Федеральное агентство по образованию

ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.И. Носова»

Кафедра математических методов в экономике

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ЭВМ

*Методические указания и варианты контрольных заданий
для студентов всех специальностей*

Магнитогорск

2007

Составители: О.С. Андросенко
Л.Д. Девятченко
Е.П. Маяченко

Постановка и решение задач Марковских процессов на ЭВМ: Методичекие указания и варианты контрольных заданий для студентов всех специальностей. Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2007. 51с.

Методические указания включают краткий теоретический материал и контрольные задания по Марковским цепям с дискретным и непрерывным временем. Указания содержат необходимые инструкции для решения задач с применением общедоступных пакетов программ WinQSB и MathCAD. Разработка предназначена студентам технических ВУЗов, которым в Государственном Общеобразовательном Стандарте предусмотрен раздел математики «Случайные процессы».

Рецензент А.В. Изосов

ВВЕДЕНИЕ

Курс теории вероятностей предполагает изучение трех разделов: случайные события, случайные величины и случайные процессы. В естественнонаучных дисциплинах главным образом рассматриваются детерминированные задачи, когда каждому значению аргумента ставится в соответствие одно единственное значение функции. Однако в реальных условиях случайные возмущения присущи любому процессу, но до тех пор, пока эти возмущения несущественны, мало влияют на интересующие нас параметры, мы часто ими пренебрегаем и рассматриваем изучаемый процесс как детерминированный. Таким образом, большинство процессов, которые рассматриваются в физике, технике, экономике и других областях деятельности человека, по существу являются случайными.

В методических указаниях будет акцентировано внимание на случайных процессах, которые моделируются с помощью Марковских цепей (дискретных и непрерывных). В данной работе отражена модель случайного процесса только с дискретными состояниями, с дискретным и непрерывным временем изменения этих состояний, т.е. Марковские цепи.

Теоретические основы таких процессов дал выдающийся русский математик Андрей Андреевич Марков (1856 – 1922), благодаря работам которого теперь можно с успехом решать многие статистические задачи физики, химии, математики, особенно актуальны приложения стохастических матриц в решении технических, стратегических, экологических, экономических и других проблем.

Изменения или переходы многих естественных систем (экологических, биологических, физических) и искусственных систем (кибернетических, энергетических, экономических, производственных) зачастую носят случайный характер. Цепочка таких переходов из одного состояния в другое может быть описана с помощью стохастических (вероятностных) матриц, обладающих определенными свойствами. Теория Марковских цепей является инструментом для анализа таких процессов, каскадов, систем, в которых переход из одного состояния в другое зависит только от ее состояния в настоящее время и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние.

При рассмотрении таких систем необходимы определенные навыки в решении следующих вопросов:

- Математическая постановка задачи и представление размеченного графа системы;
- Оценка состояний системы на несколько шагов вперед, включая случай заданного вектора начального состояния;

- Оценка предельных состояний при стремлении системы к стационарному состоянию, включая случай «живучих» систем (блуждающих процессов) с отражателями состояний;
- Оценка «живучести» (продолжительности функционирования) систем, имеющих поглощающие состояния;
- Прогноз состояния системы, исходя из интенсивности потока.

Целью данной разработки является приобретение навыков решения таких задач на ЭВМ в связи с большим объемом вычислительных процедур (вычисление определителя, обращение матриц, умножение матриц, нахождение собственных векторов и собственных чисел и т.д.)

В данной работе в качестве программного обеспечения исследования статистических процессов на основе Марковских цепей с дискретным временем рекомендуется пакет WinQSB, где имеется специально разработанный модуль Markov Process. Для решения задач с непрерывным временем – пакет MathCAD, где дополнительно можно исследовать устойчивость решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова.

Методические указания описывают особенности ввода, вывода данных и интерпретации результатов, что представляет значительный интерес для пользователей в условиях применения английских версий программного обеспечения. Работа содержит большое количество примеров постановки и решения задач по Марковским процессам, которые могут быть использованы для проведения практических занятий по разделу «Случайные процессы» курса математики, а также для моделирования производственно-экономических, бюджетно-финансовых и других стохастических систем.

Методические указания содержит варианты заданий, которые кроме практических задач включают также теоретические вопросы, и могут быть использованы для выполнения контрольных работ или в качестве домашнего задания по теме «Марковские процессы».

Поскольку в данной работе достаточно полно изложен необходимый теоретический материал, работа может быть рекомендована для самостоятельного изучения студентами раздела «Случайные процессы», что особенно актуально в условиях ограниченного времени по учебному плану для изучения данной темы. Разработка может быть также использована студентами старших курсов для выполнения курсовых, научно-исследовательских работ и дипломного проектирования.

Данная работа предназначена для студентов, прослушавших курсы линейной алгебры, теории вероятностей и получивших основные навыки работы на ЭВМ в системе Windows.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Некоторые понятия теории вероятностей

Теория вероятностей включает три раздела: случайные события, случайные величины, случайные процессы. Основным понятием теории вероятностей является понятие вероятности, и в практических задачах в основном используются классическое (комбинаторное) и статистическое (частотное) определения вероятности.

Классическое определение. Вероятностью события A называется отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов:

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Под элементарным исходом $\omega_i,\ i = \overline{1,\ n}$ понимается каждый из возможных результатов испытания. Предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу.

Слабые стороны классического определения вероятностей:

1) Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике же часто встречаются испытания число возможных исходов которых бесконечно.
2) В классическом определении вероятности понятие равновозможны фактически означает равновероятны. Предполагается, что вероятность каждого элементарного исхода $p(\omega_i) = \frac{1}{n},\ \ i = \overline{1,\ n}$, что в реальных испытаниях не всегда выполнимо, т.е. вероятности элементарных исходов могут различаться.

Поэтому наряду с классическим определением используют *статистическое определение вероятности*, основанное на понятии относительной частоты, определяемой как отношение числа испытаний m_n, в которых событие A появилось к общему числу n фактически произведенных испытаний:

$$p_n(A) = \frac{m_n}{n}.$$

Основным свойством относительной частоты является ее устойчивость, которое состоит в том, что с ростом числа испытаний $(n \to \infty)$ относительная частота стабилизируется, колеблясь около постоянного числа p.

Статистическое определение вероятности. Предельное значение относительной частоты при неограниченном возрастании числа испытаний называют статистической вероятностью:

$$p = \lim_{n \to \infty} p_n .$$

На практике при достаточно большом n наблюдается сходимость по вероятности относительной частоты события к вероятности этого события.

Основные свойства вероятности:

1) Вероятность достоверного события равна единице.
2) Вероятность невозможного события равна нулю.
3) Вероятность случайного события A удовлетворяет двойному неравенству: $0 < p(A) < 1$.
4) Вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.
5) Сумма вероятностей двух противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице, т.к. они образуют полную группу событий:

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1 .$$

6) Вероятность двух совместных событий A и B равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения:

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB) ,$$

Если перейти к противоположному событию $\overline{A+B}$, то

$$p(A+B) = 1 - p(\overline{A} \cdot \overline{B}) .$$

7) Вероятность произведения двух событий A и B равна произведению одного из них на условную вероятность другого:

$$p(AB) = p(A) p(B/A) = p(B) p(A/B) ,$$

где условная вероятность $p(A/B)$ - вероятность события A, вычисленная при условии наступления события B.

Тогда $p(A/B)=\dfrac{p(AB)}{P(B)}=\dfrac{m_{AB}}{m_B}$,

где m_{AB} - число исходов, благоприятствующих совместному появлению событий A и B,

m_B - число исходов, благоприятствующих событию B.

8) В частности, если события A и B независимы, т.е. появление одного из них не меняет вероятности появления другого, то это означает, что $p(A/B)=p(A)$ и $p(B/A)=p(B)$. Следовательно, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$p(AB)=p(A)p(B).$$

9) Несколько событий называют независимыми в совокупности, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие со всеми возможными произведениями остальных. Например, независимость трех событий A, B и C означает независимость событий A и B, B и C, A и C, а также событий A и BC, B и AC, C и AB. Тогда

$$p(ABC)=p(A)p(B)p(C).$$

Однако, для зависимых событий A, B и C

$$p(ABC)=p(A)p(B/A)p(C/AB).$$

1.2. Собственные числа и собственные векторы матриц

Рассмотрим квадратную матрицу $A=(a_{ij}),\ i,j=\overline{1,n}$ порядка n. Определим для них основные числовые характеристики, необходимые для рассмотрения стохастических процессов [3].

Число λ называется *собственным значением* (*собственным числом*) матрицы A, если существует такой ненулевой вектор x, что

$$Ax=\lambda x.$$

Любой вектор $x\neq 0$, удовлетворяющий этому уравнению, называется *собственным вектором матрицы* A, соответствующим собственному значению λ.

Совокупность всех собственных значений называется *спектром матрицы*.

Для того чтобы ненулевой вектор x был собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ, необходимо и достаточно, чтобы он являлся решением однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A-\lambda E)\cdot x=0$.

Для того чтобы число λ было собственным значением матрицы A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\mathbf{det}(A-\lambda E)=0$.

Функция $\mathbf{det}(A-\lambda E)$ относительно параметра λ есть многочлен, степень которого равна порядку матрицы A:

$$\mathbf{det}(A-\lambda E)=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\ldots+(-1)^n a_n .$$

Этот многочлен называется характеристическим многочленом матрицы A.

Корни характеристического многочлена, и только они, образуют спектр матрицы A.

Любая матрица порядка n имеет n собственных значений, в общем случае комплексных; при этом возможны повторяющиеся собственные значения, т.к. некоторые корни характеристического уравнения могут быть кратными.

В дальнейшем для нас представляют интерес неотрицательные матрицы с неотрицательными собственными числами.

1.3. Матрицы с неотрицательными элементами

Дадим ряд определений из курса теории матриц [3, 4], связанных с моделированием стохастических систем, в основе которых используются матрицы с неотрицательными элементами.

Вещественная квадратная матрица $A=(a_{ij}),\ i,j=\overline{1,n}$ порядка n, с неотрицательными (положительными) элементами $a_{ij}\ge 0$, взятыми из множества действительных чисел, называется *неотрицательной (положительной) матрицей.*

Аналогично, вещественный вектор $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ с неотрицательными (положительными) элементами $x_i\ge 0$ называется *неотрицательным (положительным) вектором*.

