Министерство образования Республики Беларусь
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

И.Н. РЕВЧУК, В.К. ПЧЕЛЬНИК

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Пособие для студентов специальности
1-40 01 01– ПОИТ

Гродно 2007

УДК 681.3.06+519.6(075.8)
ББК 32.973я73
Р32

Рецензенты: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технической механики и материаловедения ГГАУ *А.А.Денисковец*;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и оптимального управления ГрГУ им. Я.Купалы *З.М.Наркун*.

Рекомендовано советом Института последипломного образования ГрГУ им. Я.Купалы.

Ревчук, И.Н.

Р32 Прикладная математика : пособие / И.Н.Ревчук, В.К.Пчельник. – Гродно : ГрГУ им. Я.Купалы, 2007. — 128 с.

ISBN 978-985-417-911-7

В пособии содержатся теоретический материал, примеры и задания по следующим разделам курса «Дискретная математика»: теория множеств, логика высказываний, нахождение минимального дерева-остова, построение кратчайших путей в графе, нахождение максимального потока в сети, решение задачи коммивояжера. Показаны возможности использования электронных таблиц MS EXCEL и надстройки «Поиск решения» для решения указанных типов задач.

УДК 681.3.06+519.6(075.8)
ББК 32.973я73

ISBN 978-985-417-911-7

1. Множества

Понятие множества является одним из основных понятий современной математики. Это понятие принимается в качестве первоначального и поэтому не определяется через другие.

Георг Кантор выразил понятие множества следующим образом: «Множество есть многое, мыслимое как единое целое».

Множество можно задать непосредственным перечислением всех входящих в него элементов (в произвольном порядке). Но такой способ пригоден лишь для множеств с небольшим количеством элементов. Так, например, множество всех цифр десятичной системы счисления можно представить так: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Универсальным способом задания множества является способ задания характеристических свойств элементов этого множества: $\underset{x}{M}\big[P(x)\big]$ – множество всех таких x, что x обладает свойством P.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Пусть P означает свойство «быть остатком от деления натурального числа на 5». Тогда P(x) – «остаток от деления натурального числа на 5», а $\underset{x}{M}\big[P(x)\big] = \{0,1,2,3,4\}$.

Два множества могут находиться в различных отношениях.

Определение. Множество A включается в множество B, если каждый элемент множества A является также и элементом множества B.

Отношение включения обозначается символом $\subseteq$.

Свойства включения:

1) $A \subseteq A$;
2) для любых множеств A, B, C, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
3) $\varnothing \subseteq A$ для всякого множества A.

Частным случаем включения является равенство.

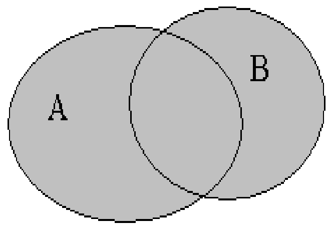
Определение. Два множества A и B называются равными, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ ($A = B$).

Свойства равенства:

1) A = A;
2) для любых множеств A, B, C, если A = B и B = C, то A = C;
3) для любых множеств A и B если A = B, то B = A.

Если $A \subseteq B$, то возможны два случая:

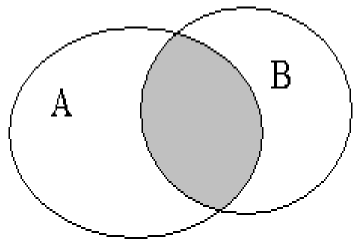
1. Существует хотя бы один элемент множества B, не принадлежащий множеству A. В таком случае говорят, что A – собственное подмножество множества B (строгое включение: $A \subset B$).
2. Не существует ни одного элемента множества B, не принадлежащего A. Этот случай равносилен отношению A = B.



Определение. Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A или множеству B. Математически это можно записать так:

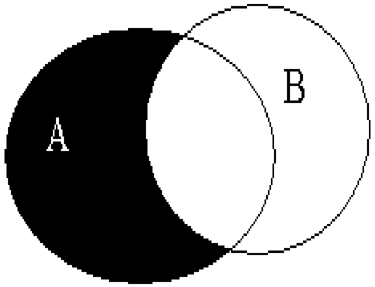
$$A \cup B \underset{Df}{=} \underset{x}{M}\big[x \in A \text{ или } x \in B\big],$$

где $\underset{Df}{=}$ читается: «равно по определению».



Определение. Пересечением $A \cap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B. Математически это можно записать так:

$$A \cap B \underset{Df}{=} \underset{x}{M}\big[x \in A \text{ è } x \in B\big].$$



Определение. Разностью между множеством А и множеством В называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов множества А, которые не принадлежат множеству В. Математически это можно записать так:

$$A \setminus B \underset{Df}{=} \underset{x}{M}\left[x \in A \text{ и } x \notin B\right].$$

Если А $\subseteq$ М, то разность М \ А называется дополнением множества А до множества М. Если М – универсальное множество, то под $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ понимают дополнения множеств А, В и С до универсального:

$$\overline{A} \underset{Df}{=} \underset{x}{M}\left[x \notin A\right].$$

Определение. Произведением А × В множества А на множество В называется множество всевозможных пар, первые элементы которых принадлежат А, а вторые – В:

$$A \times B \underset{Df}{=} \underset{(x,y)}{M}\left[x \in A \text{ и } y \in B\right].$$

Пусть А={a, b, c}, В={n, p}. Тогда

А × В ={(a, n), (a, p), (b, n), (b, p), (c, n), (c, p)},
В × А ={(n, a), (n, b), (n, c), (p, a), (p, b), (p, c)}.

Произведение двух множеств допускает распространение на большее число множеств:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \underset{Df}{=}$$
$$= \underset{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{M}\left[x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\right].$$

Приведем основные свойства операций объединения, пересечения и дополнения.

1. *Коммутативность*:
   1.1. $A \cup B = B \cup A$;
   1.2. $A \cap B = B \cap A$.
2. *Ассоциативность*:
   2.1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
   2.2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
3. *Дистрибутивность*:
   3.1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
   3.2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
4. *Идемпотентность*:
   4.1. $A \cup A = A$;
   4.2. $A \cap A = A$.
5. *Поглощение:*
   5.1. $A \cup (A \cap B) = A$;
   5.2. $A \cap (A \cup B) = A$.
6. *Законы де Моргана*:
   6.1. $\overline{A \cup A} = \overline{A} \cap \overline{A}$;
   6.2. $\overline{A \cap A} = \overline{A} \cup \overline{A}$.
7. *Закон двойного отрицания*: $\overline{\overline{A}} = \grave{A}$.
8. *Закон включения*: если $\grave{A} \subset \hat{A}$, то $\overline{A} \subset \overline{A}$.
9. Свойства нуля и единицы (нуль – пустое множество, единица – универсальное множество М):
   9.1. $A \cup \varnothing = A$;
   9.2. $A \cap \varnothing = \varnothing$;
   9.3. $A \cup M = M$;
   9.4. $A \cap M = A$.
10. Выражение для разности:
    $\grave{A} \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Мощностью конечного множества A (обозначается $|A|$) называется число элементов этого множества. Например, мощность множества $A = \{1, 2\}$ равна 2 ($|A| = 2$).

Пусть множество A содержит n элементов. Тогда множество всех подмножеств этого множества $P(A)$ состоит из 2^n элементов. Таким образом, $|P(A)| = 2^n$.

Задача 1. 1. Определить мощности объединения конечных множеств для n = 2 и n = 3.

Решение. а). Пусть A и B – два пересекающихся множества. Докажем с помощью диаграммы Эйлера-Венна следующее соотношение:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \qquad (1)$$

Из рис. 1 видно, что

$$|A \cup B| = n_1 + n_2 + n_3, |A| = n_1 + n_2, |B| = n_2 + n_3, |A \cap B| = n_2.$$

Очевидно, что

$$n_1 + n_2 + n_3 = (n_1 + n_2) + (n_2 + n_3) - n_2,$$

что и доказывает формулу (1).

Формула (1) справедлива и для случая, если множества A и B не пересекаются. В этом случае $|A \cup B| = |A| + |B|$.

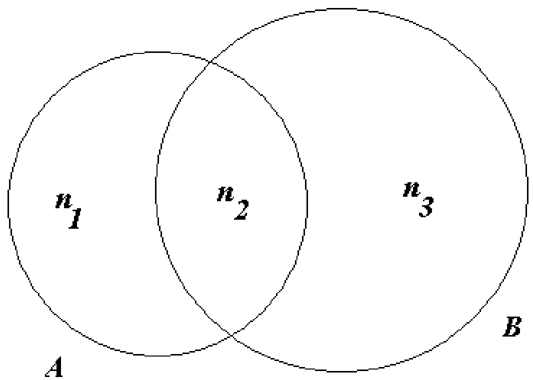


Рисунок 1

б). Пусть $n = 3$, A, B и C – три пересекающихся множества. В этом случае справедливо следующее соотношение:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + \\ + |A \cap B \cap C|. \qquad (2)$$

Из рис. 2 видно, что

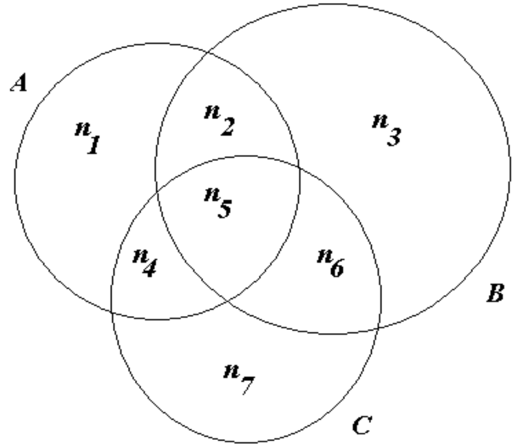


Рисунок 2

$$|A \cup B \cup C| = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7,$$

$$|A| = n_1 + n_2 + n_4 + n_5,$$

$$|B| = n_2 + n_3 + n_5 + n_6,$$

$$|C| = n_4 + n_5 + n_6 + n_7,$$

$$|A \cap B| = n_2 + n_5,$$

$$|A \cap C| = n_4 + n_5,$$

$$|B \cap C| = n_5 + n_6,$$

$$|A \cap B \cap C| = n_5.$$

Очевидно, что

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7=(n_1+n_2+n_4+n_5)+$$
$$+(n_2+n_3+n_5+n_6)+(n_4+n_5+n_6+n_7)-$$
$$-(n_2+n_5)-(n_4+n_5)-(n_5+n_6)+n_5,$$

что и доказывает формулу (2).

Формула (2) справедлива и для случая, если множества A, B и C попарно не пересекаются. В этом случае

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|.$$

Формулы вида (1) и (2) распространяются на случай n множеств. Если $\grave{A}_1$, $\grave{A}_2$, …, $\grave{A}_n$ — некоторые множества и $|\grave{A}_1|$, $|\grave{A}_2|$, …, $|\grave{A}_n|$ — мощности этих множеств соответственно, то

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_n|-$$
$$-\left(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+\ldots|A_1\cap A_n|+\ldots+|A_{n-1}\cap A_n|\right)+$$
$$+\left(|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+\ldots+|A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n|\right)+$$
$$+\ldots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|.$$

Задача 1. 2. В группе спортсменов 30 человек. Из них 20 занимаются плаванием, 18 – легкой атлетикой и 10 – лыжами. Плаванием и легкой атлетикой занимаются 11 человек, плаванием и лыжами – 8, легкой атлетикой и лыжами – 6 человек. Сколько спортсменов занимаются всеми тремя видами спорта?

