
P	$0,5$	$0,5$	

4) $$f(z) = \begin{cases} q\ , & |z| \le \dfrac{1}{2q} \\ 0\ , & \dfrac{1}{2q} < |z| \le 1,\ q \ge \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

№ 4.3.

$$W(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = 4y_1x_1z_1\left(y_1 + x_1^2x_2^2\right) +$$
$$+4y_2x_2z_2\left(y_2 + z_1^2x_2^2\right),\ (x_1, x_2) \in M_0 = [-1,1]\times[-1,1]\ ;$$

y_1, y_2 - стратегии первого и второго противников, интересы которых неизвестны, $-1 \le y_i \le 1$, $i = 1,2$; z_1, z_2 - две независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[-1,1]$. Найти оценку эффективности стратегии оперирующей стороны $\tilde{x} : \tilde{x}(z_1, z_2) = (z_1, z_2)$, если:

а) противники не знают реализаций z_1 и z_2 ;

в) второй противник знает реализацию z_2, но не z_1, а первый не знает реализаций z_1 и z_2 ;

c) второй противник знает реализацию z_1, но не z_2, а первый не знает реализаций z_1 и z_2 ;

d) второй противник знает реализации z_1 и z_2, а первый эти реализации не знает;

e) второй противник знает реализации z_1 и z_2, а первый знает реализацию z_2, но не z_1;

f) второй противник знает реализации z_1 и z_2, а первый знает реализацию z_1, но не z_2;

g) оба противника знают реализации z_1 и z_2.

№ 4.4.

$$\left(W\left(x,y\right)\right)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3\\ 5 & -1 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 5 & -2 & -2 & 3 & 4 & -3\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}x\in M_0=\{1,2,3\}\\ y\in N=\{1,2,3,4,5,6\}\end{matrix},$$

y - стратегия противника, знающего стратегию оперирующей стороны. Найти оценки эффективности стратегий $\overset{!}{x}_1=\left(1,2,2,3,3,3\right)$, $\overset{!}{x}_2=\left(2,1,2,1,3,2\right)$, если

а) интересы противника заданы матрицей

$$\left(W_1\left(x,y\right)\right)=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3 & 4 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3{,}5\\ 5 & 3 & -5 & 2 & -1 & -2\end{pmatrix},$$

в) интересы противника заданы матрицей с элементами $W_n(x,y)$, относительно которых известно лишь, что $W_1(x,y)\le W_n(x,y)\le W_2(x,y)$ при всех $x\in M_0$, $y\in N$, где $W_1(x,y)$ - элементы матрицы из п.а) , а $W_2(x,y)$ - элементы матрицы

$$\left(W_2\left(x,y\right)\right)=\begin{pmatrix}3 & 4 & 4 & 5 & 3 & 4\\ 5 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4{,}5\\ 6 & 4 & -4 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

с) интересы противника заданы либо матрицей $W_1(x,y)$ из п. а), либо матрицей

$$\left(W_3\left(x,y\right)\right)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

d) интересы противника с вероятностью $1/2$ описываются матрицей $W_1(x,y)$ и с вероятностью $1/2$ - матрицей $W_3(x,y)$.

§ 5. Смешанные стратегии

Рассмотрим операцию, в которой есть КФ $x \in M_0$, НФ $y \in N$, КЭО $W = W(x, y)$.

Напомним, что в случае отсутствия дополнительной информации о значении НФ возможными могут быть только стратегии-константы $\tilde{x} \in \vec{M}_0$ $\left(\tilde{x} \equiv x \in M_0\right)$. Ясно, что $\tilde{x} \equiv x$ является простейшей стратегией. Поэтому недопустимо получать результат худший, чем может дать $\vec{M}_0$, худший, чем $W_\Gamma\left(\vec{M}_0\right)$. Другими словами результат проведения операции в условиях наименьшей возможной информированности должен быть наименьшим. Действительно, для любого $M \supset \vec{M}_0$

$$W_\Gamma\left(\vec{M}_0\right) = \sup_{\tilde{x} \in \vec{M}_0} \underline{W}\left(\tilde{x}\right) \le W_\Gamma(M) = \sup_{x \in M} \underline{W}(x) .$$

Это и есть математическое выражение принципа роста результата с ростом информированности ОС.