Неотрицательная матрица называется *стохастической*, если сумма элементов каждой ее строки равна единице и для нее принято обозначение $P = (p_{ij}),\ 0 \le p_{ij} \le 1,\ \ i, j = \overline{1, n}$.

Неотрицательная матрица A тогда и только тогда является стохастической, когда она имеет собственное число, равное единице и ему соответствует собственный вектор, все координаты которого равны единице. Это собственное число называют спектральным радиусом стохастической матрицы.

Неотрицательная матрица A, имеющая положительное собственное число, которому соответствует положительный собственный вектор, всегда подобна некоторой стохастической матрице, умноженной на это собственное число. Если $zA = \lambda z$, где собственное число $\lambda > 0$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ - положительный собственный вектор-строка и диагональная матрица $Z = diag\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, то матрица $\frac{1}{\lambda} Z^{-1} AZ$ является *стохастической*.

Ранг стохастической матрицы $r \le n$.

2. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

2.1. Общие сведения о Марковских процессах

Приведем сведения о таких случайных процессах, как Марковские процессы и Марковские цепи. Цепь Маркова является частным случаем Марковских процессов. Цепи Маркова используются для изучения краткосрочного и долгосрочного поведения стохастических систем с дискретным множеством состояний.

Марковский процесс описывает поведение стохастической системы, в которой наступление очередного состояния зависит только от непосредственно предшествующего состояния системы. Если $t_0 < t_1 < \ldots < t_n \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ - моменты времени, то семейство величин $\left\{\xi_{t_n}\right\}$ будет процессом Маркова тогда и только тогда, когда оно обладает *Марковским свойством*

$$P\left\{\xi_{t_n} = x_n \,\middle|\, \xi_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, \xi_{t_0} = x_0\right\} = P\left\{\xi_{t_n} = x_n \,\middle|\, \xi_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right\}$$

для всех возможных значений случайных величин $\xi_{t_0}, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}$.

Вероятность $p_{x_{n-1},x_n} = P\left\{\xi_{t_n} = x_n \,\middle|\, \xi_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right\}$ называется *переходной* и представляет собой условную вероятность того, что система будет находиться в каком-либо текущем состоянии x_n в момент t_n, если в момент t_{n-1} она находилась в состоянии x_{n-1}. Следовательно, марковское свойство означает, что вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от ее состояния в настоящем и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (при фиксированном настоящем будущее не зависит от прошлого). Переходную вероятность также называют *одношаговой переходной*, поскольку она описывает изменение состояния системы между последовательными моментами времени t_{n-1} и t_n.

Двухшаговая вероятность перехода $p_{ij}^{(2)}$ определяется как вероятность того, что система S, находясь в состоянии e_i, переходит в состояние e_j в результате двух последующих испытаний, где переход из e_i в e_j за два шага может пройти через некоторое промежуточное состояние e_q $(q = 1, 2, \ldots, n)$. Например, из e_i система может перейти в состояние e_1, а затем уже в e_j, или из e_i перейти сначала в e_2, а затем в e_j и.т.д. по схеме «или»:

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{q=1}^{n} p_{iq} \cdot p_{qj} \,.$$

$m-$шаговая вероятность перехода $p_{ij}^{(m)}$ есть вероятность того, что система, находясь в состоянии e_i, оказывается в состоянии e_j в результате m последующих испытаний.

Справедлива следующая теорема:

Для Марковской цепи с переходной матрицей $P = \left(p_{ij}\right)$ размера $n \times n$ $m-$шаговая вероятность перехода $p_{ij}^{(m)}$ представляет собой $ij-$элемент матрицы P^m.

Докажем методом математической индукции:

При $m=1$ утверждение справедливо, т.к. $ij-$элемент переходной матрицы P представляет собой вероятность того, что при последовательных испытаниях система переходит из состояния e_i в состояние e_j.

Допустим, что теорема верна при $m=k$. Определим матрицу Q как $Q=P^k=\left(q_{ij}\right)$. Перейти из состояния e_i в состояние e_j за $\kappa+1$ испытание система S может путем перехода из состояния e_i в состояние e_l за одно испытание и затем из e_l в e_j за оставшиеся k испытаний. Вероятность этого события $p_l=p_{il}\cdot p_{lj}$, где промежуточным состоянием e_l может служить $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (по схеме «или»). Поэтому вероятность того, что система переходит из состояния e_i в состояние e_j за $\kappa+1$ испытаний, представляет собой сумму вероятностей: $p^{(k+1)}=p_{i1}\cdot q_{1j}+p_{i2}\cdot q_{2j}+\ldots+p_{in}\cdot q_{nj}$. Но это соответствует $ij-$элементу матрицы $P\cdot Q=PP^k=P^{k+1}$, что и требовалось доказать.

По определению, $m-$ *шаговая переходная вероятность* определяется формулой $p_{x_n,x_{n+m}}=P\left\{\xi_{t_{n+m}}=x_{n+m}\,\middle|\,\xi_{t_n}=x_n\right\}$.

Марковскую цепь для описания дискретных стохастических систем с дискретным временем изменения их состояний принято обозначать в виде переходной матрицы $P=\left(p_{ij}\right)$, где p_{ij} - вероятность перехода системы $S=\left\{e_0,e_1,\ldots,e_j\right\}\left(j=1,2,\ldots\right)$ из состояния i в момент времени t_{n-1} в состояние j в момент времени t_n. Допускается, что вероятности p_{ij} постоянны во времени.

Пусть задан вектор начального состояния системы $P^{(0)}=\left\{p_1^{(0)},p_2^{(0)},\ldots,p_n^{(0)}\right\}$, где $p_i^{(0)},(i=0,1,2,\ldots,n)$ - вероятности того, что в момент t_0 система находится в состоянии e_i. Матрица переходных вероятностей P совместно с исходными вероятностями состояний полностью определяет Марковскую цепь. Обычно считается, что цепь Маркова описывает переходный режим некоторой системы при изменении ее состояний на одинаковых интервалах времени. Следовательно, такая система обладает динамическими свойствами, хотя время задано неявно (интервал времени фиксируется как шаг изменения состояний системы).

Переходная матрица является *стохастической матрицей*, т.к. она обладает следующими свойствами: $p_{ij} \geq 0$ и для каждой i - строки сумма вероятностей p_{ij} равна единице,

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \ldots n.$$

Для Марковской цепи $m -$ шаговым распределением вероятностей называется $n -$ мерный вектор $P^{(m)} = \left\{ p_1^{(m)}, p_2^{(m)}, \ldots, p_n^{(m)} \right\}$, где $p_i^{(m)}$ представляет собой вероятность того, что при $m -$ ном испытании система оказывается в состоянии e_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Значение вектора $P^{(m)}$ можно определить как $P^{(m)} = P^{(m-1)} \cdot P = P^{(0)} \cdot P^m$, где P^m - переходная матрица после m шагов.

Переходная матрица m - шаговой вероятности определяется как скалярное произведение переходных матриц $\left(p_{ij}^{(m)}\right) = \left(p_{ij}^{(m-1)}\right)\left(p_{ij}\right) = P^m$. Эта матрица также является стохастической.

Данная модель удобна в использовании при изучении поведения системы на коротком отрезке времени. Для изучения долгосрочного поведения системы, т.е. в условиях, когда число переходов стремится к бесконечности, определяются все последующие состояния Марковской цепи.

2.2. Разновидности Марковских процессов

Марковские процессы используются для изучения краткосрочного и долгосрочного поведения стохастических систем. Напомним, что случайная функция $X(t)$, аргументом которой является время, называется случайным процессом. В зависимости от непрерывности или дискретности множества значений функции $X(t)$ и временного параметра t различают следующие основные виды Марковских случайных процессов:

- Дискретные состояния и дискретное время (цепь Маркова);

- Непрерывные состояния и дискретное время (Марковские последовательности);
- Дискретные состояния и непрерывное время (непрерывная Марковская цепь);
- Непрерывные состояния и непрерывное время.

На практике большинство задач по Марковским процессам описываются с помощью Марковских цепей с дискретным или непрерывным временем.

В данной разработке мы будем рассматривать только Марковские процессы с дискретными состояниями $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Такие процессы удобно иллюстрировать с помощью *графа состояний* (рис.1), где кружками обозначены состояния $e_1, e_2, \ldots, e_n$ системы S, а стрелками – возможные переходы из состояния в состояние (на графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния). Против каждой стрелки, как правило, проставляются соответствующие вероятности перехода p_{ij} (см. напр. рис.4.1, 4.2 и др.). На графе состояний отмечают также и возможные задержки в прежнем состоянии с помощью «петли», т.е. стрелки, направленной из данного состояния в него же (см. напр. рис. 4.3, 5.2, 5.3). При этом, вероятность задержки p_{ii} в данном состоянии (на петле графа) можно определить как разность единицы и суммы всех переходных вероятностей p_{ij} $(i \neq j)$ из данного состояния в другие, т.е.

$$p_{ii} = 1 - \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \quad i \neq j .$$

Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным, но счетным.

В случае Марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно пользоваться графом состояний, на котором против каждой стрелки, ведущей из состояния e_i в состояние e_j, поставлена интенсивность λ_{ij} потока событий, переводящего систему по данной стрелке (см. рис. 5.4 и 5.5). Граф состояний стохастических систем называют *размеченным*. На графе состояний системы с непрерывным временем мы не будем изображать петли, соответствующие задержке системы в данном состоянии, т.к. такая задержка всегда возможна.

В случае дискретного состояния и дискретного времени, стохастический процесс задается переходной матрицей $P = \left(p_{ij}\right)$, где элементы $p_{ij} -$ вероятности перехода из состояния i в состояние j. Такая матрица является однородной матрицей переходов, поскольку все переходные вероятности p_{ij} фиксированы и не зависят от времени.

В случае дискретных состояний и непрерывного времени стохастическая система, задаваемая интенсивностью перехода из состояния e_i в состояние e_j, описывается дифференциальными уравнениями Колмогорова.

Наиболее востребованы в прикладных задачах Марковские цепи эргодические и поглощающие.