Решение. Исходя из условия, получаем, что

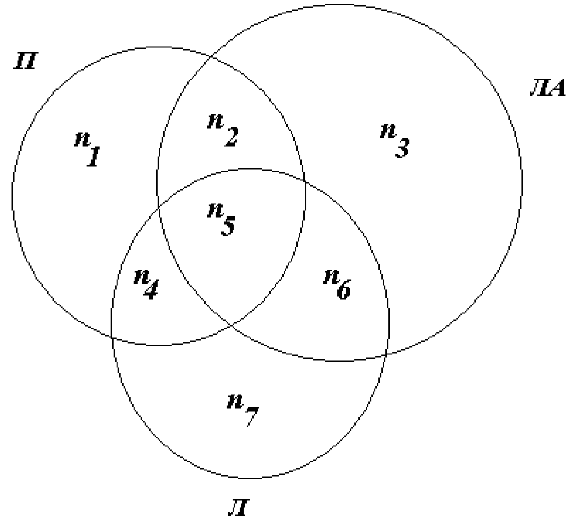
$$|\text{Ï}\cup\text{ËÀ}\cup\text{Ë}|=30,\ |\text{Ï}|=20, |\text{ËÀ}|=18, |\text{Ë}|=10,\ |\text{Ï}\cap\text{ËÀ}|=11,$$
$$|\text{Ï}\cap\text{Ë}|=8, |\text{ËÀ}\cap\text{Ë}|=6.$$

Следовательно,

$$30=20+18+10-11-8-6+|\text{Ï}\cap\text{ËÀ}\cap\text{Ë}|,$$

то есть $30-23=|\text{Ï}\cap\text{ËÀ}\cap\text{Ë}|, |\text{Ï}\cap\text{ËÀ}\cap\text{Ë}|=7.$

Найдем решение этой же задачи, используя надстройку «Поиск решения» MS EXCEL. Для этого представим данные на рабочем листе так, как на рис. 3.



$$|\text{Ï}\cup\text{ËÀ}\cup\text{Ë}|=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7,$$
$$|\text{Ï}|=n_1+n_2+n_4+n_5,$$
$$|\text{ËÀ}|=n_2+n_3+n_5+n_6,$$
$$|\text{Ë}|=n_4+n_5+n_6+n_7,$$
$$|\text{Ï}\cap\text{ËÀ}|=n_2+n_5,$$
$$|\text{Ï}\cap\text{Ë}|=n_4+n_5,$$
$$|\text{ËÀ}\cap\text{Ë}|=n_5+n_6,$$
$$|\text{Ï}\cap\text{ËÀ}\cap\text{Ë}|=n_5.$$

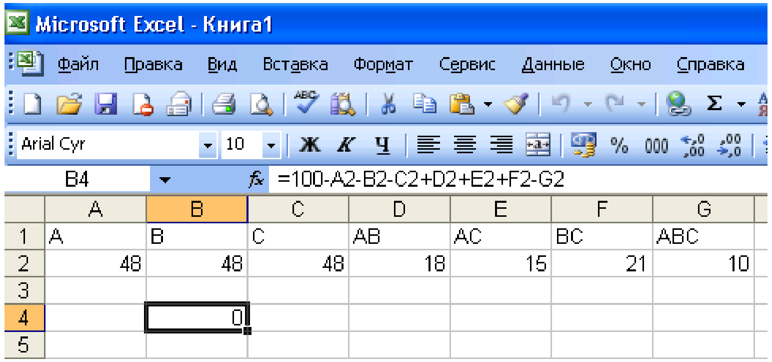


Рисунок 3

Целевую функцию разместим в ячейке B4 и установим равной 100-A2-B2-C2+D2+E2+F2-G2. Окна диалога надстройки и ее параметров при этом должны принять вид как на рис. 4–5.

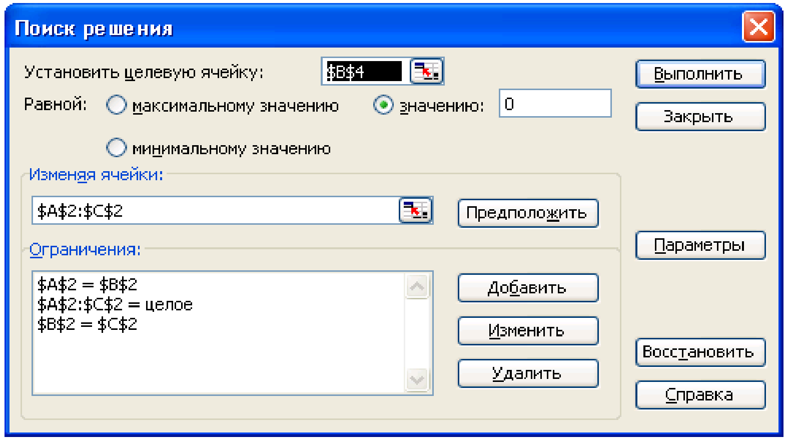


Рисунок 4

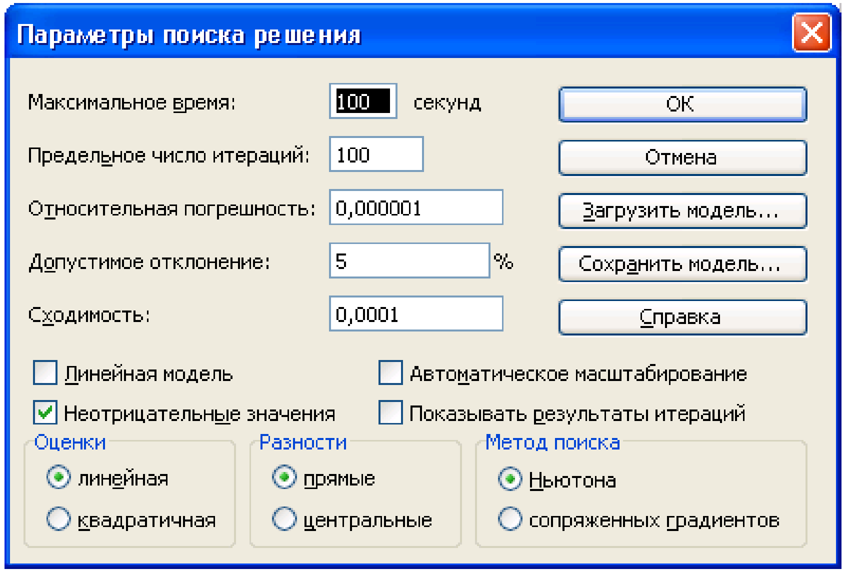


Рисунок 5

На рис. 6 приведено полученное решение.

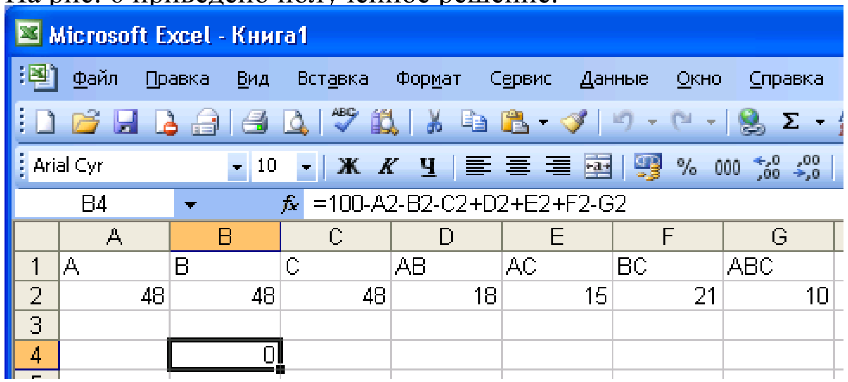


Рисунок 6

Задача 1. 3. Найти количество целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 3, 5, и 7.

Решение. Пусть A, B, C — множества целых положительных чисел, не превосходящих 1000, делящихся нацело на

3, 5, и 7 соответственно. Тогда A∩B, A∩C, B∩C, A∩B∩C — множества целых положительных чисел, не превосходящих 1000, делящихся нацело на15 = 3·5, 35 = 5·7, 21 = 3·7 и 105 = 3·5·7 соответственно. Тогда

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| +$$

$$+|A \cap B \cap C| = \left[\frac{1000}{3}\right] + \left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{1000}{7}\right] - \left[\frac{1000}{3 \cdot 5}\right] - \left[\frac{1000}{3 \cdot 7}\right] -$$

$$-\left[\frac{1000}{5 \cdot 7}\right] + \left[\frac{1000}{3 \cdot 5 \cdot 7}\right] = 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543.$$

Следовательно, количество целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 3, 5, и 7, равно 1000 – 543 = 457.

Задача 1. 4. Доказать, что для любых множеств *A, B* и *C* выполняется соотношение

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Решение. Чтобы доказать некоторое тождество вида *A* = *B*, нужно доказать, что:

1) если $x \in A$, то $x \in B$;

2) если $x \in B$, то $x \in A$.

Докажем свойство дистрибутивности для объединения, то есть, что $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1. Предположим, что для некоторого элемента *x* имеет место соотношение $x \in A \cup (B \cap C)$. Докажем, что *x* принадлежит и правой части, т.е. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Действительно, пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. Тогда либо $x \in A$, либо
$x \in B \cap C$. Рассмотрим каждую из этих возможностей.

а). Пусть $x \in A$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$ (это верно для любых множеств *B* и *C*). Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

б). Пусть $x \in B \cap C$. Но тогда согласно определению пересечения $x \in B$ *и* $x \in C$). Поэтому $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$ (это верно для любого множества *A*). Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. Предположим, что для некоторого элемента *x* имеет место соотношение $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Докажем, что $x \in A \cup (B \cap C)$.

Действительно, пусть $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда $x \in A \cup B$ и одновременно $x \in A \cup C$.

Пусть $x \in A$. Тогда $x \in A \cup (B \cap C)$ (это верно для любых множеств *B* и *C*), и утверждение доказано.

Если $x \notin A$, то $x \in B$ и $x \in C$, то есть, $x \in B \cap C$. Но тогда $x \in A \cup (B \cap C)$, что доказывает наше утверждение.

Доказательство тождеств можно проиллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. На рис. 7 и 8 изображено формирование левой части равенства – $A \cup (B \cap C)$. На рис. 9, 10 и 11 – правой части – $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

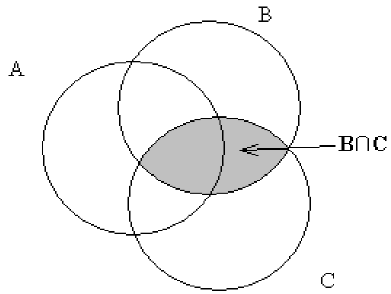


Рисунок 7

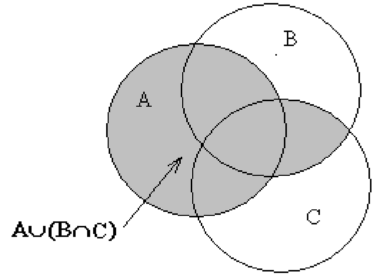


Рисунок 8

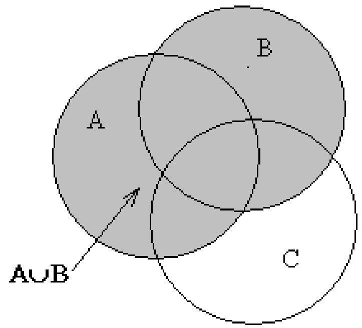


Рисунок 9

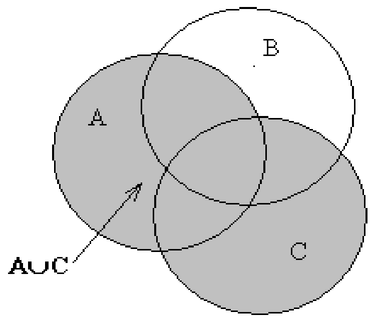


Рисунок 10

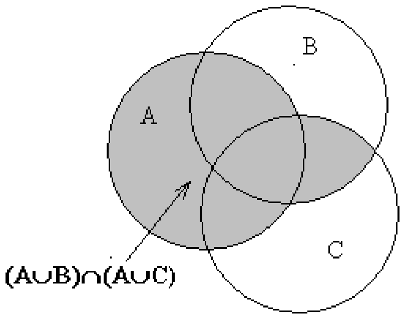


Рисунок 11

Задача 1. 5. Доказать, что $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Решение. Преобразуем левую часть равенства, учитывая, что

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}:$$

$$A \setminus (A \setminus B) = A \setminus (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{A \cap \overline{B}} = A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) =$$

$$= A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

Задача 1. 6. Пусть A={x∈N| 2<x≤6}, B={x∈N| 1<x<4}, C={x∈N| x^2-4=0}. Найти (A∩B) ∪B∪C, C×B, B×C.

Решение. A={3, 4, 5, 6}, B={2, 3}, C={2}. Тогда A∩B={3}, B∪C={2, 3}, (A∩B) ∪B∪C={2, 3}.

C×B={(2, 2), (2, 3)}, B×C={(2, 2), (3, 2)}.

Задачи для самостоятельного решения

1. У фирмы есть 100 предприятий, причем каждое предприятие выпускает хотя бы одну продукцию вида A, B или C. Продукцию всех трех видов выпускают 10 предприятий, продукцию вида A и B – 18 предприятий, продукцию вида A и C – 15 предприятий, продукцию вида B и C – 21 предприятие. Число предприятий, выпускающих продукцию вида A, равно числу предприятий, выпускающих продукцию вида B, и равно числу предприятий, выпускающих продукцию вида C. Найти число предприятий, выпускающих только продукцию вида A.