Это и есть математическое выражение принципа роста результата с ростом информированности ОС.

Вышесказанное означает, что первой и необходимой задачей при исследовании конкретной операции является задача нахождения оптимальной стратегии $\vec{x}^0$ в $\vec{M}^0$ и числа

$$W_\Gamma\left(\vec{M}_0\right) = \sup_{x \in M_0} \inf_{y \in N} W(x, y) ,$$

называемого часто максимином операции.

Вслед за этим возникает вопрос, нельзя ли улучшить ожидаемый результат по сравнению с $W_\Gamma\left(\vec{M}_0\right)$, не используя конкретную информацию о НФ. Одна из возможностей заключена в применении смешанных стратегий, приводящих к искусственному введению случайности на множестве стратегий-констант $\vec{M}_0$ или все равно, что на множестве M_0 (иначе называемому рандомизацией стратегий).

СМЕШАННОЙ СТРАТЕГИЕЙ ОС будем называть распределение вероятностей j на множестве M_0 (j - вероятностная мера на M_0).

Следует не забывать о принципиальном отличии случайности в смешанных стратегиях от обычных случайных факторов, состоящее в том, что первые случайности относятся к категории сознательно выбираемых, контролируемых факторов, а вторые – к неконтролируемым.

Множество всех возможных смешанных стратегий будем обозначать $\Phi = \left\{ j \right\}$, а множество вырожденных распределений

$$\Phi_0 = \left\{ j_x ;\, x \in M_0 \right\} ,$$

где j_x - вырожденное в точке x распределение вероятностей.

Очевидно, что между множествами Φ_0 и M_0 существует взаимно однозначное соответствие.

ОЦЕНКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ СОС j будем называть число

$$\underline{\overline{W}}(j) = \inf_{y \in N} \int_{M_0} W(x, y) d j\,(x).$$

НАИЛУЧШИМ ГАРАНТИРОВАННЫМ РЕЗУЛЬТАТОМ в Φ будем называть число $W_\Gamma(\Phi) = \underline{\overline{W}}(j)$.

Имеет место теорема:

$$W_\Gamma\left(\overset{\downarrow}{M}_0\right) \le W_\Gamma(\Phi) \le W_\Gamma\left(\overset{\uparrow}{M}\right).$$

<u>Замечания.</u>

1. Если $W_\Gamma\left(\overset{\downarrow}{M}_0\right) = W_\Gamma\left(\overset{\uparrow}{M}\right)$, то нет смысла стремиться к получению информации об y и нет смысла вводить искусственный случайный механизм на множестве M_0.

2. Если $W_\Gamma\left(\overset{\downarrow}{M}_0\right) = W_\Gamma(\Phi) < W_\Gamma\left(\overset{\uparrow}{M}\right)$, то рандомизация стратегий ничего не дает и естественным будет стремление к получению полной информации об y.

3. Если же $W_\Gamma\left(\overset{\downarrow}{M}_0\right) < W_\Gamma(\Phi) = W_\Gamma\left(\overset{\uparrow}{M}\right)$, то целесообразно осуществить рандомизацию стратегий-констант. Это означает выбор стратегий из $\overset{\downarrow}{M}_0$ или все равно, что из M_0 в соответствии с заданным распределением вероятностей. Очевидно, что рандомизация имеет смысл при многократном повторении операции.

<u>Задачи:</u>

№ 5.1. Пусть $x \in M_0 = \{1, 2, 3\}$, $y \in N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и

$$\left(W(x, y)\right) = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -5 & 8 \\ 5 & 3 & 8 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти оптимальную стратегию и наилучший гарантированный результат в M, где

a) $M = \overset{\downarrow}{M}_0$;

в) $M = \overset{\uparrow}{M}$;

c) $M = \overset{\uparrow}{M}_R$ и $R(1) = R(3) = R(5)$, $R(2) = R(4)$;

d) приведите пример информационной функции, для которой $W_\Gamma\left(\overset{\downarrow}{M}_0\right) < W_\Gamma\left(\overset{\uparrow}{M}_R\right)$;

e) приведите пример информационной функции, для которой $W_\Gamma\left(\overset{\downarrow}{M}_0\right) = W_\Gamma\left(\overset{\uparrow}{M}_R\right)$;

f) найти оценку эффективности смешанной стратегии $j_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$ и $j_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$.