2.3. Эргодические Марковские цепи

Цепь Маркова называют *неприводимой (регулярной)*, если любое состояние E_j может быть достигнуто из любого другого состояния E_i за конечное число переходов, т.е. при $i \neq j$ $p_{ij}^{(m)} > 0$ для $1 \leq m < \infty$. В этом случае все состояния цепи называются сообщающимися, а переходная матрица $P = \left(p_{ij}\right)$ будет называться *регулярной*.

Если процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго, то возникает вопрос о предельном поведении вероятностей $p_i(t),\ t \to \infty$. В некоторых случаях существуют предельные (финальные) вероятности состояний $y_i = \lim\limits_{t \to \infty} p_i(t)$, не зависящие от того, в каком состоянии система S находилась в начальный момент t_0. Предельная вероятность y_i может быть истолкована как *среднее относительное время* пребывания системы в данном состоянии.

Если $P = \left(p_{ij}\right)$ - регулярная стохастическая матрица, то у нее имеется единственный неподвижный стохастический вектор $Y = \left\{y_1, y_2, \ldots, y_n\right\}$, все компоненты которого строго положительны.

Существует предельная матрица $P^{(\lim)} = \lim\limits_{m\to\infty} P^m$, каждая строка которой совпадает с неподвижным стохастическим вектором Y и, если $p^{(0)}$ – любой стохастический вектор, то $\lim\limits_{m\to\infty} p^{(0)} \cdot P^m = Y$.

Состояние системы называется *возвратным*, если оно вновь может быть достигнуто спустя m шагов. Возвратное состояние системы является *эргодическим*, если оно ненулевое, и переходная матрица в этом случае будет называться *эргодической*. Система, для которой существуют предельные вероятности, будет также *эргодической* и соответствующие случайные процессы *эргодическими*. Среднее время возвращения в состояние E_i при этом определяется формулой $\tau_{ii} = \dfrac{1}{y_i}$.

Обратим внимание, что эргодические системы, как правило, склонны к стабилизации, т.е. переходный процесс протекает кратковременно и финальное состояние достигается достаточно быстро. Это обусловлено тем, что состояния системы являются сообщающимися, в такой системе возможен переход из любого состояния e_i в любое состояние e_j за конечное число шагов. Это значит, что матрица $P = \left(p_{ij}\right)$ первоначально или после некоторого числа m шагов не содержит нулевых элементов, а ориентированный граф является сильно связанным (содержит парные дуги).

2.4. Поглощающие Марковские цепи

Множество C состояний цепи Маркова называется *замкнутым*, если система, однажды оказавшаяся в одном из состояний этого множества, будет находиться в множестве C в течение бесконечного интервала времени. Частным случаем замкнутого множества является единственное состояние E_j с переходной вероятностью $p_{jj} = 1$. В этом случае состояние E_j называется *поглощающим*.

Марковская цепь называется *поглощающей*, если в ней имеется одно (или более) поглощающее состояние и если поглощающее состояние может быть достигнуто из любого непоглощающего состояния. Количество поглощающих состояний в Марковской цепи равно числу единиц на диагонали ее переходной матрицы.

Непоглощающие состояния поглощающей Марковской цепи называются *переходными,* и тогда вероятности перехода p_{ij} можно сгруппировать в отдельную матрицу $R=\left(p_{ij}\right)$, размера $k\times k$*, где* $n-k$ - число поглощающих состояний.

Вероятности того, что система с поглощающим состоянием находится в каком-либо переходном состоянии, убывают по мере того как растет число испытаний, и стационарный вектор Y становится равным вектору-строке, которая содержит $p_{ii}=1$. В связи с этим при исследовании поглощающих Марковских цепей наибольший интерес представляет переходный режим до момента попадания в поглощающее состояние.

Представляет интерес среднее время жизни системы (число шагов m) до попадания системы в какое-либо поглощающее состояние.

Если ввести матрицу $Q=\left(q_{ij}\right)$ размера $k\times k$, где сумма элементов для каждой строки $q_{i1}+q_{i2}+\ldots+q_{ik}=m_i$, то можно определить среднее число переходов m_i из состояния e_i до попадания в поглощающее состояние, т.е. среднее время жизни системы.

Используя разложение стохастической матрицы в ряд $Q=E+R+R^2+R^3+\ldots$, где $E-$единичная матрица размера $k\times k$ нетрудно показать, что $P\cdot Q=Q-E$ или $\left(E-R\right)\cdot Q=E$ и тогда $Q=\left(E-R\right)^{-1}$.

2.5. Непрерывные Марковские цепи

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем иногда называют «непрерывной цепью Маркова». Для такого процесса вероятность перехода из состояния, e_i в e_j для любого момента времени равна нулю. Вместо вероятности перехода p_{ij} в этом случае рассматривают *плотность вероятности перехода* λ_{ij}, которая определяется как предел отношения вероятности перехода из состояния e_i в состояние e_j за малый промежуток времени Δt, примыкающий к моменту t, к длине этого промежутка, когда она стремится к нулю. Плотность вероятности перехода может быть как постоянной $\left(\lambda_{ij} = const\right)$, так и зависящей от времени $\left(\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)\right)$. В первом случае Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется *однородным*.

Плотности вероятностей переходов рассматриваются как интенсивности λ_{ij} простейших потоков событий, под влиянием которых происходит переход системы из состояния e_i в состояние e_j.

Потоком событий принято называть последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайный момент времени (поток автомашин, проходящих через таможенный пост; поток вызовов на станции скорой помощи; поток клиентов, снимающих денежные средства со счета в банке). На практике обычно рассматривают простейшие потоки событий, которые характеризуются свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия.

Поток событий называется *стационарным*, если вероятность попадания того или другого числа событий на любой интервал времени зависит только от длины τ этого интервала и не зависит от того, где именно на оси времени он расположен.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность одновременного поступления двух и более событий равна нулю, что означает, что события в потоке появляются «поодиночке», а не группами по два, по три и т.д.

Поток событий называется *потоком без последствия*, если число событий, попадающих на любой интервал времени τ, не зависит от того, сколько событий попало на любой другой не пересекающийся с ним интервал. Отсутствие последействия означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга.

Ординарный поток событий без последствия называется пуассоновским. Простейший поток есть частный случай пуассоновского потока, обладающего свойством стационарности. Случайный процесс $X(t)$, представляющий собой число появившихся до момента t событий в простейшем потоке, определяется исходя из закона Пуассона

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где n – число состояний системы,

λ – интенсивность потока.

В случае, когда система имеет конечное число состояний, вероятности состояний $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ в момент времени t находятся из системы дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова), имеющих вид

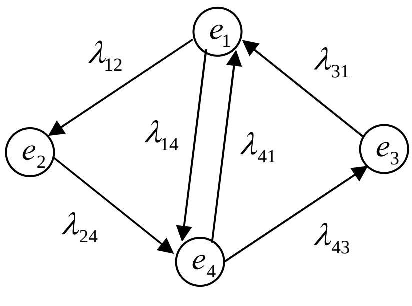
$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} p_j(t) - p_i(t) \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \, , \; i = 1, 2, \dots, n \, ,$$

где произведение $\lambda_{ij} p_i(t)$ – поток вероятности перехода [5] из состояния S_i в состояние S_j.

Данные уравнения удобно составлять, пользуясь размеченным графом состояний системы и следующим мнемоническим правилом: производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, переводящих из других состояний в данное, минус сумма всех потоков вероятности, переводящих из данного состояния в другие.

Чтобы решить данную систему дифференциальных уравнений нужно задать начальное распределение вероятностей $p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0)$, сумма которых равна единице $\sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1$.

Пример. Пусть дана [1] стохастическая система, граф которой изображен на рис. 2.1. Вычислить предельные вероятности состояний p_1, p_2, p_3, p_4, если интенсивности потоков событий равны $\lambda_{12} = 2$, $\lambda_{14} = 1$, $\lambda_{24} = 1$, $\lambda_{31} = 3$, $\lambda_{41} = 2$, $\lambda_{43} = 2$.



2.1. Граф стохастической системы

Решение. Запишем уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\frac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{14})p_1 + \lambda_{31}p_3 + \lambda_{41}p_4 \;;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\lambda_{24}p_2 + \lambda_{12}p_1;$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\lambda_{31}p_3 + \lambda_{43}p_4;$$

$$\frac{dp_4}{dt} = -(\lambda_{41} + \lambda_{43})p_4 + \lambda_{14}p_1 + \lambda_{24}p_2 .$$

Полагая левые части равными нулю, и подставив значения λ_{ij}, получим систему алгебраических уравнений для предельных вероятностей состояний:

$$\begin{cases} -3p_1 \qquad +3p_3 + 2p_4 = 0 \\ 2p_1 - p_2 \qquad\qquad\quad = 0 \\ \qquad\qquad -3p_3 + 2p_4 = 0 \\ p_1 + p_2 \qquad\quad -4p_4 = 0 \end{cases}$$

Решая систему уравнений с учетом нормировочного условия для данной задачи $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, получим $p_1 = \frac{4}{17}$, $p_2 = \frac{8}{17}$, $p_3 = \frac{2}{17}$, $p_4 = \frac{3}{17}$.

Это значит, что в предельном установившемся режиме рассмотренная система будет находиться в состоянии e_1 в среднем четыре семнадцатых части времени, в состоянии e_2 – восемь семнадцатых, в состоянии e_3 – две семнадцатых и в состоянии e_4 – три семнадцатых.

3. РЕАЛИЗАЦИЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА НА ЭВМ

3.1. Стартовая панель модуля Markov Process

Модуль Markov Process в программе WinQSB рассматривает задачи стохастических процессов с дискретными состояниями и дискретным временем, т.е. цепи Маркова, являющиеся частным случаем марковских процессов.

При запуске модуля Markov Process (MKP) программы WinQSB ее главное меню содержит всего два пункта File и Help, а на панели инструментов имеются кнопки для ввода данных или загрузки их из файла. При обращении к пункту New Problem (Новая задача) в главном меню или к соответствующей кнопке на панели инструментов, открывается стартовая панель для ввода данных.