2. В студенческой группе 20 человек. Из них 10 имеют оценку «девять» по английскому языку, 8 – по математике, 7 – по физике, 4 – по английскому языку и по математике, 5 – по английскому языку и по физике, 4 – по математике и по физике, 3 – по английскому языку, по математике и по физике. Сколько студентов в группе не имеют оценок «девять»?
3. В классе 20 человек. На экзаменах по истории, математике и литературе 10 учеников не получили ни одной оценки «9», 6 учеников получили «9» по истории, 5 – по математике и 4 – по литературе, 2 – по истории и математике, 2 – по истории и литературе, 1 – по математике и литературе. Сколько учеников получили «9» по всем предметам?
4. В спортивном лагере 100 человек, занимающихся плаванием, легкой атлетикой и лыжами. Из них 10 занимаются и плаванием, и легкой атлетикой, и лыжами, 18 – плаванием и легкой атлетикой, 15 – плаванием и лыжами, 21 – легкой атлетикой и лыжами. Число спортсменов, занимающихся плаванием, равно числу спортсменов, занимающихся легкой атлетикой, и равно числу спортсменов, занимающихся лыжами. Найти это число.
5. Группе студентов предложены спецкурсы по мультимедиа, искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 22 студента записались на спецкурс по мультимедиа, 18 – на спецкурс по искусственному интеллекту, 10 – на спецкурс по имитационному моделированию, 8 – на спецкурсы по мультимедиа и искусственному интеллекту, 15 – на спецкурсы по мультимедиа и имитационному моделированию, 7 – на спецкурсы по искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 5 студентов записались на все три спецкурса. Сколько студентов в группе?
6. Во время сессии 24 студента группы должны сдать три зачета: по физике, математике и программированию. 20 студентов сдали зачет по физике, 10 – по математике, 5 – по программированию, 7 – по физике и математике, 3 – по физике и программированию, 2 – по математике и программированию. Сколько студентов сдали все три зачета?
7. В группе переводчиков 15 человек владеют английским языком, 19 – французским, 8 – немецким. 9 переводчиков владеют английским и французским языками, 7 – английским и

немецким, 6 – французским и немецким. 4 переводчика владеют всеми тремя языками. Сколько переводчиков в группе?

8. Опрос группы студентов показал, что 70 % из них любят ходить в кино, 60 % – в театр, 30 % – на концерты. В кино и театр ходят 40 % студентов, в кино и на концерты – 20 %, в театр и на концерты – 10 %. Сколько студентов (в %) ходят в кино, театр и на концерты?

9. В группе 20 студентов. После медицинского осмотра 14 студентов были направлены на дополнительное обследование к терапевту, 6 – к окулисту, 5 – к ортопеду. К терапевту и окулисту были направлены 3 студента, к терапевту и ортопеду – 3, к окулисту и ортопеду – 2. Сколько студентов было направлено к терапевту, окулисту и ортопеду?

10. При обследовании рынка спроса инспектор указал в опросном листе следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 покупают жевательную резинку «Dirol», 752 – «Orbit» , 418 – «Stimorol», 570 – «Dirol» и «Orbit», 356 – «Dirol» и «Stimorol», 348 – «Orbit» и «Stimorol», 297 – все виды жевательной резинки. Не ошибся ли инспектор?

11. Всем участникам автопробега не повезло. 12 из них увязли в песке – пришлось толкать машину, 8 понадобилась замена колеса, у шестерых перегрелся мотор, пятеро толкали машину и меняли колесо, четверо толкали машину и остужали мотор, трое меняли колесо и остужали мотор. Одному пришлось испытать все виды неполадок. Сколько всего было участников автопробега?

12. В цеху имеется 25 станков, которые могут выполнять три вида операций: А, В и С. Из них 10 станков выполняют операцию А, 15 – В, 12 – С. Операции А и В могут быть выполнены на 6 станках, А и С – на 5, В и С – на 3 станках. Сколько станков могут выполнять все три операции?

13. В студенческой группе 25 человек. Чтобы получить допуск на экзамен по данному курсу необходимо защитить курсовую работу, выполнить лабораторную работу и сдать зачет. 15 студентов защитили курсовую работу, 20 — выполнили лабораторную работу, 17 — сдали зачет. Защитили курсовую работу и выполнили лабораторную работу 12 человек. Защитили курсовую работу и сдали зачет 13 человек. Выполнили лабораторную работу и сдали зачет 16 человек. Сколько студентов допущено к экзамену?

14. В одной студенческой группе программистов 10 человек могут писать программы на Delphi, 10 – на Паскале, 6 – на Си. По два языка знают: 6 человек – Delphi и Паскаль, 4 – Паскаль и Си, 3 – Delphi и Си. Один человек знает все три языка. Сколько студентов в группе?

15. В день авиации на аэродроме всех желающих катали на самолете, планере и вертолете. На самолете прокатились 30 человек, на планере – 20, на вертолете – 15. И на самолете, и на планере каталось 10 человек, на самолете и вертолете – 12, на планере и вертолете – 5. Два человека прокатились и на самолете, и на планере, и на вертолете. Сколько было желающих прокатиться?

16. Эквивалентны ли следующие множества:

16.1. $A = \{x : x^2 - 8x + 15 = 0\}$ и $B = \{2, 3\}$;

16.2. $A = \{x : x^3 - 1 = 0\}$ и $B = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

16.3. $A = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ и $B = \{2, 3\}$;

16.4. $A = \{ 2^n, n = 1, 2, \ldots\}$ и $B = \{n^2, n = 1, 2, \ldots\}$;

16.5. $A = \{y: y = 3^x, 0<x< \infty\}$ и $B = \{y: y = 3^{\mathrm{n}}, \mathrm{n} = 1, 2, \ldots\}$?

17. Нарисовать диаграммы Эйлера-Венна для следующих множеств:

17.1. $\overline{A} \cup \overline{B}$;

17.2. $\overline{A} \cap (B \cup C)$;

17.3. $(A \setminus B) \cap C$;

17.4. $(A \setminus B) \cup C$;

17.5. $(\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cup B)$;

17.6. $(A \cap B) \cup (C \setminus (A \cup B))$;

17.7. $A \cap (B \cup C)$;

17.8. $A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$;

17.9. $\overline{C} \setminus \overline{A \cup B}$;

17.10. $\overline{A \cup B} \cap C$;

17.11. $\overline{A} \setminus \overline{B \cup C}$;

17.12. $\overline{A}\cap Ñ\cup\overline{B}\cap C$.

18. Имеют ли место равенства:

18.1. $(A\setminus B)\cup(A\cap B)=A$;

18.2. $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=A\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap B$;

18.3. $\overline{C}\setminus\overline{A\cup B}=\overline{A}\setminus\overline{B\cup C}$;

18.4. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cap\overline{C}$;

18.5. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap\overline{C}$;

18.6. $\overline{A\cup B}\cap C=\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$;

18.7. $\overline{C}\setminus\overline{A\cup B}=\overline{A}\setminus\overline{B\cup C}$;

18.8. $\overline{A\cap B}\cup C=\overline{A}\cup\overline{B}\cup C$;

18.9. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap\overline{C}$;

18.10. $\overline{A\cup B}\cap C=C\setminus(C\cap(A\cup B))$;

18.11. $A\cap B\cap(A\cup B)=B$?

2. Логика высказываний

Высказыванием называется повествовательное языковое предложение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно.

Отрицанием высказывания A называется высказывание $\overline{A}$, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A ложно.

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание $A\wedge B$, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B. При записи соотношений логики высказываний знак конъюнкции иногда опускают, то есть вместо записи $A\wedge B$ используют запись AB.

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание $A\vee B$, ложное тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания A и B.

Импликацией двух высказываний A и B называется высказывание $A\rightarrow B$, ложное тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.

Эквиваленцией двух высказываний A и B называется высказывание $A\leftrightarrow B$, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B одновременно истинны или ложны.

Приведем индуктивное определение формулы логики высказываний.

1. Любая высказывательная переменная, а также константы И (истина), Л (ложь) есть формула.
2. Если A и B – формулы, то $\overline{A}$, $A\wedge B$, $A\vee B$, $A\rightarrow B$, $A\leftrightarrow B$, есть формулы.
3. Ничто, кроме указанного в пунктах 1 – 2, не есть формула.

Две формулы называются равносильными, если на всех одинаковых наборах переменных значения этих формул совпадают. Равносильность формул A и B обозначают $A\equiv B$.

Для того, чтобы установить равносильность формул, можно составить таблицы значений (таблицы истинности) для каждой формулы и сравнить их. Для равносильных формул эти таблицы совпадают. Другой способ установления равносильности формул заключается в использовании некоторых установленных равносильностей формул логики высказываний.

Для любых формул A, B и C справедливы следующие равносильности:

1) *коммутативность:*
   1.1. $A\wedge B\equiv B\wedge A\,(AB\equiv BA)$;
   1.2. $A\vee B\equiv B\vee A$;
2) *ассоциативность*:
   2.1. $A(BC)\equiv(AB)C$;
   2.2. $A\vee(B\vee C)\equiv(A\vee B)\vee C$;
3) *дистрибутивность:*
   3.1. $A(B\vee C)\equiv AB\vee AC$;
   3.2. $A\vee BC\equiv(A\vee B)(A\vee C)$;
4) *законы де Моргана*:
   4.1. $\overline{AB}\equiv\overline{A}\vee\overline{B}$;
   4.2. $\overline{A\vee B}\equiv\overline{A}\,\overline{B}$;
5) *идемпотентность*:
   5.1. $AA\equiv A$;
   5.2. $A\vee A\equiv A$;
6) *поглощение:*

6.1. $A(A \vee B) \equiv A$;

6.2. $A \vee AB \equiv A$;

7) $(A \vee B)(A \vee \overline{B}) \equiv A$;

8) *двойное отрицание:*

9) $\overline{\overline{A}} \equiv A$;

10) *свойства констант*:

10.1. $A\grave{E} \equiv A$;

10.2. $A\ddot{E} \equiv \ddot{E}$;

10.3. $A \vee \grave{E} \equiv \grave{E}$;

10.4. $A \vee \ddot{E} \equiv A$;

10.5. $\overline{\ddot{E}} \equiv \grave{E}$;

10.6. $\overline{\grave{E}} \equiv \ddot{E}$;

11) *закон противоречия*:

$A\overline{A} \equiv \ddot{E}$.

12) *закон «исключенного третьего»:*

$A \vee \overline{A} \equiv \grave{E}$;

13) замена операций импликации и эквиваленции:

13.1. $A \rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$;

13.2. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B)(B \rightarrow A)$.

Каждая из перечисленных равносильностей может быть доказана с помощью таблиц значений функций, составленных для выражений, стоящих слева и справа от символа «≡».

Справедливы также обобщенные законы дистрибутивности и обобщенные законы де Моргана:

14) $(A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n)(B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_m) \equiv$
$A_1B_1 \vee A_1B_2 \vee ... \vee A_1B_m \vee ... \vee A_nB_1 \vee A_nB_2 \vee A_nB_m$;

15) $(A_1A_2...A_n) \vee (B_1B_2...B_m) \equiv$
$(A_1 \vee B_1)(A_1 \vee B_2)...(A_1 \vee B_m)...(A_n \vee B_1)(A_n \vee B_2)...(A_n \vee B_m)$;

16) $\overline{A_1A_2...A_n} \equiv \overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee ... \vee \overline{A_n}$;

17) $\overline{A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n} \equiv \overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge ... \wedge \overline{A_n}$ $(\overline{A_1}\ \overline{A_2}...\overline{A_n})$.

Формула называется тождественно-истинной, если для любых наборов переменных она принимает значение И.

Формула называется тождественно-ложной, если для

любых наборов переменных она принимает значение Л.

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания, причём среди переменных могут быть одинаковые.

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания, причём среди переменных могут быть одинаковые.

Всякую дизъюнкцию элементарных конъюнкций называют дизъюнктивной нормальной формой, то есть ДНФ. Всякую конъюнкцию элементарных дизъюнкций называют конъюнктивной нормальной формой, то есть КНФ.

Совершенной ДНФ (СДНФ) называется ДНФ, в которой нет равных элементарных конъюнкций, и все они содержат одни и те же переменные, причём каждую переменную только один раз (возможно с отрицанием).

Совершенной КНФ (СКНФ) называется КНФ, в которой нет равных элементарных дизъюнкций, и все они содержат одни и те же переменные, причём каждую переменную только один раз (возможно с отрицанием).

Приведем алгоритм получения СДНФ и СКНФ по таблице истинности. Формулы можно получить, выполнив четыре пункта алгоритма.

<table>
<tr><th>СДНФ</th><th>СКНФ</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Конструирование СДНФ и СКНФ начинается с таблицы истинности.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Отметим те строки таблицы, выходы которых равны</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Выписываем для каждой отмеченной строки комбинацию переменных через знак</td></tr>
<tr><td>конъюнкции (∧)</td><td>дизъюнкции (∨)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Знаки операции отрицания расставим следующим образом:</td></tr>
<tr><td>если переменная равна 1, то запишем саму эту переменную, если же она равна 0, то запишем ее отрицание.</td><td>если переменная равна 0, то запишем саму эту переменную, если же она равна 1, то запишем ее отрицание.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Все полученные выражения связываем операцией</td></tr>
<tr><td>дизъюнкции</td><td>конъюнкции</td></tr>
</table>

Можно получить СДНФ и СКНФ путем равносильных преобразований.