№ 5.2. Пусть $x \in M_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $y \in N = \{1, 2, 3, 4\}$ и

$$\left(W(x, y) \right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответить на вопросы a) – d) задачи № 5.1., считая $R(1) = R(2)$, $K(4) = R(5)$; $j_1 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right)$ и $j_2 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3} \right)$.

№ 5.3. Подразделение должно форсировать реку в одной из точек прямолинейного участка длиной 1 км. На участке расположена одна огневая точка противника, причем вероятность выполнения задания прямо пропорциональна расстоянию от точки форсирования до огневой точки противника. Необходимо выбрать место форсирования реки.

а) Построить модель операции. Найти наилучшие гарантированные результаты $W_Г \left(M_0 \right)$ (местоположение огневой точки неизвестно), $W_Г \left(\Phi \right)$ (в смешанных стратегиях), $W_Г \left(\overset{!}{M} \right)$ (местоположение огневой точки станет известно, благодаря разведке, к моменту проведения операции), найти соответствующие оптимальные стратегии.

б) К моменту проведения операции разведка установит, лежит ли огневая точка правее середины участка или нет. Построить информационную функцию R, найти наилучший гарантированный в $\overset{!}{M}_R$ результат и оптимальную стратегию $\overset{!}{x}_0$.

в) Разведка установит, лежит ли огневая точка на отрезке $\left[\frac{1}{4}, 1 \right]$ или нет. Проделать то же, что и в п. б).

г) Разведка установит местоположение огневой точки на отрезке $\left[\frac{1}{4}, 1 \right]$ или отсутствие ее на этом отрезке. Проделать то же, что и в п. б).

д) Оперирующая сторона, кроме местоположения точки форсирования реки, выбирает местоположение отрезка заданной длины $a < 1$, на котором будет проведена разведка. Точнее выбирается $b \in [0, 1 - a]$, и к моменту проведения операции разведка установит местоположение огневой точки на отрезке $[b, b+a]$ или отсутствие ее на этом отрезке. Найти наилучший гарантированный результат.

§ 6. Методы свертывания критериев

Часто при решении практических задач мы приходим к нескольким критериям $W_1,...,W_s$, из которых трудно выбрать наиболее предпочтительный. Если нет возможности одновременно увеличивать или уменьшать частные критерии $W_1,...,W_s$, то можно воспользоваться одним из методов свертывания (объединения) критериев. Согласно этому методу, мы переходим к новому критерию W_0, который является функцией от частных критериев

$$W_0 = F\left(W_1,...,W_s\right).$$

Рассмотрим сначала так называемые **ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ** методы свертывания.

1. Метод суммирования

$$W_0 = \sum_{j=1}^{s} l_j W_j \ .$$

Коэффициенты l_j характеризуют вклад каждого из частных критериев. Если частные критерии равноправны, то $l_j = 1$ для всех $j = \overline{1, s}$.

Обобщением метода суммирования является метод интегрирования. Здесь мы имеем дело с семейством частных критериев $\{W_u \ , \ u \in U\}$ и тогда

$$W_0 = \int_U W_u \, l(u) du \ ,$$

где $l(u)$ - некоторая весовая функция.

Ранее, осредняя критерий, мы фактически применяли метод суммирования в случае дискретного распределения Сфактора Z $\left(l_j = P\{Z = z_j\}, \ z_j \in Z_0 \right)$ и метод интегрирования при непрерывном распределении Z (здесь $l(z)$ - плотность распределения вероятностей случайной величины Z со значениями $z \in Z_0$).