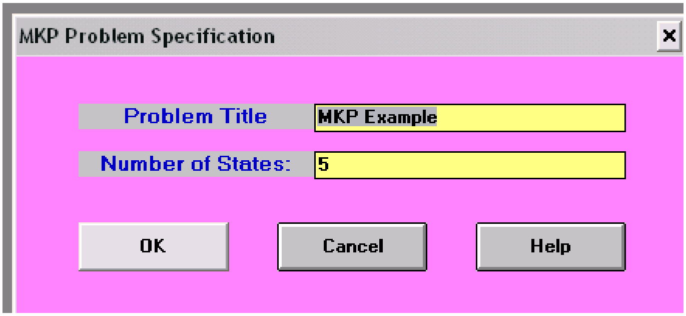


Рис. 3.1. Стартовая панель модуля MKP

В поле Problem Title вводится название задачи, а в поле Number of States – число состояний, в которых может находиться система. Для получения дополнительной информации о работе данной программы можно воспользоваться кнопкой Help.

3.2. Постановка и решение задач для стационарных цепей

В качестве примера эргодической стохастической системы S рассмотрим агрегат типа прокатный стан, который может находиться в одном из четырех состояний, т.е. система имеет следующее конечное множество состояний $S = \{\ e_1, e_2, e_3, e_4\ \}$, где e_1 - рабочее состояние системы, e_2 - состояние текущего ремонта, e_3 - состояние внепланового (аварийного) ремонта, e_4 - состояние модернизации рабочих элементов системы.

Переходная матрица $P = (p_{i,j})$ размером 4×4 рассматриваемой системы S имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}98 & 0 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}93 & 0{,}02 & 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}94 & 0{,}03 & 0 & 0{,}03 \end{pmatrix},$$

где p_{ij} – вероятность перехода системы S из состояния e_i в момент времени t_{n-1} в состояние e_j в момент времени t_n.
В частности, элементы первой строки данной матрицы означают, что с вероятностью 0,9 система остается (задерживается) в рабочем состоянии и с вероятностями 0,05, 0,03, 0,02 система может перейти за один шаг (цикл) из рабочего состояния e_1 в состояния e_2, e_3, e_4 соответственно.

Вектор начального состояния системы $P^{(0)} = \{p_1^{(0)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_n^{(0)}\}$ представляет собой вероятности пребывания системы в каждом из заданных состояний в начале процесса. Пусть в начальный момент времени t_0 система находится в состоянии e_1, тогда для данного случая исходный вектор будет иметь вид $P^{(0)} = \{1,\ 0,\ 0,\ 0\}$.

Элементы вектора стоимости пребывания системы в конкретном состоянии проставляются в условных единицах. Например, в условиях работы стана можно сделать следующие оценки элементов вектора стоимости: $C = \{10, -0.5, -1, -1\}$.

Исходные данные размещаются в электронной таблице, представленной на рис. 3.2. Первый столбец таблицы содержит перечень четырех состояний, название вектора начального состояния (Initial Prob.) и название вектора стоимости состояний (State Cost). Последующие элементы электронной таблицы содержат числовые значения соответствующих строк, обозначенных в первом столбце.

From \ To	State1	State2	State3	State4
State1	0.9	0.05	0.03	0.02
State2	0.98		0.01	0.01
State3	0.93	0.02	0.03	0.02
State4	0.94	0.03		0.03
Initial Prob.	1			
State Cost	10	-0.5	-1	-1

Рис.3.2. Исходные данные к задаче “Стан”

На основании исходных данных, соответствующих эргодической Марковской цепи, модуль Markov Process программы WinQSB позволяет использовать следующие опции:

- Solve Steady State – нахождение вектора стационарного (финального) распределения вероятностей (State Probability), вектора среднего времени возвращения (Recurrence Time), ожидаемую стоимость или доход (Expected Cost/Return);
- Markov Process Step – отслеживание Марковского процесса по шагам;
- Time Parametric Analysis – временной (по количеству задаваемых циклов) параметрический анализ.

Используя опцию Solve Steady State для решения нашей задачи, получим таблицу результатов, представленную на рис. 3.3. Содержание столбца State Probability, отражающего финальные распределения вероятностей состояний, показывает, что система “Стан” (при $t \to \infty$) в основном находится в рабочем состоянии с вероятностью 0,9054, в состоянии профилактического и аварийного ремонта соответственно с вероятностями 0,0464 и 0,0285, а в состоянии модернизации рабочих элементов системы всего лишь с вероятностью 0,0197. Из столбца Recurrence Time получаем информацию о среднем времени возвращения системы в каждое из состояний. Полагая, что один цикл соответствует одним суткам, возвращение в рабочее состояние системы происходит практически в течение суток, средняя периодичность возвращения данной системы в аварийное состояние составляет 35 суток, а усовершенствование рабочих элементов системы происходит не чаще чем один раз в 50 суток. Следовательно, на протяжении длительного времени система “Стан” работает стабильно, принося прибыль. Ожидаемая прибыль (Expected Cost/Return), вычисляемая как скалярное произведение вектора-столбца State Probability (см. рис. 3.3) на вектор-строку State Cost (см. рис. 3.2), составляет 8,9822 условных единиц.

03-21-2006	State Name	State Probability	Recurrence Time
1	State1	0,9054	1,1045
2	State2	0,0464	21,5380
3	State3	0,0285	35,1131
4	State4	0,0197	50,6764
	Expected	Cost/Return =	8,9822

Рис. 3.3. Результаты решения задачи “Стан”

В дополнение к приведенной выше информации на рис.3.2 с помощью опции Show First Passage Times в меню Results можно получить данные (рис. 3.4) о первом времени перехода системы из каждого состояния e_i в состояние e_j, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

03-31-2006	From State	To State	First Passage Time
1	State1	State1	1,1045
2	State1	State2	20,5279
3	State1	State3	35,1328
4	State1	State4	51,1977
5	State2	State1	1,0214
6	State2	State2	21,5380
7	State2	State3	35,7920
8	State2	State4	51,6856
9	State3	State1	1,0739
10	State3	State2	21,1437
11	State3	State3	35,1131
12	State3	State4	51,1830
13	State4	State1	1,0625
14	State4	State2	20,9240
15	State4	State3	36,1841
16	State4	State4	50,6764

Рис. 3.4. Среднее время перехода системы из состояния e_i в состояние e_j

Результаты работы системы можно рассмотреть в пошаговом режиме. Для этого нужно обратиться к опции Marcov Process Step в меню Solve and Analysis. Например, если достоверно известно, что система находится в состоянии e_3 (аварийное состояние), то можно определить вектор состояния системы спустя m циклов, $m = 1,\ 2, \ldots$, вплоть до финального состояния ($m \to \infty$). На рис. 3.4 представлена разобранная здесь ситуация для $m = 2$. В результате был получен новый вектор состояний системы $P^{(2)} = \left(0.9033, 0.0477, 0.0290, 0.0200\right)$ и ожидаемая прибыль в условных единицах, равная 8,960149.

На этой же панели (см. рис. 3.5) можно воспользоваться кнопкой Next Period для того, чтобы вычислить векторы состояний $P^{(3)}, P^{(4)}, \ldots$. Для определения вектора финального состояния следует воспользоваться кнопкой Steady State.

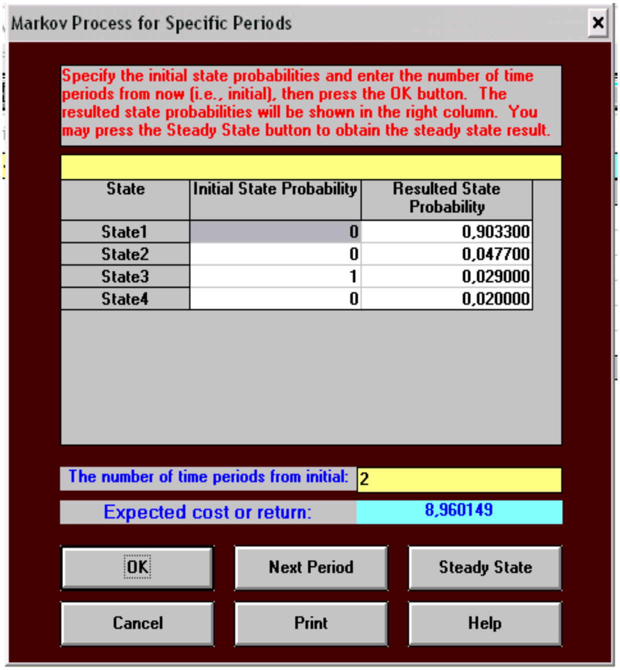


Рис. 3.5. Панель Марковского процесса в пошаговом режиме

Опция Time Parametric Analysis позволяет проанализировать вероятности и стоимости выбранного нами состояния системы на каждом шаге заданного временного периода, исходя из вектора начального состояния системы. При обращении к данной опции появляется одноименная панель (рис. 3.6), в поле выбора которой (Select a parameter for analysis) следует указать один из анализируемых параметров:

- Total Expected Return/Cost - общая ожидаемая прибыль,
- Probability of State State i , $i = 1, 2, 3, 4$ - вероятность пребывания системы в каждом из состояний e_i ,
- Expected Cost of State State i - ожидаемая прибыль для каждого из состояний e_i .

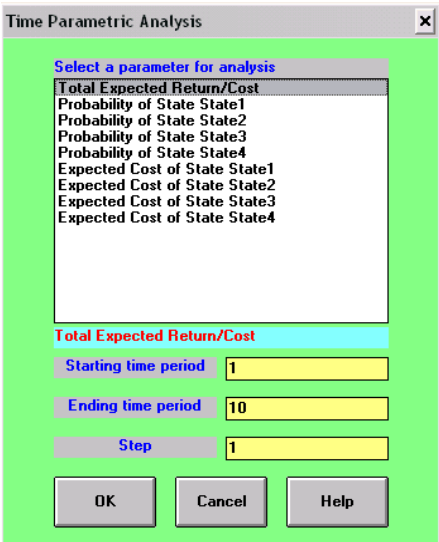


Рис. 3.6. Панель временного параметрического анализа

Панель временного параметрического анализа также содержит поля для установки начала и конца анализируемого периода соответственно Starting time period и Ending time period, а также шаг (Step).

Пусть необходимо проанализировать вероятности состояния e_1 в период с первого по десятый цикл с шагом равным единице. Результаты анализа могут быть представлены в виде таблицы (рис. 3.7) или в виде графика (рис. 3.8).