Приведем один из способов перехода от ДНФ к КНФ. Ставим над ДНФ два отрицания и с помощью правил де Моргана (не трогая верхнее отрицание) приводим отрицание ДНФ снова к ДНФ. При этом приходится раскрывать скобки с использованием равносильных преобразований. Отрицание (верхнее) полученной ДНФ (по правилу де Моргана) сразу дает КНФ. Второй способ перехода от ДНФ к КНФ — использование дистрибутивного закона.

Переход от КНФ к ДНФ осуществляется простым раскрытием скобок.

Приведем способ перехода от ДНФ к СДНФ. Если в какой-то простой конъюнкции не хватает переменной, например, z, вставляем в нее выражение $z \vee \overline{z} = 1$, после чего раскрываем скобки (при этом повторяющиеся дизъюнктные слагаемые не пишем).

Переход от КНФ к СКНФ осуществляется способом, аналогичным предыдущему: если в простой дизъюнкции не хватает какой-то переменной (например, z), то добавляем в нее выражение $z \wedge \overline{z} = 0$ (это не меняет самой дизъюнкции), после чего раскрываем скобки с использованием распределительного закона.

Задача 2. 1. Во время археологической практики Алексей, Борис и Григорий нашли в земле сосуд. Рассматривая находку, каждый высказал по два предположения:
Алексей: «Это греческий сосуд, изготовленный в V веке».
Борис: «Это финикийский сосуд, изготовленный в III веке».
Григорий: «Это не греческий сосуд, изготовленный в IV веке».
Руководитель практики сказал студентам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

Решение. Примем следующие обозначения для высказываний студентов:

Г – «это греческий сосуд»;
Ф – «это финикийский сосуд»;
Т – «сосуд изготовлен в III веке»;

Ч – «сосуд изготовлен в IV веке»;
П – «сосуд изготовлен в V веке».

Тогда высказывание «Это греческий сосуд, изготовленный в V веке» можно записать так: ГП. Из слов преподавателя следует, что это высказывание ложно (ГП=0). Так как Алексей прав только в чем-то одном, то или Г=1, или П=1. Следовательно, истинным будет высказывание $\tilde{A}\overline{\ddot{I}} \vee \overline{\tilde{A}}\ddot{I} = 1$.

Аналогично, из слов Бориса и преподавателя следует, что $\hat{O}\overline{\grave{O}} \vee \overline{\hat{O}}\grave{O} = 1$, а из слов Григория и преподавателя, – что $\overline{\tilde{A}} \wedge \overline{\times} \vee \overline{\overline{\tilde{A}}} \wedge \times = 1$, то есть $\overline{\tilde{A}} \wedge \overline{\times} \vee \tilde{A}\times = 1$. Кроме того, ясно, что сосуд может быть изготовлен только в одном из веков и только в одной из стран. Эти условия можно записать так:

$$\grave{O}\overline{\times}\,\overline{\ddot{I}} \vee \overline{\grave{O}}\times\overline{\ddot{I}} \vee \overline{\grave{O}}\,\overline{\times}\ddot{I} = 1 \text{ и } \hat{O}\overline{\tilde{A}} \vee \overline{\hat{O}}\tilde{A} = 1.$$

Таким образом, получено пять тождественно истинных высказываний. Если их логически перемножить, то результат должен быть также тождественно истинным высказыванием:

$$\left(\tilde{A}\overline{\ddot{I}} \vee \overline{\tilde{A}}\ddot{I}\right)\left(\overline{\tilde{A}} \wedge \overline{\times} \vee \tilde{A}\times\right)\left(\hat{O}\overline{\grave{O}} \vee \overline{\hat{O}}\grave{O}\right)\left(\hat{O}\overline{\tilde{A}} \vee \overline{\hat{O}}\tilde{A}\right)\left(\grave{O}\overline{\times}\,\overline{\ddot{I}} \vee \overline{\grave{O}}\times\overline{\ddot{I}} \vee \overline{\grave{O}}\,\overline{\times}\ddot{I}\right) = 1.$$

Упростим левую часть полученной формулы, выполнив логическое умножение первого и второго сомножителей, а также третьего и четвертого соответственно:

$$\left(\tilde{A}\overline{\ddot{I}} \vee \overline{\tilde{A}}\ddot{I}\right)\left(\overline{\tilde{A}}\,\overline{\times} \vee \tilde{A}\times\right) = \left(\tilde{A}\overline{\ddot{I}}\,\overline{\tilde{A}}\,\overline{\times} \vee \tilde{A}\overline{\ddot{I}}\tilde{A}\times \vee \overline{\tilde{A}}\ddot{I}\,\overline{\tilde{A}}\,\overline{\times} \vee \overline{\tilde{A}}\ddot{I}\tilde{A}\times\right) =$$
$$= \overline{\ddot{I}}\tilde{A}\times \vee \ddot{I}\,\overline{\tilde{A}}\,\overline{\times};$$
$$\left(\hat{O}\overline{\grave{O}} \vee \overline{\hat{O}}\grave{O}\right)\left(\hat{O}\overline{\tilde{A}} \vee \overline{\hat{O}}\tilde{A}\right) = \left(\hat{O}\overline{\grave{O}}\hat{O}\overline{\tilde{A}} \vee \hat{O}\overline{\grave{O}}\,\overline{\hat{O}}\tilde{A} \vee \overline{\hat{O}}\grave{O}\hat{O}\overline{\tilde{A}} \vee \overline{\hat{O}}\grave{O}\overline{\hat{O}}\tilde{A}\right) =$$
$$= \overline{\grave{O}}\hat{O}\overline{\tilde{A}} \vee \grave{O}\overline{\hat{O}}\tilde{A};$$
$$\left(\overline{\ddot{I}}\tilde{A}\times \vee \ddot{I}\,\overline{\tilde{A}}\,\overline{\times}\right)\left(\overline{\grave{O}}\hat{O}\overline{\tilde{A}} \vee \grave{O}\overline{\hat{O}}\tilde{A}\right) = \overline{\ddot{I}}\times\grave{O}\overline{\hat{O}}\tilde{A} \vee \ddot{I}\,\overline{\times}\,\overline{\grave{O}}\hat{O}\overline{\tilde{A}}.$$

Выполним логическое умножение полученного результата и пятого множителя:

$$\left(\overline{\ddot{I}}\times\grave{O}\overline{\hat{O}}\tilde{A}\vee\ddot{I}\;\overline{\times}\overline{\grave{O}}\hat{O}\overline{\tilde{A}}\right)\left(\grave{O}\overline{\times}\overline{\ddot{I}}\vee\overline{\grave{O}}\times\overline{\ddot{I}}\vee\overline{\grave{O}}\overline{\times}\ddot{I}\right)=$$
$$=\left(\overline{\ddot{I}}\times\grave{O}\overline{\hat{O}}\tilde{A}\grave{O}\overline{\times}\overline{\ddot{I}}\vee\overline{\ddot{I}}\times\grave{O}\overline{\hat{O}}\tilde{A}\overline{\grave{O}}\times\overline{\ddot{I}}\vee\overline{\ddot{I}}\times\grave{O}\overline{\hat{O}}\tilde{A}\overline{\grave{O}}\overline{\times}\ddot{I}\right)\wedge$$
$$\wedge\left(\ddot{I}\;\overline{\times}\overline{\grave{O}}\hat{O}\overline{\tilde{A}}\grave{O}\overline{\times}\overline{\ddot{I}}\vee\ddot{I}\;\overline{\times}\overline{\grave{O}}\hat{O}\overline{\tilde{A}}\overline{\grave{O}}\times\overline{\ddot{I}}\vee\ddot{I}\;\overline{\times}\overline{\grave{O}}\hat{O}\overline{\tilde{A}}\overline{\grave{O}}\overline{\times}\ddot{I}\right)=\hat{O}\overline{\tilde{A}}\overline{\grave{O}}\overline{\times}\ddot{I}\,.$$

Иначе говоря, $\overline{\tilde{A}}\ddot{I}\;\overline{\times}\hat{O}\overline{\grave{O}}=1$. То есть, $\overline{\tilde{A}}=1$, $\ddot{I}=1$, $\overline{\times}=1$, $\hat{O}=1$, $\overline{\grave{O}}=1$. Следовательно, сосуд финикийский и изготовлен в V веке.

Задача 2. 2. Реализовать конъюнкцию, дизъюнкцию, отрицание, импликацию и эквиваленцию в электронных таблицах MS EXCEL.

Решение. Приведем один из вариантов такой реализации без использования функций MS EXCEL. На рис. 12 приведены таблицы истинности указанных функций согласно определениям этих операций.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y	x∨y	x∧y	x→y	$\overline{x}$	x↔y
2	1	1	1	1	1	0	1
3	1	0	1	0	0	0	0
4	0	1	1	0	1	1	0
5	0	0	0	0	1	1	1

Рисунок 12

Такая же таблица получится, если в ячейки C2, D2, E2, F2 и G2 ввести соответственно формулы

=(A2+B2>=1)*1,

=A2*B2,

=(B2>=A2)*1,

=1-A2,

=(B2>=A2)*(A2>=B2),

а затем распространить их на оставшийся диапазон C2:G5.

Задача 2. 3. Проверить равносильность выражений (x→y)∧ ∧(z→y) и (x∨z)→y двумя способами: построив таблицу истинности и упростив выражения.

Решение. а) Для построения таблицы истинности воспользуемся электронными таблицами. Для этого представим исходные данные так, как на рис. 13. В ячейки D2, E2, F2, G2, H2 введем формулы:

=(B2>=A2)*1,

=(B2>=C2)*1,

=D2*E2,

=(A2+C2>=1)*1,

=(B2>=G2)*1

и распространим их затем на весь оставшийся диапазон D3:H9. В результате получится таблица, приведенная на рис. 14.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	z	x→y	z→y	(x→y)(z→y)	x∨z	x∨z→y
2	1	1	1					
3	1	1	0					
4	1	0	1					
5	0	1	1					
6	1	0	0					
7	0	1	0					
8	0	0	1					
9	0	0	0					

Рисунок 13

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	z	x→y	z→y	(x→y)(z→y)	x∨z	x∨z→y
2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	0	1	1	1	1	1
4	1	0	1	0	0	0	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	1
6	1	0	0	0	1	0	1	0
7	0	1	0	1	1	1	0	1
8	0	0	1	1	0	0	1	0
9	0	0	0	1	1	1	0	1

Рисунок 14

Из таблицы видно, что для функций (x→y)(z→y) и (x∨z)→y значения на всех наборах переменных совпадают**.**

б) Преобразуем (x→y)(z→y):

$$(x \to y)(z \to y) \equiv (\overline{x} \vee y)(\overline{z} \vee y) \equiv \overline{x}\,\overline{z} \vee y \equiv \overline{\overline{x}\,\overline{z}} \to y \equiv$$
$$\equiv x \vee z \to y.$$

Задача 2. 4. Для булевой функции $\overline{x} \to (y \to (z \leftrightarrow x))$:

а) найти ДНФ, КНФ, СДНФ и СКНФ методом равносильных преобразований;

б) найти СДНФ и СКНФ табличным способом, а затем сравнить с СДНФ и СКНФ, полученными в пункте «а».

Решение. а). Заменяем операции → и ↔:

$$x \vee \overline{y} \vee (z \to x)(x \to z) \equiv x \vee \overline{y} \vee (\overline{z} \vee x)(\overline{x} \vee z) \equiv$$
$$\equiv x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\,\overline{x} \vee xz \equiv x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\,\overline{x}. \qquad (*)$$

Это и есть ДНФ. Чтобы получить КНФ, воспользуемся дистрибутивным законом:

$$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\,\overline{x} \equiv \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right)\left(x \vee \overline{y} \vee \overline{x}\right) \equiv \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right)\left(1 \vee \overline{y}\right) \equiv$$
$$\equiv x \vee \overline{y} \vee \overline{z}.$$

Замечание. Приведем еще один способ получения КНФ из ДНФ:

$$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\,\overline{x} \equiv \overline{\overline{x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\,\overline{x}}} \equiv \overline{\overline{x}y(z \vee x)} \equiv \overline{\overline{x}yz \vee \overline{x}xy} \equiv \overline{\overline{x}yz} \equiv$$
$$\equiv x \vee \overline{y} \vee \overline{z}.$$

Полученное выражение является также и СКНФ.