2. Переход к двузначному критерию

$$W_0 = \begin{cases} 1, \ W \geq W' \\ 0, \ W < W' \end{cases},$$

где W' - заданное число.

3. Обобщенные логические методы свертывания критериев

А) Переход от цели с критерием W к противоположной цели, которой соответствует критерий $W_{пр.}$

$$W_{пр.} = -W \ .$$

Если W - двузначный критерий, то есть

$$W = \begin{cases} 1, \ \textit{цель достигнута} \\ 0, \ \textit{цель не достигнута} \end{cases},$$

то переход к противоположной цели удобнее описать следующим образом

А$^{/}$) $W_{пр.} = 1 - W$,

так как последняя операция в отличие от $W_{пр.} = -W$ не выводят из множества двузначных критериев.

Пусть как и раньше, $W_1, ..., W_s$ частные критерии. Введем для них две операции обобщенного логического свертывания.

В) $W_0 = \max\limits_{j=\overline{1,s}} l_j W_j$.

С) $W_0 = \min\limits_{j=\overline{1,s}} l_j W_j$.

Нетрудно понять, что для двузначных равноправных $\left(l_j = 1, j = \overline{1,s} \right)$ критериев $W_1, ..., W_s$ применение В) означает переход к цели, состоящей в выполнении хотя бы одной из частных целей, а применение С) означает, что цель, соответствующая W_0 состоит в выполнении всех частных целей. Как известно из курса математической логики, операции А$^{/}$) , В) , С) составляют полную систему операций в множестве двузначных критериев.

Введенные выше элементарные действия в состоянии отразить всю широту возможных однозначных зависимостей W_0 от $W_1, ..., W_s$ для конечно-значных критериев.

Теорема о полноте: Если критерии $W_1, ..., W_s$ принимают конечное число конечных возможных значений и функция F осуществляет взаимнооднозначное соответствие R^s в R, то критерий $W_0 = F\left(W_1, ..., W_s \right)$ может быть представлен в виде конечного числа действий 1-3.

Задачи:

№ 6.1. Частный критерий W_i принимает значение 1, если выполнена $i-$ая частная цель, и значение 0 – в противном случае, $i = 1, 2, ..., s$. Записать обобщенный критерий W_0, если цель оперирующей стороны состоит в следующем:

а) выполнена хотя бы одна цель;

б) выполнены все цели одновременно;

в) выполнена хотя бы одна пара целей с соседними номерами;

г) для любой пары целей с соседними номерами выполнена хотя бы одна цель из пары;

д) выполнены не менее k целей, $k \le s$;

е) выполнено ровно k целей, $k \le s$.

№ 6.2. Пусть $x \in M_0 = \{1,2,3\}$, $y \in N = \{1,2,3\}$,

$$\left(W_1(x,y)\right) = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \left(W_2(x,y)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \left(W_3(x,y)\right) = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 3 & 4 & 10 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записать обобщенный критерий W_0, если

а) все частные критерии равноправны, а оперирующая сторона стремится к увеличению значения хотя бы одного частного критерия;

б) все частные критерии равноправны, а оперирующая сторона стремится к одновременному увеличению значений всех частных критериев.

№ 6.3. Решить задачу № 6.3, если

$$x \in M_0 = \{1,2,3\};\quad y \in N = \{1,2,3,4\}$$

$$\left(W_1(x,y)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix},\quad \left(W_2(x,y)\right) = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 10 & 8 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(W_3(x,y)\right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Волков И.К. Исследование операций / И.К.Волков, Е.А.Загоруйко. – М.: МГТУ, 2002. -435с.
2. Задачи по исследованию операций / Ю.Б.Гермейер, В.В.Морозов, А.Г.Сухарев и др. –М.: МГУ, 1979. -168с.

Дополнительная

3. Вагнер Г. Основы исследования операций / Г.Вагнер. –М.: Мир, 1972. –Т.1. – 335с.
4. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций / Ю.Б.Гермейер. –М.: Наука, 1971. -383с.

Составители: Михайлова Ирина Витальевна
Редактор Тихомирова О.А.