03-27-2006	Time Period	Probability of State State1
1	1	0,9000
2	2	0,9057
3	3	0,9053
4	4	0,9054
5	5	0,9054
6	6	0,9054
7	7	0,9054
8	8	0,9054
9	9	0,9054
10	10	0,9054

Рис. 3.7. Таблица результатов параметрического анализа

Выбор формы представления результатов осуществляется в меню Results пункта Show Time Parametric Analysis-Table или Show Time Parametric Analysis-Graph.

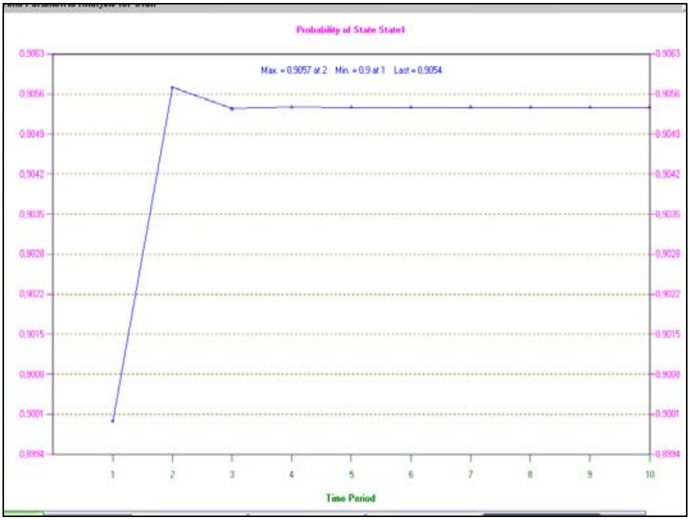


Рис. 3.8. График результатов параметрического анализа

Следует обратить внимание, что программа позволяет определить наименьшее, наибольшее и последнее значения анализируемого параметра и эти значения отражены в верхней части графика на рис. 3.8.

Аналогичным образом можно выполнить параметрический анализ ожидаемых стоимостей состояний в течение заданного периода времени, исходя из вектора начального состояния системы.

3.3. Постановка и решение задач для поглощающих цепей

Рассмотрим другой пример стохастической системы, моделирующий марковский процесс с поглощением. Опишем систему, характеризующую транспортное средство типа автомобиль. Известно, что данная система может пребывать в одном из четырех состояний: e_1 - машина полностью исправна; e_2 - машина имеет незначительные неисправности, позволяющие эксплуатацию; e_3 - машина имеет существенные неисправности, ограничивающие ее эксплуатацию; e_4 - машина вышла из строя и ее дальнейшая эксплуатация невозможна. Следовательно, состояния e_1, e_2, e_3 являются переходными состояниями системы, а e_4 - поглощающее состояние системы.

Особенностью поглощающей системы является тот факт, что вероятность пребывания системы в переходном состоянии убывает по мере того, как растет число испытаний и стационарный вектор $\overline{y}$ становится равным вектору-строке, которая содержит $p_{ii} = 1$. В связи с этим наибольший интерес представляет переходный режим системы и среднее время ее жизни до момента попадания в поглощающее состояние (состояние «гибели» системы).

Пусть задана матрица поглощающей системы «Автомобиль» в формате программы WinQSB (рис. 3.9).

From \ To	State1	State2	State3	State4
State1	0.7	0.2	0.1	
State2		0.6	0.3	0.1
State3			0.5	0.5
State4				1
Initial Prob.	1			
State Cost	10	5	-1	

Рис. 3.9. Исходные данные к задаче «Автомобиль»

Из данной таблицы следует, что система за один цикл никогда не может перейти из состояния e_1 в поглощающее состояние e_4, т.к. $p_{14} = 0$, однако из состояний e_2, e_3 есть возможность перехода за один цикл в состояние гибели с вероятностями $p_{24} = 0{,}1$, $p_{34} = 0{,}5$ соответственно. При этом система не может погибнуть за один цикл, т.к. достаточно велики вероятности непоглощающих состояний: $p_{11} = 0{,}7$, $p_{22} = 0{,}6$, $p_{33} = 0{,}5$. Безусловно, среднее время жизни системы будет зависеть от того, в каком состоянии e_i система находилась в начальный момент времени.

В последнем столбце таблицы, приведенной на рис. 3.10, содержится информация о среднем времени жизни системы до перехода в поглощающее состояние. Так, например, если система находится в состоянии e_1, то среднее время ее жизни составляет примерно семь циклов (6,6667 циклов), а переходы из состояния e_2

или e_3 в поглощающее состояние могут осуществиться за четыре или два цикла соответственно.

03-31-2006	From State	To State	First Passage Time
1	State1	State1	M
2	State1	State2	M
3	State1	State3	M
4	State1	State4	6,6667
5	State2	State1	M
6	State2	State2	M
7	State2	State3	M
8	State2	State4	4
9	State3	State1	M
10	State3	State2	M
11	State3	State3	M
12	State3	State4	2
13	State4	State1	M
14	State4	State2	M
15	State4	State3	M
16	State4	State4	1

Рис. 3.10. Среднее время перехода системы из состояния e_i в состояние e_j

Особенностью данной системы является то, что возврат в состояние, из которого система вышла, невозможен (наличие в переходной матрице нулевых элементов ниже главной диагонали). Невозможность перехода из состояния e_i в состояние e_j, как следует из таблицы на рис. 3.10, обозначена буквой М (символ бесконечности).

Данный факт следует интерпретировать так, что при $t \to \infty$ система обязательно перейдет в состояние e_4 (поглощающее состояние) и, следовательно, в этих условиях система не может задерживаться в переходных состояниях.

На рис. 3.11 даны результаты анализа процесса с поглощением, происходящего за 25 периодов. График получен с помощью опции Parametric Analysis в меню Solve and Analyze. Как следует из данного графика, растет вероятность поглощающего состояния. Практически достоверно (с вероятностью 0,9728), что система перейдет в поглощающее состояние по прошествии 15 циклов.

Программой также предполагается рассмотрение поглощающего процесса в пошаговом режиме с помощью опции Markov Process Step. Например, если система находилась в рабочем состоянии e_1, то спустя 5 циклов будет получен следующий вектор состояний $P^{(5)} = (0.16807,\ 0.18062,\ 0.19981,\ 0{,}45150)$, а через 10 циклов распределение вероятностей состояний будет иметь вид $P^{(10)} = (0.028248,\ 0.044402,\ 0.065028,\ 0.862323)$ и т.д.

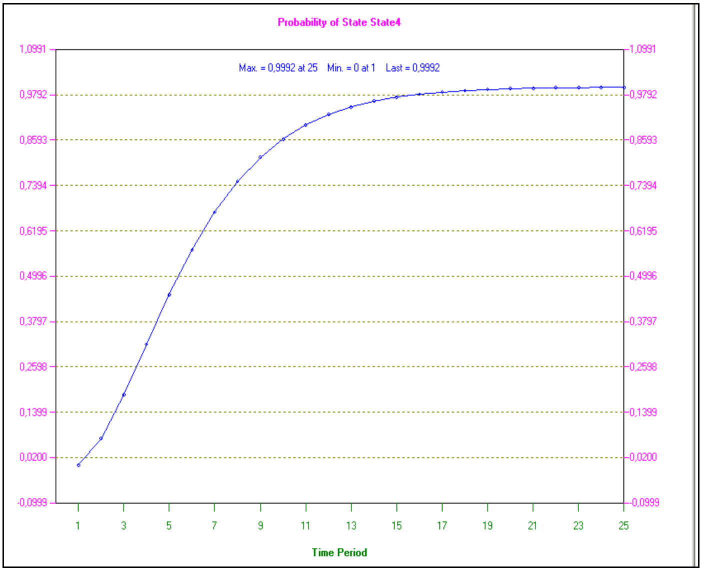


Рис. 3.11. График изменения во времени вероятности поглощающего состояния

Очевидно, что вероятность того, что система находится в одном из переходных состояний, с течением времени уменьшается и значительно возрастает вероятность поглощающего состояния.

3.4. Постановка и решение задачи для непрерывных Марковских цепей

Пусть нормально работающая система ПА (состояние e_0) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_{01}, переходя в новое состояние e_1, в котором она некоторое время может работать с необнаруженным отказом. Как только отказ обнаруживается (интенсивность обнаружения λ_{12}), производится осмотр ПА (состояние e_2). В результате осмотра, ПА либо направляется в ремонт (состояние e_3) с интенсивностью λ_{23}, либо списывается и заменяется новым (состояние e_4) с интенсивностью λ_{24}. Из состояния e_3 с интенсивностью λ_{30} и из состояния e_4 с интенсивностью λ_{40} ПА переходит в рабочее состояние e_0. Найти распределение вероятностей состояний для любого момента времени и финальные вероятности состояний.

Решение: Марковский процесс с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью размеченного графа состояний. Граф состояний для сформулированной задачи приведен на рис. 3.12.

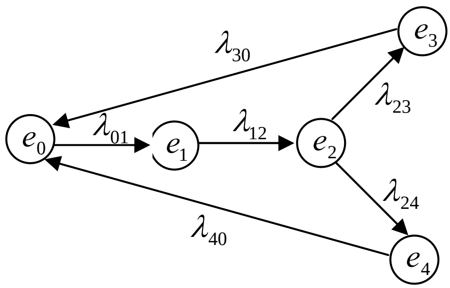


Рис. 3.12. Размеченный граф состояний системы

Пользуясь размеченным графом состояний системы, составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = \lambda_{40}\, p_4 + \lambda_{30}\, p_3 - \lambda_{01}\, p_0 \\ \dfrac{dp_1}{dt} = \lambda_{01}\, p_0 - \lambda_{12}\, p_1 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda_{12}\, p_1 - \lambda_{23}\, p_2 - \lambda_{24}\, p_2 \\ \dfrac{dp_3}{dt} = \lambda_{23}\, p_2 - \lambda_{30}\, p_3 \\ \dfrac{dp_4}{dt} = \lambda_{24}\, p_2 - \lambda_{40}\, p_4 \end{cases}$$

и нормировочное условие $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$

Для определенности придадим параметрам, приведенным в системе дифференциальных уравнений, следующие значения:

$$\lambda_{01} = 0{,}5,\ \lambda_{12} = 2,\ \lambda_{23} = 1{,}5,\ \lambda_{24} = 1{,}5,\ \lambda_{30} = 0{,}8,\ \lambda_{40} = 2.$$

Зададим также начальные условия, т.е. распределение вероятностей состояний в начальный момент времени:

$$p_0(0) = 1,\ p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0\,.$$

В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = 2\,p_4 + 0{,}8\,p_3 - 0{,}5\,p_0 \\ \dfrac{dp_1}{dt} = 0{,}5\,p_0 - 2\,p_1 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = 2\,p_1 - 3\,p_2 \\ \dfrac{dp_3}{dt} = 1{,}5\,p_2 - 0{,}8\,p_3 \\ \dfrac{dp_4}{dt} = 1{,}5\,p_2 - 2\,p_4 \end{cases}$$

Данную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно решить аналитически (методом исключения неизвестных, методом Эйлера или с помощью преобразований Лапласа), но при большой размерности данной системы [1, 2], предпочтительнее получить ее численное решение на ЭВМ.