Чтобы получить СДНФ из формулы (*), выполним равносильные преобразования:

$$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\,\overline{x} \equiv x(y \vee \overline{y})(z \vee \overline{z}) \vee \overline{y}(x \vee \overline{x})(z \vee \overline{z}) \vee \overline{z}\,\overline{x}(y \vee \overline{y}).$$

Раскрыв скобки, упрощаем выражение:

$$x(y \vee \overline{y})(z \vee \overline{z}) \vee \overline{y}(x \vee \overline{x})(z \vee \overline{z}) \vee \overline{z}\,\overline{x}(y \vee \overline{y}) \equiv$$
$$\equiv xyz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z}.$$

б). Воспользуемся таблицей истинности для функции $\overline{x} \to (y \to (z \leftrightarrow x))$.

x	y	z	z↔x	y→(z↔x)	$\overline{x} \to (y \to (z \leftrightarrow x))$	не x
1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Отсюда видно, что для получения СДНФ следует использовать строки с 1 в предпоследнем столбце:

$$xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}.$$

Для получения СКНФ следует воспользоваться строкой с 0 в предпоследнем столбце таблицы истинности:

$$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}\ .$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить, имеют ли место следующие равносильности двумя способами: построив таблицу истинности и упростив выражения. Таблицу истинности реализовать в MS EXCEL:

1.1. $\overline{\overline{B \vee C} \vee \overline{A \vee C} \vee AB} = C\bar{A} \vee C\bar{B}$;

1.2. $\left(BC \vee A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}C\right)\left(AB \vee \bar{C} \vee AC\right) = A$;

1.3. $\left(AB \vee A\bar{B}C \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}\right)\left(\bar{A}BC \vee \bar{A}B\bar{C} \vee ABC\right) = ABC$;

1.4. $ABC \vee \bar{A}BC \vee A\bar{B}C \vee \bar{A}\bar{B}C = C$;

1.5. $AB \vee A\bar{B}C \vee A\bar{B}\bar{C} \vee A\bar{C} = A$;

1.6. $X \to \left(Y \to Z\right) = \left(X \to Y\right) \to \left(X \to Z\right)$;

1.7. $\overline{\bar{A} \vee \bar{B}\left(A \vee C\right) \vee B\overline{A \vee C}} = AB$;

1.8. $\left(AB \vee AB\bar{C} \vee B\bar{C} \vee C\right)\left(C \vee AC \vee \bar{A}BC\right) = B \vee AC$;

1.9. $\overline{\overline{B \vee C} \vee \overline{A \vee C} \vee AB} = C\bar{A} \vee C\bar{B}$.

2. Для приведенных ниже формул булевых функций а) найти ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ методом равносильных преобразований; б) найти СДНФ, СКНФ табличным способом (сравнить с СДНФ, СКНФ, полученными в пункте а)).

2.1. $(x \vee y \to \bar{z}) \vee xyz$;

2.2. $\overline{x(y \to x \vee z)}$;

2.3. $x \to z(y \leftrightarrow x)$;

2.4. $\overline{x \leftrightarrow y} \to x \vee z$;

2.5. $\overline{x \to y} \vee y \to z$;

2.6. $xy \to \overline{xz} \leftrightarrow z$;

2.7. $x\bar{y} \to (\bar{x} \vee z)y$;

2.8. $p \to (q \to r) \leftrightarrow pq \to r$;

2.9. $y \to x \leftrightarrow x \to z$;

2.10. $\overline{x \leftrightarrow y} \to x \vee y$.

3. Являются ли приведенные ниже формулы тождественно-истинными? Проверку выполнить двумя способами: построив таблицу истинности и упростив выражения. Таблицу истинности реализовать в MS EXCEL:

3.1. $(p \to q)(r \to q) \leftrightarrow (p \vee r \to q)$;

3.2. $(p \to q)(r \to q) \leftrightarrow (p \to qr)$;

3.3. $(p \to q)p \to q)$;

3.4. $(p \to q)\bar{q} \to \bar{p}$;

3.5. $pq \to r \leftrightarrow p\bar{r} \to \bar{q}$;

3.6. $(p \vee q)\bar{p} \to q$;

3.7. $(p \to q)(q \to r) \to (p \to r)$.

4. В одном королевстве были незамужние принцессы, голодные тигры и приговоренный к казни узник. Всякому узнику, осужденному на смерть, король давал последний шанс. Узнику предлагалось угадать, в какой из двух комнат находится тигр, а в какой принцесса. Хотя вполне могло быть, что король в обеих комнатах разместил принцесс или тигров. Выбор надо было сделать на основании табличек на дверях комнаты. Известно, что утверждения на табличках были либо оба истинными, либо оба ложными. Надписи гласили:

1 комната	2 комната
По крайней мере, в одной из этих комнат находится принцесса	Тигр сидит в первой комнате

Какую дверь должен выбрать узник?

5. На соревнованиях по легкой атлетике Андрей, Борис, Сергей и Володя заняли первые четыре места. Но когда однокурсницы стали вспоминать, как эти места распределились между

победителями, то мнения разошлись. Даша сказала: «Андрей был первым, а Володя – вторым». Галя утверждала: «Андрей был вторым, а Борис – третьим». Лена считала: «Борис был четвертым, а Сергей – вторым». Ася, которая была судьей на этих соревнованиях и хорошо помнила, как распределились места, сказала, что каждая из девушек сделала одно правильное и одно неправильное заявление. Кто из студентов занял первое, второе и третье место?

6. Студент делает следующие высказывания: А. Если я люблю физику, то люблю и математический анализ. Б. Если высказывание А истинно, то я люблю физику. Следует ли из этих высказываний, что студент любит физику?

7. Юра условился с родителями, что всегда будет говорить им только правду. Однажды он получил 2 по физике и очень не хотел говорить об этом дома. На прямой вопрос, что он получил по физике, Юра ответил… Что же ответил Юра так, чтобы не сказать о двойке, и в то же время сказать совершеннейшую истину?

3. Основные понятия теории графов

Графом $G = (X, A)$ называется пара объектов $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, где X – множество вершин, а A – множество ребер графа. Если ребра из множества A ориентированы, то они называются дугами, а граф называют ориентированным. Если ребра не имеют ориентации, то граф называют неориентированным. В противном случае граф является смешанным. На рис. 15–16 приведены неориентированный и ориентированный графы соответственно.

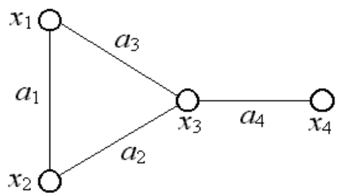


Рисунок 15

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

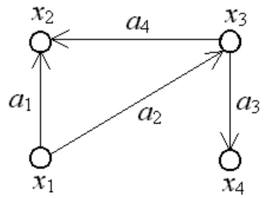


Рисунок 16

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$A = \{a_1 = (x_1, x_2), a_2 = (x_1, x_3), a_3 = (x_3, x_4), a_4 = (x_3, x_2)\}$.

Если сопоставить каждому ребру число из множества C, тогда граф называют взвешенным.

Граф можно задать матрицами *смежности* и *инцидентности*. Элементы матрицы смежности S графа задаются как:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует ребро (дуга), соединяющее вершины } x_i \text{ и } x_j; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$(i, j=1, 2,\dots, n)$.

Элементы матрицы инцидентности $U = \left|u_{ij}\right|_{m\times n}$ для графа G, состоящего из n вершин и m дуг, определяются как:

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ – начало дуги } a_j; \\ -1, & \text{если вершина } x_i \text{ – конец дуги } a_j; \\ 0, & \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна дуге } a_j. \end{cases}$$

$(i=1, 2,\dots,n;\ j=1, 2,\dots, m)$.

Для графа, приведенного на рис. 17, матрица смежности приведена на рис. 18, а матрица инцидентности — на рис. 19.

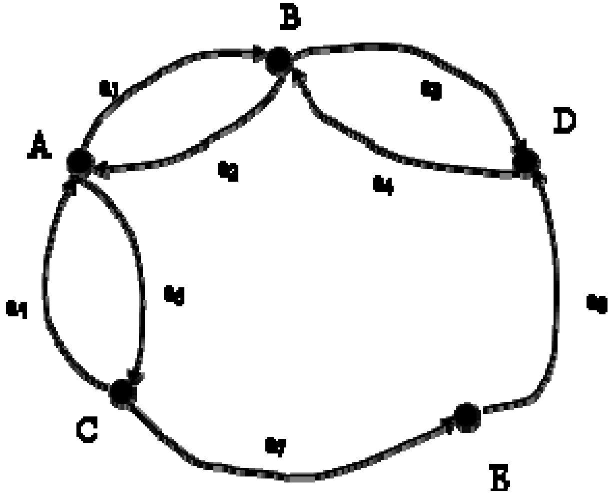


Рисунок 17

$$
\begin{array}{c}
\quad\; A \;\; B \;\; C \;\; D \;\; E \\
S = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Рисунок 18

$$
\begin{array}{c}
\quad\; a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; a_4 \;\; a_5 \;\; a_6 \;\; a_7 \;\; a_8 \\
U = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Рисунок 19

Если граф содержит петли, то есть дуги вида *(x_i, x_i)* тогда элементы матрицы инцидентности, соответствующие дугам, образующим петли, одновременно равны 1 и –1, что приводит к неоднозначности матрицы инцидентности.

Пусть G – неориентированный граф. *Маршрутом* в графе G называется такая последовательность (конечная или бесконечная) ребер a_1, a_2, ... a_n..., что каждые два соседних ребра a_i и a_{i+1} имеют общую инцидентную вершину. Одно и то же ребро может встречаться в маршруте несколько раз. В конечном маршруте (a_1, a_2, ... a_n) имеется первое ребро a_1 и последнее ребро a_n. Вершина x_1, инцидентная ребру a_1, но не инцидентная ребру a_2, называется началом маршрута, а вершина x_n, инцидентная ребру a_n, но не инцидентная ребру a_{n-1}, называется концом маршрута.

Длиной маршрута называется число ребер, входящих в маршрут, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно входит в данный маршрут.

Замкнутый маршрут называется *циклом.*

Маршрут (цикл), в которой все ребра различны, называется *простой цепью* (циклом). Маршрут (цикл), в которой все вершины (кроме первой и последней) различны, называется *элементарной цепью* (циклом).

На рис. 20 изображены два маршрута из вершины x_1 в вершину x_4: $M_1 = (a_1, a_2, a_4)$ и $M_2 = (a_1, a_2, a_5, a_6)$. Длина маршрута M_1 равна 3, а длина маршрута M_2 равна 4.

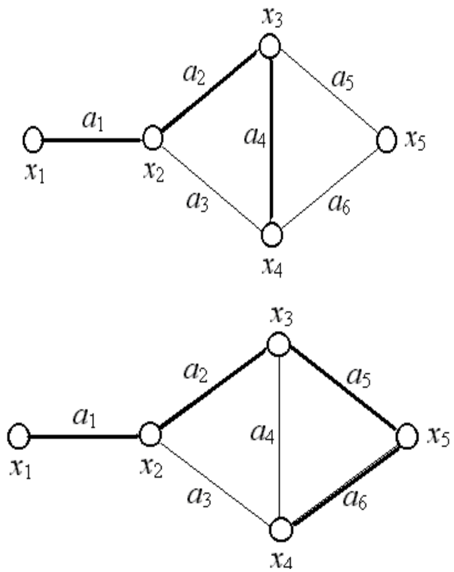
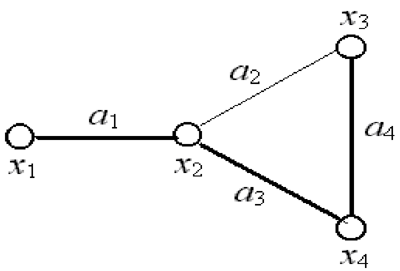
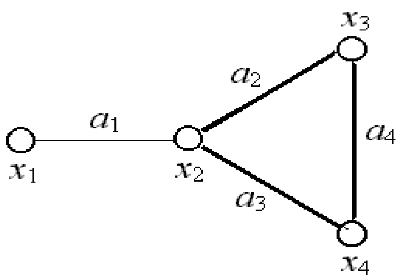


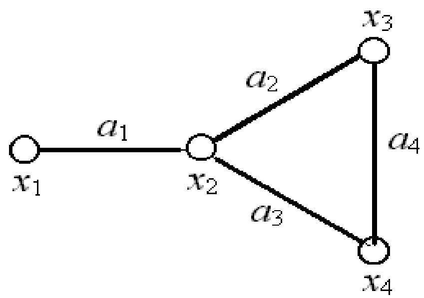
Рисунок 20



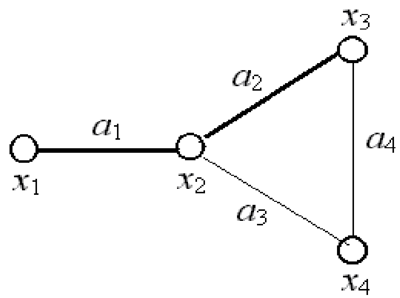
(a_1,a_3,a_4) – простая элементарная цепь длины 3, так как все ребра и вершины попарно различны.



(a_2,a_4,a_3) – простой элементарный цикл, так как это замкнутый маршрут, у которого все ребра и вершины, кроме первой и последней, различны.



(a_1,a_2,a_4,a_3) – цепь, которая является простой, но не элементарной, так как все ребра различны, но вершина x_2 встречается дважды.



(a_1,a_2,a_2) – маршрут длины 3, не являющийся ни простой, ни элементарной цепью, т.к. ребро a_2 и вершина x_2 встречаются дважды.

Понятия пути и контура в ориентированном графе аналогичны понятиям маршрута и цикла в неориентированном графе.

Путем в ориентированном графе называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей дуги.

Число дуг пути называется *длиной* пути.

Путь называется *контуром*, если его начальная вершина совпадает с конечной вершиной.

Путь (контур), в котором все дуги различны, называется *простым*.

Путь (контур), в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарным.*

Понятиям ребра, маршрута, цепи, цикла в неориентированном графе соответствуют понятия дуги, пути, ориентированной цепи, контура в ориентированном графе.

Неориентированный граф	Ориентированный граф
ребро маршрут цикл	дуга путь контур

Граф называется *связным*, если каждая пара различных вершин может быть соединена, по крайней мере, одной цепью.

Ориентированный граф называется *нагруженным*, если дугам этого графа поставлены в соответствие веса, так что дуге (x_i, x_j) сопоставлено некоторое число $c(x_i, x_j) = c_{ij}$, называемое *длиной* (или *весом*, или *стоимостью* дуги). *Длиной* (или *весом* или *стоимостью*) пути s, состоящего из некоторой последовательности дуг (x_i, x_j), называется число $l(s)$, равное сумме длин дуг, входящих в этот путь, т.е.

$$l(s) = \sum c_{ij},$$

причем суммирование ведется по всем дугам $(x_i, x_j) \in s$.

Матрица $C = (c_{ij})$ называется *матрицей длин дуг* или *матрицей весов*.

Подграфом неориентированного графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G. Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа. Аналогично определяется подграф ориентированного графа.

Компонентой связности неориентированного графа называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа данного графа.

Неориентированным деревом (или просто *деревом*) называется связный граф без циклов.

Остовным деревом (деревом-остовом, покрывающим деревом, скелетным деревом) связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

4. Нахождение минимального дерева-остова

Пусть G – связный нагруженный граф. Задача построения *минимального остовного дерева* заключается в том, чтобы из множества остовных деревьев найти такое, у которого сумма длин ребер минимальна.

Приведем типичные случаи, когда возникает необходимость построения минимального остовного дерева графа.

а). Необходимо соединить n городов железнодорожными линиями (автомобильными дорогами, линиями электропередач, сетью трубопроводов и т.д.) так, чтобы суммарная длина линий или стоимость была бы минимальной.

б). Требуется построить схему электрической сети, в которой клеммы должны быть соединены с помощью проводов наименьшей общей длины.

Задачу построения минимального дерева-остова можно решить с помощью алгоритма Краскала. Приведем описание алгоритма по шагам.

Шаг 1. Отсортируем ребра графа по неубыванию весов.

Шаг 2. Полагаем, что каждая вершина относится к своей компоненте связности.

Шаг 3. Проходим ребра в «отсортированном» порядке. Для каждого ребра выполняем следующую проверку:

а) если вершины, соединяемые данным ребром, лежат в разных компонентах связности, то объединяем эти компоненты в одну, а рассматриваемое ребро добавляем к минимальному дереву-остову;

б) если вершины, соединяемые данным ребром, лежат в одной компоненте связности, то исключаем ребро из рассмотрения, так как при включении данного ребра образуется цикл.

Шаг 4. Если есть еще нерассмотренные ребра и не все компоненты связности объединены в одну, то переходим к шагу 3, иначе алгоритм завершает работу:

а) если при этом просмотрены все ребра, но не все компоненты связности объединены в одну, то для исходного графа невозможно построить покрывающее дерево;

б) если просмотрены все ребра, и все компоненты связности объединены в одну, то для исходного графа построено минимальное покрывающее дерево.

Задача 3. 1. Граф G содержит 5 вершин. Расстояния между вершинами заданы таблицей 1. Найти его минимальное дерево-остов (минимальное покрывающее дерево).

Таблица 1

	1	2	3	4	5
1	0	5	8	2	7
2	5	0	9	2	5
3	8	9	0	10	10
4	2	2	10	0	7
5	7	5	10	7	0

Решение. Так как матрица симметрична, можно рассматривать, например, только элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали:

Исходные данные

ребро	длина
(1,2)	5
(1,3)	8
(1,4)	2
(1,5)	7
(2,3)	9
(2,4)	2
(2,5)	5
(3,4)	10
(3,5)	10
(4,5)	7

Упорядоченные по длине ребра

ребро	длина	Включить в дерево-остов
(1,4)	2	Да
(2,4)	2	Да
(1,2)	5	Нет
(2,5)	5	Да
(1,5)	7	Нет
(4,5)	7	Нет
(1,3)	8	Да
(2,3)	9	Нет
(3,4)	10	Нет
(3,5)	10	Нет

1. Включаем в дерево-остов ребро (1, 4). Множество вершин, включенных в дерево-остов V={1, 4} (рис. 21).
2. Следующим кандидатом на включение в дерево-остов является ребро (2, 4). Добавление вершины 2 к множеству V и ребра (2, 4) к дереву не создает цикла, так как вершина 2 не входит в множество V. После добавления ребра (2, 4) к дереву множество вершин, включенных в дерево-остов V={1, 2, 4} (рис. 22).

3. Добавление ребра (1, 2) приведет к образованию цикла (рис. 23). Поэтому не включаем это ребро в дерево-остов.
4. Следующим кандидатом на включение в дерево-остов является ребро (2, 5). Его включение не создает цикла, поэтому V={1, 2, 4, 5} (рис. 24).
5. Добавление ребра (1, 5) приведет к образованию цикла (рис. 25). Поэтому не включаем это ребро в дерево-остов.
6. Следующим кандидатом на включение в дерево-остов является ребро (4, 5). Однако его добавление приведет к образованию цикла. Поэтому не включаем это ребро в дерево-остов.
7. Включение ребра (1, 3) не создает цикла, поэтому V={1, 2, 3, 4, 5} (рис. 26).
8. Так как все вершины графа вошли в дерево, то получено покрывающее дерево с минимальным весом, равным 17.

Рисунок 21

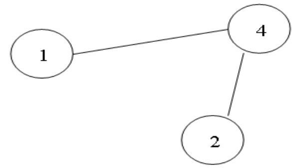


Рисунок 22

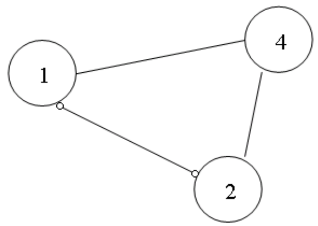


Рисунок 23

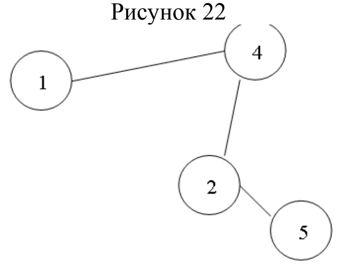


Рисунок 24

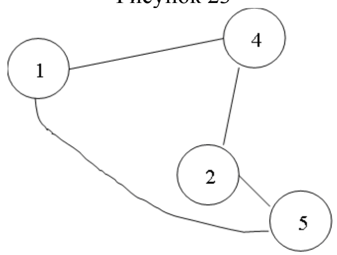


Рисунок 25

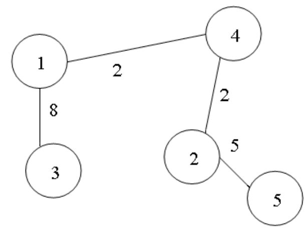


Рисунок 26

Решение задачи о нахождении минимального дерева-остова с использованием надстройки MS EXCEL «Поиск решения»

Приведем математическую модель задачи. Пусть переменная x_{ij} означает наличие ребра вида *(i, j)* в покрывающем дереве, а a_{ij} интерпретируется как длина указанного ребра. Тогда математическая модель задачи имеет вид как на рис. 27 [12].

Здесь (1) – целевая функция, ограничения (2) – (4) требуют отсутствия в покрывающем дереве изолированных вершин, ограничение (5) – наличие в покрывающем дереве ровно *n*-1 ребра. Ограничение (6) требует, чтобы все переменные принимали только двоичные (булевы) значения.

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_{ij} \to \min_{x\in\Delta_\beta}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1j} \ge 1; & (2)\\ \sum\limits_{j=2}^{k-1} x_{1j} + \sum\limits_{j=k+1}^{n} x_{1j} \ge 1 \left(\forall k \in \{2,\dots,n-1\}\right); & (3)\\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_{1j} \ge 1; & (4)\\ \sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{j=i+1}^{n} x_{ij} = n-1; & (5)\\ x_{ij} \in \{0,1\}. & (6) \end{cases}$$

Рисунок 27

Задача 3. 2. Найти минимальное дерево-остов для графа, приведенного на рис. 28.

Решение. В заданном графе 5 вершин и 10 ребер. Следовательно, переменными математической модели этой индивидуальной задачи о построении минимального дерева-остова являются 10 переменных $x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{45}$.

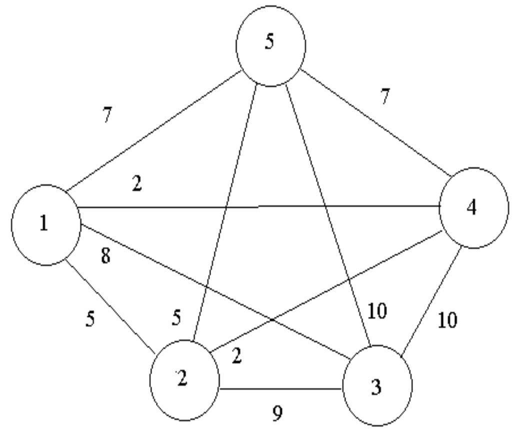


Рисунок 28

Математическая постановка такой индивидуальной задачи приведена ниже.

$$5x_{12} + 8x_{13} + 2x_{14} + 7x_{15} + 9x_{23} + 2x_{24} + 5x_{25} + 10x_{34} + $$
$$+10x_{35} + 7x_{45} \to \min_{x\in\Delta_\beta}.$$

Множество ограничений выглядит так:

$$\begin{cases} x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \ge 1;\\ x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \ge 1;\\ x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} \ge 1;\\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} \ge 1;\\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} \ge 1;\\ x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{34} + x_{35} + x_{45} = 4;\\ x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15},\ x_{23},\ x_{24},\ x_{25},\ x_{34},\ x_{35},\ x_{45} \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Воспользуемся надстройкой «Поиск решения», входящей в состав MS EXCEL. Расположим исходные данные на рабочем листе так, как на рис. 29. На рис. 30–31 приведены окна надстройки и ее параметров.

На рис. 32 показано состояние рабочего листа после выполнения решения с использованием надстройки. На рис. 33 изображено минимальное дерево-остов для данного графа. Заметим, что вес этого дерева в точности соответствует полученному по алгоритму Краскала весу (задача 3. 1).