Для получения численного решения системы используем программу MathCAD, которая имеет необходимые функции для решения дифференциальных уравнений различными методами.

Воспользуемся общепринятой процедурой решения на основе метода Рунге-Кутта. В качестве функции, позволяющей получить решение, выберем функцию $\mathbf{rkfixed(p_0, t_0, t_1, M, D)}$,

где p_0 - начальные условия,

t_0, t_1 - начальная и конечная точки расчета соответственно,

M - число шагов,

$D = D(t, p)$ - матричная форма правых частей системы дифференциальных уравнений.

Листинг с введенными параметрами и полученным результатом решения в системе MathCAD [5] представлен на рис.3.13.

$$p := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t,p) := \begin{pmatrix} -0.5p_0 + 0.8p_3 + 2p_4 \\ 0.5p_0 - 2p_1 \\ 2p_1 - 3p_2 \\ 1.5p_2 - 0.8p_3 \\ 1.5p_2 - 2p_4 \end{pmatrix}$$

$$Z := rkfixed(p, 0, 5, 15, D)$$

Z =

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	0	0	0	0
1	0.333	0.849	0.111	0.033	$4.398 \cdot 10^{-3}$	$3.472 \cdot 10^{-3}$
2	0.667	0.73	0.151	0.071	0.026	0.021
3	1	0.648	0.161	0.093	0.057	0.042
4	1.333	0.597	0.157	0.101	0.087	0.057
5	1.667	0.568	0.151	0.102	0.111	0.067
6	2	0.553	0.146	0.1	0.13	0.071
7	2.333	0.546	0.142	0.097	0.143	0.072
8	2.667	0.543	0.139	0.095	0.151	0.072
9	3	0.542	0.137	0.093	0.157	0.071
10	3.333	0.541	0.136	0.092	0.161	0.07
11	3.667	0.541	0.136	0.091	0.163	0.069
12	4	0.54	0.135	0.091	0.165	0.069
13	4.333	0.54	0.135	0.09	0.166	0.068
14	4.667	0.54	0.135	0.09	0.167	0.068
15	5	0.54	0.135	0.09	0.167	0.068

Рис. 3.13. Решение системы дифференциальных уравнений

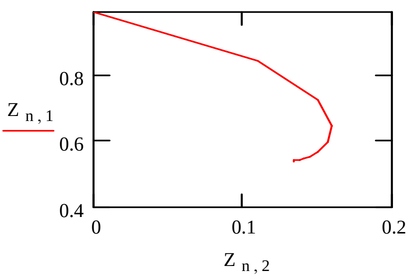


Рис. 3.14. Проекция фазовой траектории для $p_1(t)$ и $p_2(t)$

Из решения (рис 3.13) следует, что спустя период времени $t = 4$ наступает стабилизация случайного процесса. Фрагмент фазового портрета для $p_1(t)$ и $p_2(t)$ приведен на рис. 3.14.

Очевидно, что устойчивость решения подтверждается фазовым портретом (рис. 3.14), взятым для одной из десяти возможных проекций полученных решений.

Дополнительно для иллюстрации численного решения как функции времени приведем соответствующие графики (рис. 3.15).

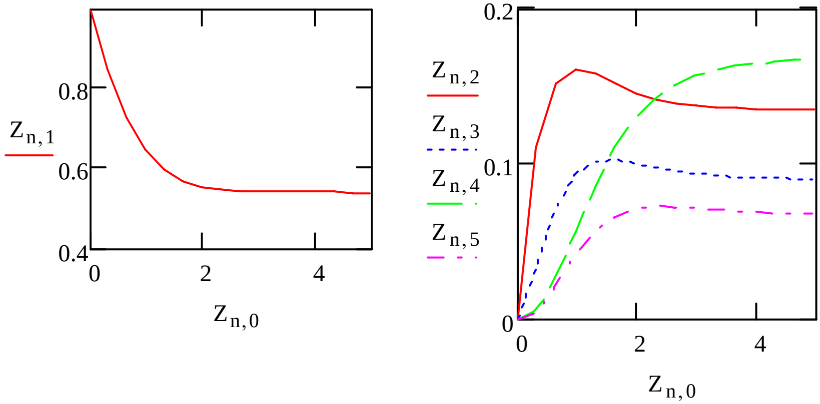


Рис. 3.15. Графики вероятностей состояний как функции времени

Для проверки решения системы дифференциальных уравнений на устойчивость целесообразно воспользоваться функцией отыскания собственных чисел $eigenvals(A)$, имеющейся в системе MathCAD. Результаты вычисления вектора собственных чисел матрицы A приведены ниже:

$$A := \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0.8 & 2 \\ 0.5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -3.523 \\ 0 \\ -1.848 + 1.123i \\ -1.848 - 1.123i \\ -1.08 \end{pmatrix}$$

Принимая во внимание теорему об устойчивости решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, заметим, что корни характеристического уравнения матрицы A не имеют положительных действительных частей, следовательно, полученное решение устойчиво.

Проблема устойчивости для данного класса задач является актуальной, так как предполагается нахождение финальных вероятностей для стохастических систем, описываемых с помощью дифференциальных уравнений Колмогорова.

Для вычисления финальных вероятностей положим левые части в системе дифференциальных уравнений Колмогорова равными нулю, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений. Принимая во внимание нормировочное условие для вероятностей, и отбрасывая одно из уравнений системы, получим неоднородную систему линейных уравнений. Для решения системы средствами MathCAD воспользуемся функцией $lsolve(A,b)$. Результаты вычисления финальных вероятностей приведены ниже.

$$\mathrm{lsolve}(A,b) = \begin{pmatrix} 0.539 \\ 0.135 \\ 0.09 \\ 0.169 \\ 0.067 \end{pmatrix}$$

При этом финальные вероятности можно истолковать как среднее время пребывания системы в данном состоянии. Данная система в среднем 54% времени будет работать нормально, 13,5% времени работать с необнаруженным отказом, 9% времени будет затрачено на диагностику, 17% времени на ремонт и около 7% тратится на замену новым оборудованием.

Знание финальных вероятностей можно использовать для оценки эффективности работы системы. Для этого достаточно задать вектор стоимостей пребывания системы в каждом из состояний [2], которые можно интерпретировать как доход или расход в единицу времени. Тогда в предельном, стационарном режиме средний доход в единицу времени G будет вычисляться как скалярное произведение вектора финальных вероятностей $P=\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$ на вектор стоимостей $C=\left(c_1, c_2, \ldots c_n\right)$, т.е. $G=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot c_i$, где n – число состояний системы.

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

4.1. Теоретические вопросы

1. В чем различие классического и статистического определения вероятности события?
2. Как определяется безусловная и условная вероятность события.
3. Какие события называются совместными и несовместными? Приведите примеры.
4. Какие два события можно назвать зависимыми, какие - независимыми? Приведите примеры.
5. Какие матрицы называются стохастическими?
6. Сформулируйте определение собственных чисел и собственных векторов матрицы.
7. Дайте определение спектра матрицы.
8. Приведите общий вид характеристического уравнения.
9. Какой процесс называют случайным? Приведите примеры.
10. В чем состоит Марковское свойство случайного процесса?
11. Какие разновидности Марковского процесса вы знаете?
12. Какие процессы носят название Марковских цепей?
13. Алгебраическая и геометрическая интерпретация Марковских цепей.
14. В чем смысл элементов переходной матрицы?
15. Как определить переходную матрицу спустя m шагов?
16. Для чего задается вектор начального состояния системы?
17. Как определить вектор состояния системы спустя m шагов?
18. Какие компоненты включает размеченный граф стохастической системы?
19. В чем различие размеченного графа дискретных и непрерывных Марковских цепей?
20. Что понимают под предельными вероятностями состояний?
21. Какие Марковские процессы называют эргодическими?
22. Какое состояние системы называется возвратным?
23. В чем смысл координат стационарного вектора?
24. Как определяется среднее относительное пребывание системы в данном состоянии?
25. Какие Марковские процессы называют поглощающими?
26. Как задать поглощающие состояния системы в Марковском процессе?
27. Как вычисляется среднее время функционирования системы с поглощающими состояниями?

28. Дайте определение основных свойств потока событий.
29. Понятие простейшего потока событий. Какими свойствами он обладает?
30. Как составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для конечной Марковской цепи с непрерывным временем?
31. Как вычислить предельные вероятности состояний цепи с непрерывным временем?
32. Как оценить эффективность работы стохастической системы?

4.2. Теоретические упражнения

1. Какие из следующих матриц являются стохастическими и пригодны для описания Марковского процесса?

$$a)\ \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}02 & -0{,}01 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}98 & 0{,}01 & 0{,}01 \end{pmatrix};\quad b)\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix};$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad d)\ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix};\quad e)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. По размеченным дугам графа, изображенного на рис. 4.1, вычислить отсутствующую на нем разметку p_{ii} петель и построить переходную матрицу Марковской цепи.

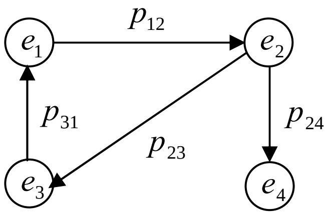


Рис. 4.1. Граф с размеченными дугами

3. Доказать по индукции для регулярной переходной матрицы $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, что $P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix}$ и показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. Показать, что вектор стационарного состояния $\overline{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, определенный в задаче 3 как $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$, можно найти из условия: $\overline{y} \cdot P = \overline{y}$. Дать какую-либо интерпретацию элементам матрицы P и вектору $\overline{y}$.