	A	B	C	D	E
1	начальная вершина ребра	конечная вершина ребра	вес ребра	Переменные	Ограничения
2	1	2	5	0	=СУММ(D2:D5)
3	1	3	8	0	=СУММ(D2;D6:D8)
4	1	4	2	0	=СУММ(D3;D6;D9:D10)
5	1	5	7	0	=СУММ(D4;D7;D9;D11)
6	2	3	9	0	=СУММ(D5;D8;D10;D11)
7	2	4	2	0	=СУММ(D2:D11)
8	2	5	5	0	
9	3	4	10	0	
10	3	5	10	0	
11	4	5	7	0	
15	Целевая функция				
16	=СУММПРОИЗВ(D2:D11;C2:C11)				

Рисунок 29

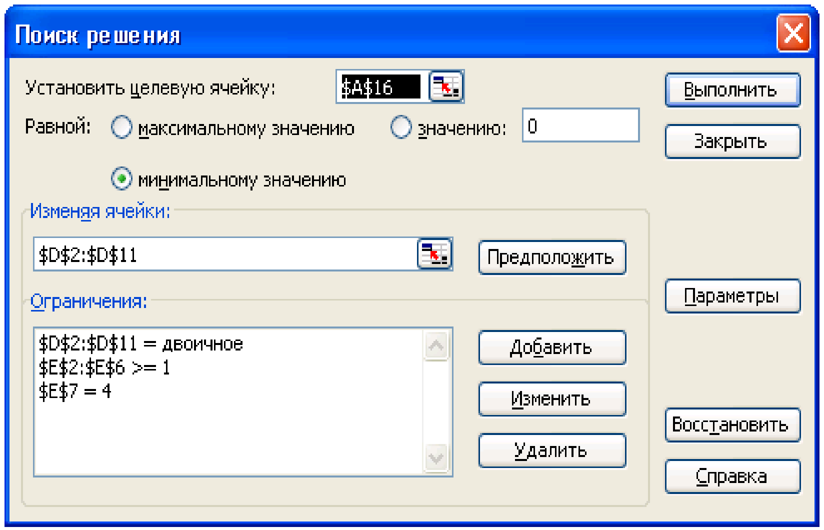


Рисунок 30

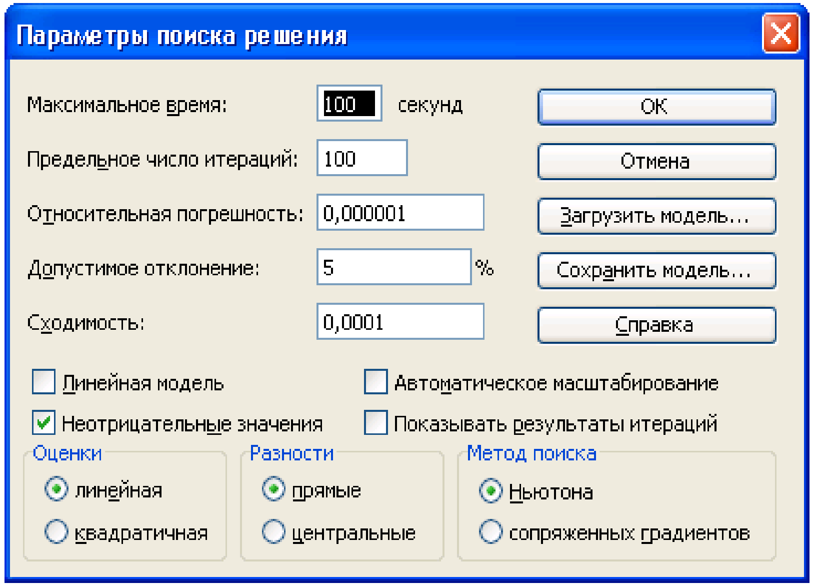


Рисунок 31

	A	B	C	D	E
1	начальная вершина ребра	конечная вершина ребра	вес ребра	Переменные	Ограничения
2	1	2	5	0	2
3	1	3	8	1	2
4	1	4	2	1	1
5	1	5	7	0	2
6	2	3	9	0	1
7	2	4	2	1	4
8	2	5	5	1	
9	3	4	10	0	
10	3	5	10	0	
11	4	5	7	0	
15	Целевая функция				
16	17				

Рисунок 32

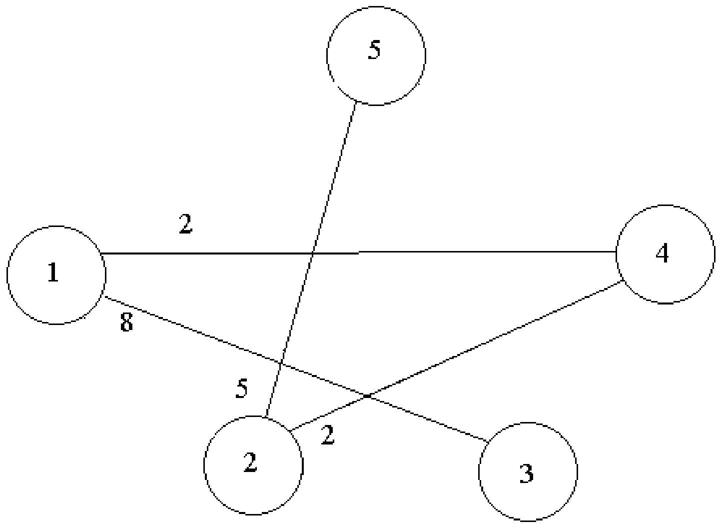


Рисунок 33

Задачи для самостоятельного решения

Неориентированный граф G содержит 10 вершин. Расстояния между вершинами заданы таблицей. Найти его минимальное дерево-остов (минимальное покрывающее дерево):

1.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	6	9	1	10	6	10	9	3	9
2	6	0	6	7	2	6	4	9	8	1
3	9	6	0	3	8	5	4	6	2	7
4	1	7	3	0	8	8	8	1	9	9
5	10	2	8	8	0	7	6	7	6	5
6	6	6	5	8	7	0	10	3	6	2
7	10	4	4	8	6	10	0	2	9	2
8	9	9	6	1	7	3	2	0	7	2
9	3	8	2	9	6	6	9	7	0	3
10	9	1	7	9	5	2	2	2	3	0

2.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	4	4	5	4	8	2	10	2	10
2	4	0	1	2	8	10	3	1	8	2
3	4	1	0	7	6	3	8	2	3	4
4	5	2	7	0	9	10	10	2	5	9
5	4	8	6	9	0	6	10	5	4	3
6	8	10	3	10	6	0	3	7	4	9
7	2	3	8	10	10	3	0	8	2	9
8	10	1	2	2	5	7	8	0	4	4
9	2	8	3	5	4	4	2	4	0	7
10	10	2	4	9	3	9	9	4	7	0

3.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	2	9	5	2	5	4	4	4	4
2	2	0	7	1	8	10	1	2	6	8
3	9	7	0	3	1	3	9	1	6	9
4	5	1	3	0	7	4	9	7	2	1
5	2	8	1	7	0	8	9	8	6	3
6	5	10	3	4	8	0	3	5	10	6
7	4	1	9	9	9	3	0	5	3	6
8	4	2	1	7	8	5	5	0	10	1
9	4	6	6	2	6	10	3	10	0	7
10	4	8	9	1	3	6	6	1	7	0

4.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	10	7	4	1	4	3	4	9	10
2	10	0	6	2	7	6	2	4	7	8
3	7	6	0	8	4	6	5	10	8	5
4	4	2	8	0	7	8	7	4	7	7
5	1	7	4	7	0	2	8	3	3	6
6	4	6	6	8	2	0	7	3	9	5
7	3	2	5	7	8	7	0	8	3	7
8	4	4	10	4	3	3	8	0	1	7
9	9	7	8	7	3	9	3	1	0	2
10	10	8	5	7	6	5	7	7	2	0

5.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	4	8	6	9	6	2	5	9	2
2	4	0	9	9	3	6	5	4	2	1
3	8	9	0	3	5	10	9	2	6	6
4	6	9	3	0	2	9	1	1	5	5
5	9	3	5	2	0	1	6	8	3	1
6	6	6	10	9	1	0	10	4	7	6
7	2	5	9	1	6	10	0	4	10	4
8	5	4	2	1	8	4	4	0	4	7
9	9	2	6	5	3	7	10	4	0	4
10	2	1	6	5	1	6	4	7	4	0

6.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	8	5	9	7	3	10	2	10	10
2	8	0	10	9	6	1	10	6	9	7
3	5	10	0	6	2	4	4	4	8	6
4	9	9	6	0	7	5	7	7	7	1
5	7	6	2	7	0	2	8	10	8	2
6	3	1	4	5	2	0	2	8	6	8
7	10	10	4	7	8	2	0	10	6	8
8	2	6	4	7	10	8	10	0	8	9
9	10	9	8	7	8	6	6	8	0	9
10	10	7	6	1	2	8	8	9	9	0

7.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	5	8	1	4	7	3	6	6	8
2	5	0	3	3	7	5	1	6	7	9
3	8	3	0	3	2	4	7	7	6	9
4	1	3	3	0	5	8	10	10	6	5
5	4	7	2	5	0	2	7	5	1	10
6	7	5	4	8	2	0	9	7	10	9
7	3	1	7	10	7	9	0	2	1	4
8	6	6	7	10	5	7	2	0	6	10
9	6	7	6	6	1	10	1	6	0	3
10	8	9	9	5	10	9	4	10	3	0

8.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	6	6	6	4	1	6	7	8	10
2	6	0	9	9	4	3	7	3	1	1
3	6	9	0	6	1	6	6	1	6	2
4	6	9	6	0	10	3	1	4	9	2
5	4	4	1	10	0	1	8	7	3	7
6	1	3	6	3	1	0	6	7	10	6
7	6	7	6	1	8	6	0	1	7	6
8	7	3	1	4	7	7	1	0	6	5
9	8	1	6	9	3	10	7	6	0	4
10	10	1	2	2	7	6	6	5	4	0

9.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	3	8	3	1	10	1	8	8	7
2	3	0	5	6	4	9	10	7	5	2
3	8	5	0	6	3	2	10	10	6	4
4	3	6	6	0	8	3	6	1	10	4
5	1	4	3	8	0	3	5	9	7	1
6	10	9	2	3	3	0	1	4	5	3
7	1	10	10	6	5	1	0	3	4	8
8	8	7	10	1	9	4	3	0	2	9
9	8	5	6	10	7	5	4	2	0	5
10	7	2	4	4	1	3	8	9	5	0

10.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	6	7	7	7	5	7	4	4
2	1	0	8	1	1	3	7	6	7	4
3	6	8	0	2	1	6	8	5	7	9
4	7	1	2	0	10	4	1	9	6	3
5	7	1	1	10	0	3	10	1	8	5
6	7	3	6	4	3	0	5	4	2	5
7	5	7	8	1	10	5	0	3	5	6
8	7	6	5	9	1	4	3	0	2	9
9	4	7	7	6	8	2	5	2	0	6
10	4	4	9	3	5	5	6	9	6	0

11.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	6	7	2	2	4	6	8	7	8
2	6	0	4	8	8	3	7	6	8	2
3	7	4	0	6	5	8	6	8	1	10
4	2	8	6	0	7	9	4	9	5	4
5	2	8	5	7	0	10	9	5	2	4
6	4	3	8	9	10	0	8	3	9	10
7	6	7	6	4	9	8	0	6	3	10
8	8	6	8	9	5	3	6	0	9	9
9	7	8	1	5	2	9	3	9	0	3
10	8	2	10	4	4	10	10	9	3	0

12.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	9	6	2	9	4	3	1	2	8
2	9	0	9	6	2	1	3	10	4	10
3	6	9	0	10	1	5	3	10	4	2
4	2	6	10	0	9	10	1	4	9	3
5	9	2	1	9	0	8	8	1	1	2
6	4	1	5	10	8	0	1	1	3	8
7	3	3	3	1	8	1	0	10	3	2
8	1	10	10	4	1	1	10	0	3	1
9	2	4	4	9	1	3	3	3	0	3
10	8	10	2	3	2	8	2	1	3	0

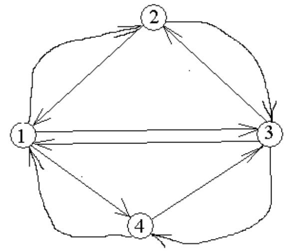
5. Задачи о поиске путей

Поиск путей с заданным количеством дуг

Пусть $G = (X, A)$ — связный граф. Для определения количества путей, состоящих из k дуг, необходимо возвести в k-ю степень матрицу смежности. Тогда ее элемент s_{ij}^{k} даст количество путей длины k из вершины x_i в вершину x_j.

Задача 5.1. Для графа, приведенного на рис. 34 слева, найти все пути длины 3 (то есть, найти все пути, содержащие ровно три дуги).

Решение. Матрица смежности для данного графа имеет вид как на рис. 34 справа.



$$S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 34

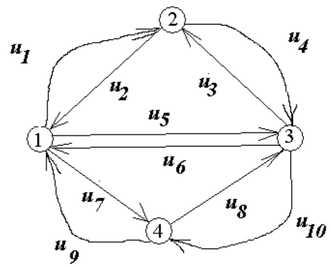
Тогда S^2 и S^3 выглядят так, как на рис. 35.

$$S^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Рисунок 35

Значение $s_{11}^{3} = 4$ означает, что из вершины 1 в вершину 1 существует 4 пути длины 3, $s_{12}^{3} = 5$ — из вершины 1 в вершину 2 — 5 путей длины 3 и т.д.