5. Является ли граф системы, изображенный на рис. 4.2, графом функционирования эргодической Марковской цепи? Записать общий вид переходной матрицы, соответствующей данному графу.

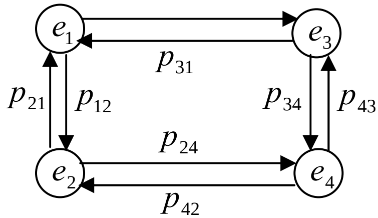


Рис. 4.2. Граф системы с кольцевым сообщением

6. Описать систему с достоверными переходами, граф которой изображен на рис. 4.3, как марковскую цепь и определить:
   а) Является ли переходная матрица P регулярной?
   б) Каков неподвижный стохастический вектор для матрицы P?
   в) Какова m – шаговая переходная матрица этой марковской цепи?

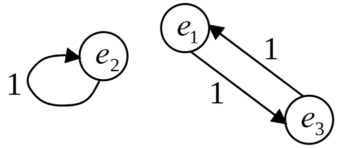


Рис. 4.3. Граф системы с достоверными переходами

7. Дана регулярная переходная матрица $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$. Найти точную формулу для вычисления P^n, используя метод индукции. Оценить $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$, воспользовавшись точной формулой для P^n.
8. Найти неподвижный вектор и неподвижный стохастический вектор (финальных вероятностей) для стохастической матрицы

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

9. Доказать, что все стохастические матрицы вида $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$, где $0 < \alpha < 1$, имеют один и тот же неподвижный стохастический вектор.
10. Система с переходной матрицей, имеющей вид

$$P = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

может быть реализована в следующем мысленном эксперименте. Частица движется вдоль оси таким образом, что абсолютная величина ее скорости остается постоянной, но направление движения может меняться на противоположное. Говорят, что система находится в состоянии e_1, если частица движется направо, и в состоянии e_2, если она движется налево. Тогда $\beta-$вероятность поворота, когда частица движется направо, а $\alpha-$вероятность поворота при движении налево. Найти характеристические числа для данной матрицы P и методом математической индукции показать, что для $n \geq 0$ справедливо выражение

$$P^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & -\beta \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

5. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

5.1. Задачи по регулярным цепям Маркова

1. Имеется водохранилище с тремя уровнями наполнения: полный (состояние e_1), средний (состояние e_2) и критический (состояние e_3). Данная ситема описана как марковская цепь с переходной матрицей

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Вычислить вектор стационарных вероятностей.

2. Дана система S, имеющая пять состояний. Установлено, что с вероятностью 0,6 состояние на следующем шаге остается прежним или с вероятностью 0, 1 может изменяться на любое из оставшихся. Описать процесс как Марковскую цепь. Найти ее переходную матрицу. Какова возможна интерпретация? Определить распределение вероятностей на третьем шаге, т.е. вектор $p^{(3)}$, если известно, что $p^{(1)} = (1, 0, 0, 0, 0)$.

3. Дана Марковская цепь с двумя состояниями e_1 и e_2 и матрицей вероятностей перехода $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Требуется:
   а) Найти вероятность того, что после первого шага этот процесс перейдет в состояние e_1, если вектор начального распределения $p^{(0)} = \left(\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right)$;
   б) То же самое для случая, если $p^{(0)} = \left(\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}\right)$.
4. Вычислить двухшаговое распределение вероятностей для переходной матрицы $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, если задан вектор начального состояния $p^{(0)} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.
5. В некоторой местности климат весьма изменчив. Здесь никогда не бывает двух ясных дней подряд. Если сегодня ясно (состояние e_1), то завтра с одинаковой вероятностью пойдет дождь (состояние e_2) или снег (состояние e_3). Если сегодня снег (или дождь), то вероятностью 0,5 погода не изменится. Если же она изменится, то в половине случаев снег заменяется дождем или наоборот, и лишь в половине случаев на следующий день будет ясная погода. Требуется:
   а) Составить переходную матрицу P;
   б) Построить граф, соответствующий матрице P;
   в) Определить вероятность хорошей погоды через три дня после дождя;
   г) Найти предельные вероятности.

6. В любой данный день человек здоров или болен. Если человек здоров сегодня, то вероятность того, что он будет здоров и завтра оценивается в 98%. Если человек сегодня болен, то завтра он будет здоров лишь в 30% случаев. Описать последовательность состояний здоровья как марковскую цепь. Определить:
   а) Вероятность того, что человек выздоровеет завтра, послезавтра и на третий день, если сегодня он болен;
   б) Ожидаемое число дней, в течение которых больной на сегодняшний день человек остается больным.
7. На окружности расположено шесть точек $e_1, e_2, \ldots, e_6$, равноотстоящих друг от друга. Частица движется из точки в точку следующим образом. Из данной точки она перемещается в одну из ближайших соседних точек с вероятностью 0,25 или в диаметрально противоположную точку с вероятностью 0,5. Записать матрицу вероятностей перехода для этого процесса и построить граф, соответствующий этой матрице. Определить вектор состояний системы после первого шага, если задан вектор начального состояния $p^{(0)} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$.
8. В двух отделениях ящика находятся три шара. Каждую секунду случайным образом выбирается один из трех шаров и перекладывается из одного отделения в другое. В качестве состояния Марковской цепи рассматривается число шаров в первом отделении. Составить матрицу перехода из состояния в состояние за один шаг. Найти переходную матрицу данной системы спустя два шага. Какое физическое явление может быть смоделировано таким образом?
9. Предполагается, что рыбка, находящаяся в одном из пяти отсеков шестипроходного водоема, схема которого приведена на рис. 5.1, с одинаковой вероятностью выбирает любой проход, чтобы выйти из данного отсека. Описать этот эксперимент как марковскую цепь и найти переходную матрицу первого испытания.

   Определить:
   а) Двухшаговую переходную матрицу;
   б) Вероятность того, что рыбка, первоначально находившаяся в отсеке 1, после двух переходов вновь возвратится в этот же отсек.

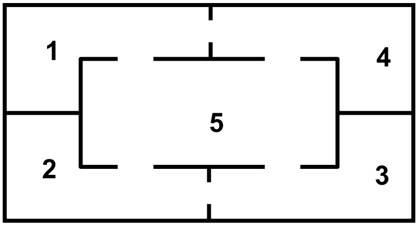


Рис. 5.1. Схема шестипроходного водоема

10. Погода на некотором острове через длительные периоды времени становится то дождливой (состояние e_1), то сухой (состояние e_2). Вероятности ежедневных изменений заданы матрицей $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$. Вычислить:
    а) матрицы прогноза погоды на данном острове на три дня вперед;
    б) вероятность дождливой погоды в ближайшую пятницу, если в среду погода тоже была дождливой;
    в) вероятность солнечной погоды в ближайшую субботу, если всреду погода была дождливой.

5.2. Задачи по поглощающим Марковским цепям

1. Библиотечная книга на конец года находится в одном из четырех следующих состояний: e_0 - на полке; e_1 - выдана читателю; e_2 - в переплетной мастерской; e_3 - в ветхом состоянии (списана). Процесс перехода состояний книги на следующий год описан как цепь Маркова и представлен матрицей:

$$P = \begin{array}{c} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется:
    а) Определить в среднем количество лет жизни книги, если в начальный момент описания цепи книга находилась на полке;

b) Определить вероятность того, что три года подряд читатель будет держать у себя книгу.

2. В учениях участвуют два корабля, которые одновременно производят выстрелы друг в друга и через равные промежутки времени. При каждом обмене выстрелами корабль A поражает корабль B с вероятностью $\frac{1}{2}$, корабль B поражает корабль A с вероятностью равной $\frac{3}{8}$. Предполагается, что при любом попадании корабль выходит из строя. Рассматриваются результаты серии выстрелов.
   Требуется:
   a) Построить матрицу вероятностей перехода, вычислив переходные вероятности p_{ij}, если состояниями цепи являются комбинации кораблей, оставшихся в строю: e_1 - оба корабля в строю; e_2 - в строю корабль A; e_3 - в строю корабль B; e_4 - оба корабля поражены.
   b) Построить граф этой системы.
   c) Определить среднее время ведения боя, если первоначально система находилась в состоянии e_1.

3. Человек, пришедший играть в рулетку с суммой денег $S = s_0$, покидает казино, если в результате игры ему удается увеличить исходную сумму в два или более раз $(S \geq 2s_0)$, или он проигрывает все деньги $(S = 0)$. Имеется возможность делать ставки, равные исходной сумме s_0 или ее половине $\frac{s_0}{2}$. Описывая данную игру как Марковскую цепь, имеем следующие состояния системы: $e_0 -$ исходное состояние системы (у клиента имеется сумма денег $S = s_0$); $e_1 -$ проигрыш всей имеющейся суммы $(S = 0)$; $e_2 -$ проигрыш половины исходной суммы $\left(S = \frac{s_0}{2}\right)$; $e_3 -$ увеличение

исходной суммы в полтора раза $\left(S=\dfrac{3}{2}s_0\right)$; e_4 − увеличение исходной суммы в два или более раз $\left(S \geq 2s_0\right)$.

Требуется:

a) Построить переходную матрицу;
b) Определить стационарный вектор системы.

4. Чтобы получить 1 балл за участие в конкурсе нужно выполнить определенное задание. Вероятность успешного выполнения задания при любом испытании составляет $\dfrac{4}{5}$. Предположим, что мы участвуем в конкурсе до тех пор, пока не получим всего 4 балла. Описать этот процесс как поглощающую Марковскую цепь с пятью состояниями и определить:
   a) Какова ее переходная матрица;
   b) Ожидаемое число повторений задания, прежде чем оно будет успешно выполнено четыре раза, т.е. получено четыре балла.
5. Два игрока A и B играют в некоторую игру (например, в городки). Вероятность того, что выигрывает игрок A, на каждом ходе равна $\dfrac{3}{7}$. Каждый ход игры состоит в том, что игроки держат пари на 1 балл, и игра продолжается до тех пор, пока один из них не проиграет все баллы.
   Требуется:
   a) Описать эту игру как поглощающую Марковскую цепь с девятью состояниями;
   b) Каковы распределения вероятностей состояний после одного и после двух ходов игры;
   c) Дать комментарий к игре, если игрок A начинал ее с 7 баллами, а игрок B с 1 баллом;
   d) Дать еще какую-либо интерпретацию функционирования этой системы-игры.
6. За определенное количество дней можно выполнить строительство объекта (состояние e_0), если имеются на площадке запасы стройматериалов (состояние e_1), или их можно приобрести на оптовой базе (состояние e_2), или непосредствен-

но на заводе-изготовителе (состояние e_3). Ежедневный процесс движения стройматериалов до потребителя описан цепью Маркова с поглощением в e_0:

$$P = \begin{array}{c} e_3 \\ e_2 \\ e_1 \\ e_0 \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется:

a) Определить среднее число дней до доставки стройматериалов на объект, если исходным пунктом считать состояние e_2;

b) Найти вероятность того, что невостребованные потребителем стройматериалы будут оставаться на оптовой базе спустя три дня после начала строительства, если в начале стройки они достоверно там были;

c) В каких отношениях будут находиться сроки строительства объекта, если материалы находились в начальный период строительства соответственно в e_3, e_2 и e_1.

7. Группа из четырех кораблей подвергается последовательным ударам противника. Возможные состояния группы кораблей (системы): e_1 – все корабли целы; e_2 – потоплен один корабль; e_3 – потоплено два корабля; e_4 – потоплено три корабля; e_5 – потоплены все корабли.

Требуется:

a) Определить разметку петель графа;

b) Построить переходную матрицу;

c) Найти вероятность состояний полной группы кораблей после двух и трех последовательных ударов;

d) Найти вероятность того, что после третьего удара будет потоплено не менее двух кораблей;

e) Найти вероятность того, что после второго удара будет потоплено не менее трех кораблей.

8. Рассмотрим игру, в которой играют команды A и B с общим числом n игроков в обеих командах. В каждом туре игры какая-либо из команд получает одного игрока из другой коман-

ды и игра продолжается до тех пор, пока в одной из команд не останется ни одного игрока. Если в команде A имеется k игроков, а в команде B имеется $(n-k)$ игроков, то вероятность того, что в следующем туре игрока выигрывает команда A, есть $\left(\frac{k}{n}\right)^2$. Описать эту игру как поглощающую марковскую цепь и определить:

a) Являются ли правила игры «безобидными» (то есть не дают ли преимущества какой-либо из команд?
b) Каково распределение вероятностей для числа игроков после одного тура и после двух туров игры, если $k=3,\ n=6$?

9. Посетитель банка с намерением получить кредит проходит ряд проверок (состояний): e_1 – оформление документов; e_2 – кредитная история; e_3 – возвратность; e_4 – платежеспособность. По результатам проверки возможны два исхода: отказ в выдаче кредита (e_6) и получение кредита (e_5). Граф этой системы изображен на рис. 5.2.

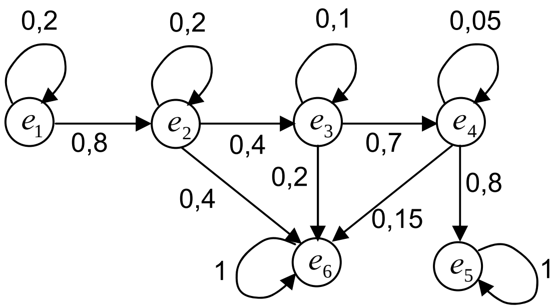


Рис. 5.2. Размеченный граф системы

Требуется:

a) Описать данный процесс как Марковскую цепь и построить переходную матрицу;
b) Найти среднее время получения положительного и отрицательного результата.

10. Предприятие имеет автопарк устаревших машин, которые продолжают эксплуатироваться. Целью является получение

наибольшей прибыли до полного износа оборудования. При этом, если одна из машин выходит из строя, то общая нагрузка распределяется между оставшимися машинами, что ускоряет их износ. Граф данной системы изображен на рис. 5.3.

Требуется:

a) Построить матрицу переходных состояний системы;
b) Определить среднее время жизни системы, если она в начальный момент времени находилась в состоянии e_1 и в состоянии e_2;
c) Найти вектор состояния системы спустя половину времени жизни системы.

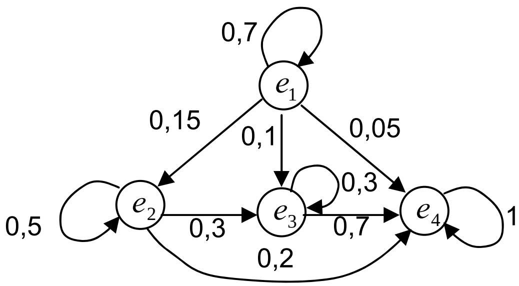


Рис. 5.3. Размеченный граф системы

5.3. Задачи по непрерывным Марковским цепям

Варианты 1-5.

Общая постановка задачи:

Система представляется в виде технического устройства (аппаратура, производственный агрегат и т.п.), которое имеет три узла (элемента). Для работы технического устройства достаточно, чтобы работал хотя бы один узел. Система может находиться в следующих четырех состояниях:

e_1 – все узлы системы работают исправно;

e_2 – только один узел системы вышел из строя и подлежит восстановлению (ремонтируется или планируется его замена);

e_3 – два узла системы вышли из строя и восстанавливаются;

e_4 – все три узла системы вышли из строя и восстанавливаются.

Граф системы приведен на рис. 5.4.

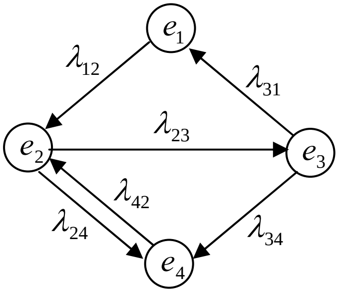


Рис. 5.4. Размеченный граф системы

Интенсивности переходов λ_{ij} из состояния e_i в состояние e_j для каждого варианта приведены ниже.

№ варианта	λ_{12}	λ_{23}	λ_{24}	λ_{31}	λ_{34}	λ_{42}
1	2	2	3	1	2	1
2	3	2	1	2	1	2
3	1	1	2	3	3	3
4	3	3	1	2	1	2
5	2	1	2	3	1	1

Определить:

1. Распределение вероятностей состояний для любого момента времени на интервале $t \in [0,\ 5]$ с шагом $h = 0{,}5$;
2. Вектор финальных вероятностей системы;
3. Эффективность работы системы, если векторы стоимостей состояний системы приведены ниже для каждого варианта.

№ варианта	e_1	e_2	e_3	e_4
1	12	5	-2	-12
2	18	8	-5	-18
3	10	3	-1	-10
4	24	10	-7	-24
5	5	2	-1	-5

Варианты 6-10.

Общая постановка задачи:
Система состоит из двух автоматов, предназначенных для продажи прохладительных напитков, каждый из которых в любой момент времени может выйти из строя, после чего начинается ремонт автомата продолжающийся заранее неизвестное случайное время. Система может находиться в следующих состояниях:

e_1 – оба автомата работают;

e_2 – первый автомат ремонтируется, второй работает;

e_3 – второй автомат ремонтируется, первый работает;

e_4 – оба автомата ремонтируются.

Граф системы приведен на рис. 5.5.

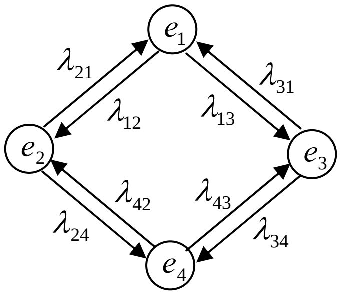


Рис. 5.5. Размеченный граф системы

Интенсивности переходов λ_{ij} из состояния e_i в состояние e_j для каждого варианта приведены ниже.

№ варианта	λ_{12}	λ_{13}	λ_{21}	λ_{24}	λ_{31}	λ_{34}	λ_{42}	λ_{43}
6	1	2	1	2	3	1	3	2
7	2	3	2	1	2	2	1	3
8	3	1	3	3	1	3	2	1
9	2	2	1	1	3	3	2	1
10	1	3	2	1	3	1	2	2

Определить:
1.Распределение вероятностей состояний для любого момента времени на интервале $t \in [0,\ 5]$ с шагом $h = 0{,}5$;
2.Предельные вероятности системы;

3.Средний чистый доход от эксплуатации в стационарном режиме системы, если известно, что в единицу времени исправная работа первого и второго автоматов приносят доход соответственно в a_1 и a_2 ден. единиц, а их ремонт требует затрат соответственно b_1 и b_2 ден. единиц.

№ варианта	a_1	a_2	b_1	b_2
6	10	6	4	2
7	5	3	2	1
8	7	12	3	6
9	8	14	1	3
10	9	3	2	3

Библиографический список

1. Абчук В.А. Справочник по исследованию операций. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.
2. Алексахин С. В., Балдин А.В., Криницын А.Б. и др. Прикладной статистический анализ данных. Теория. Компьютерная обработка. Области применения. Кн. 1 и 2. – М.: «Изд. ПРИОР», 1998. – 336 с., 352 с.
3. Андросенко О.С., Девятченко Л.Д., Маяченко Е.П. Постановка задач Марковских процессов в формате программы WinQSB// Математика. Приложение математики в экономических, технических и педагогических исследованиях: Сб. науч. тр./ Под ред. М.В. Бушмановой. Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2006. С. 3 - 13.
4. Браун Р., Мэзон Р., Фламгольц Э. и др. Исследование операций. В 2-х томах. Пер. с англ. Т. 2. Модели и применения. М.: Мир, 1981. – 677 с., ил.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.:Радио и связь, 1983. – 416 с., ил.
6. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 320 с.
7. Девятченко Л.Д. Стохастические матрицы в исследовании систем: Метод. разработка. Магнитогорск: МГМИ, 1987, 32 с.
8. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. – М.: Наука, 1970.
9. Таха Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е изд.: пер. с англ. – М.: изд. дом «Вильямс», 2005. – 912 с., ил.

10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применение в 2-х т.: пер. с англ. С предисловием Колмогорова А.Н. – М.: Мир, 1984. – 1- 528 с., 1984. – Т. 2 – 752 с.

Оглавление