Чтобы выявить эти пути, следует обозначить дуги, например, так, как на рис. 36. Вместо матрицы смежности введем в рассмотрение матрицу, элементами которой являются дуги вида u_r, r = 1, 2, …, 10 (рис. 37).



$$S^1 = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_5 & u_7 \\ u_2 & 0 & u_4 & 0 \\ u_6 & u_3 & 0 & u_{10} \\ u_9 & 0 & u_8 & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 36 Рисунок 37

Выполняем символьное умножение матриц:

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_5 & u_7 \\ u_2 & 0 & u_4 & 0 \\ u_6 & u_3 & 0 & u_{10} \\ u_9 & 0 & u_8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_5 & u_7 \\ u_2 & 0 & u_4 & 0 \\ u_6 & u_3 & 0 & u_{10} \\ u_9 & 0 & u_8 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1u_2+u_5u_6+u_7u_9 & u_5u_3 & u_1u_4+u_7u_8 & u_5u_{10} \\ u_4u_6 & u_2u_1+u_4u_3 & u_2u_5 & u_2u_7+u_4u_{10} \\ u_3u_2+u_{10}u_9 & u_6u_1 & u_6u_5+u_3u_4+u_{10}u_8 & u_6u_7 \\ u_8u_6 & u_9u_1+u_8u_3 & u_9u_5 & u_9u_7+u_8u_{10} \end{pmatrix}$$

$$S^3 = \begin{pmatrix} u_1u_2+u_5u_6+u_7u_9 & u_5u_3 & u_1u_4+u_7u_8 & u_5u_{10} \\ u_4u_6 & u_2u_1+u_4u_3 & u_2u_5 & u_2u_7+u_4u_{10} \\ u_3u_2+u_{10}u_9 & u_6u_1 & u_6u_5+u_3u_4+u_{10}u_8 & u_6u_7 \\ u_8u_6 & u_9u_1+u_8u_3 & u_9u_5 & u_9u_7+u_8u_{10} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_5 & u_7 \\ u_2 & 0 & u_4 & 0 \\ u_6 & u_3 & 0 & u_{10} \\ u_9 & 0 & u_8 & 0 \end{pmatrix}.$$

В таблице 2 приведена матрица S^3 по столбцам.

Таблица 2

$u_5u_3u_2+u_1u_4u_6+u_7u_8u_6+u_5u_{10}u_9$ $u_2u_1u_2+u_4u_3u_2+u_2u_5u_6+u_2u_7u_9+u_4u_{10}u_9$ $u_6u_1u_2+u_6u_5u_6+u_3u_4u_6+u_{10}u_8u_6+u_6u_7u_9$ $u_9u_1u_2+u_8u_3u_2+u_9u_5u_6+u_9u_7u_9+u_8u_{10}u_9$	1 столбец

Продолжение таблицы 2

$u_1u_2u_1+u_5u_6u_1+u_7u_9u_1+u_1u_4u_3+u_7u_8u_3$ $u_4u_6u_1+u_2u_5u_3$ $u_3u_2u_1+u_{10}u_9u_1+u_6u_5u_3+u_3u_4u_3+u_{10}u_8u_3$ $u_8u_6u_1+u_9u_5u_3$	2 столбец
$u_1u_2u_5+u_5u_6u_5+u_7u_9u_5+u_5u_3u_4+u_5u_{10}u_8$ $u_4u_6u_5+u_2u_1u_4+u_4u_3u_4+u_2u_7u_8+u_4u_{10}u_8$ $u_3u_2u_5+u_{10}u_9u_5+u_6u_1u_4+u_6u_7u_8$ $u_8u_6u_5+u_9u_1u_4+u_8u_3u_4+u_9u_7u_8+u_8u_{10}u_8$	3столбец
$u_1u_2u_7+u_5u_6u_7+u_7u_9u_7+u_1u_4u_{10}+u_7u_8u_{10}$ $u_4u_6u_7+u_2u_5u_{10}$ $u_3u_2u_7+u_{10}u_9u_7+u_6u_5u_{10}+u_3u_4u_{10}+u_{10}u_8u_{10}$ $u_8u_6u_7+u_9u_5u_{10}$	4 столбец

Заметим, что число слагаемых в каждом элементе полученной матрицы равно числу элементов матрицы S^3:

$$S^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, например, сумму

$u_5u_3u_2+u_1u_4u_6+u_7u_8u_6+u_5u_{10}u_9$.

Она соответствует четырем путям из вершины 1 в вершину 1:

1-u_5-3-u_3-2-u_2-1, 1-u_1-2-u_4-3-u_6-1, 1-u_7-4-u_8-3-u_6-1,
1-u_5-3-u_{10}-4-u_9-1.

Алгоритм Дейкстры для поиска кратчайшего пути между заданной парой вершин

Пусть *G* = *(X, A)* — связный граф, каждой дуге которого приписано некоторое число *a(x, y)≥ 0*. Задача построения кратчайшего пути между заданной парой вершин $s \in X$ и $t \in X$ заключается в том, чтобы из множества путей, соединяющих указанные вершины, найти такой, суммарная длина дуг которого минимальна.

Для решения задачи можно воспользоваться алгоритмом Дейкстры [13]. Приведем его описание по шагам.

Шаг 1. Перед началом выполнения алгоритма все вершины не окрашены. Каждой вершине $x \in X$ в ходе выполнения алгоритма присваивается число *d(x),* равное длине кратчайшего пути из *s* в *x*, включающего только окрашенные вершины.

Положить $d(s)=0$, $d(x)=\infty$ для всех *x*, отличных от *s*. Окрасить вершину *s* и положить *y=s* (*y* – последняя из окрашенных вершин).

Шаг 2. Для каждой неокрашенной вершины x следующим образом пересчитать величину *d(x):*

$$d(x)=\min\{d(x),\ d(x)+a(y,\ x)\}.$$

Если $d(x)=\infty$ для всех неокрашенных вершин *x*, закончить процедуру алгоритма: в заданном графе отсутствуют пути между указанной парой вершин. В противном случае окрасить ту из вершин *x*, для которой величина *d(x)* является наименьшей. Положить *y=x*.

Шаг 3. Если *y=t*, закончить процедуру: кратчайший путь из вершины *s* в вершину *t* найден. В противном случае перейти к шагу 2.

Задача 5. 2. В заданном графе G (рис. 38) найти кратчайший путь между вершинами 1 и 10.

Решение. Перед началом выполнения алгоритма полагаем $d(1)=0$, $d(x)=\infty$ для всех $x\neq1$; вершина 1 – последняя из окрашенных вершин.

$$d(2)=\min\{d(2),\ d(1)+c(1,\ 2)\}=\min\{\infty,\ 0+5\}=5;$$

$$d(5)=\min\{d(5),\ d(1)+c(1,\ 5)\}=\min\{\infty,\ 0+6\}=6;$$

$d(x)=\infty$ для всех $x\neq1,\ 2,\ 5$.

Так как минимум выпал на вершину 2, то y=2 – последняя из окрашенных вершин (рис. 39).

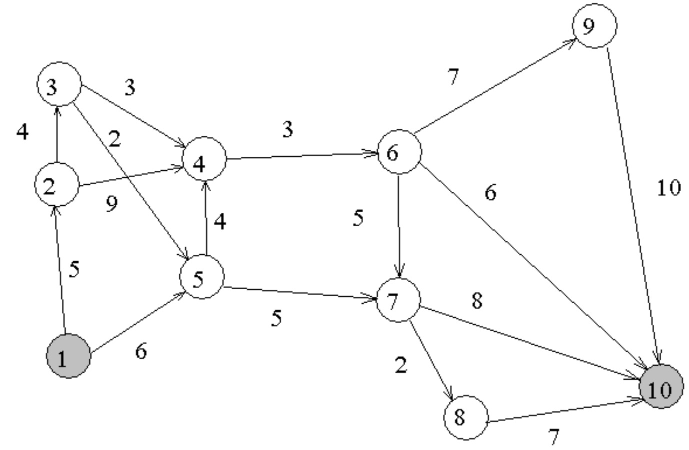


Рисунок 38

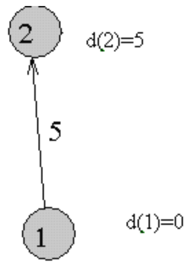


Рисунок 39

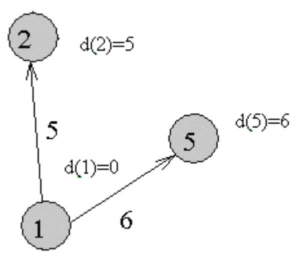


Рисунок 40

$$d(3)=\min\{d(3),\ d(2)+c(2,\ 3)\}=\min\{\infty,\ 5+4\}=9;$$

$$d(5)=\min\{d(5),\ d(2)+c(2,\ 5)\}=\min\{6,\ 5+\infty\}=6;$$

$$d(4)=\min\{d(4),\ d(2)+c(2,\ 4)\}=\min\{\infty,\ 5+9\}=14;$$

$d(x)=\infty$ для всех $x\neq1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

Так как минимум выпал на вершину 5, то y=5 – последняя из окрашенных вершин (рис. 40).

$$d(3)=\min\{d(3),\ d(5)+c(5,\ 3)\}=\min\{9,\ 5+\infty\}=9;$$

$$d(4)=\min\{d(4),\ d(5)+c(5,\ 4)\}=\min\{14,\ 6+4\}=10;$$

$$d(7)=\min\{d(7),\ d(5)+c(5,\ 7)\}=\min\{\infty,\ 6+5\}=11;$$

$d(x)=\infty$ для всех $x\neq1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7$.

Так как минимум выпал на вершину 3, то y=3 – последняя из окрашенных вершин (рис. 41).

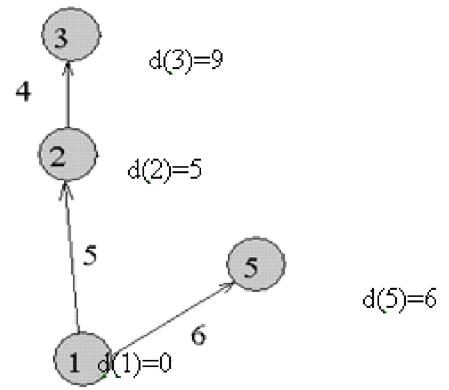


Рисунок 41

$$d(4)=\min\{d(4),\ d(3)+c(3,\ 4)\}=\min\ \{10,\ 9+3\}=10;$$

$$d(5)=\min\{d(5),\ d(3)+c(3,\ 5)\}=\min\ \{6,\ 9+2\}=6$$

(оценка не уменьшилась, то есть лучший путь не найден);

$$d(7)=\min\{d(7),\ d(3)+c(3,\ 7)\}=\min\ \{11,\ 9+\infty\}=11;$$

$d(x)=\infty$ для всех $x\neq 1, 2, 3, 4, 5, 7$.

Так как минимум выпал на вершину 4 (из неокрашенных), то y=4 – последняя из окрашенных вершин (рис. 42).

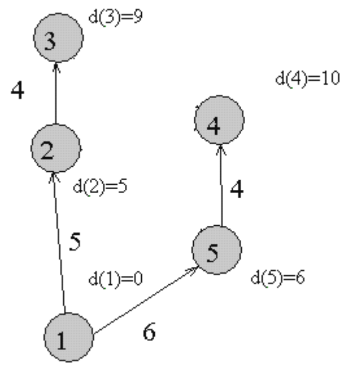


Рисунок 42

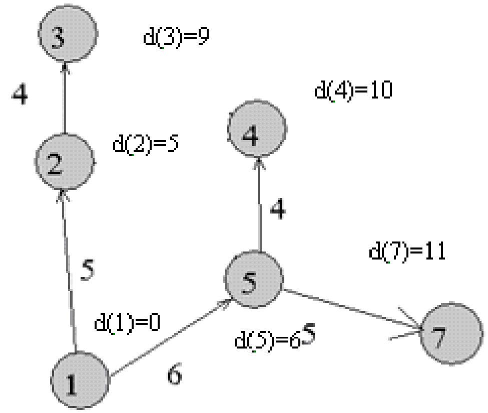


Рисунок 43

$$d(6)=\min\{d(6),\ d(4)+c(4,\ 6)\}=\min\ \{\infty,\ 10+3\}=13;$$

$$d(7)=\min\{d(7),\ d(4)+c(4,\ 7)\}=\min\ \{11,\ 10+\infty\}=11;$$

$d(x)=\infty$ для всех $x\neq 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Так как минимум выпал на вершину 7, то y=7 – последняя из окрашенных вершин (рис. 43).

$$d(6)=\min\{d(6),\ d(7)+c(7,\ 6)\}=\min\ \{13,11+\infty\}=13;$$

$$d(8)=\min\{d(8),\ d(7)+c(7,\ 8)\}=\min(\infty,11+2\}=13;$$

$$d(10)=\min\{d(10),\ d(7)+c(7,\ 10)\}=\min\ \{\infty,11+8\}=19;$$

$d(x)=\infty$ для $x=9$.

Так как минимум выпал на вершину 6, то y=6 – последняя из окрашенных вершин (рис. 44).

$$d(7)=\min\{d(7),\ d(6)+c(6,\ 7)\}=\min\ \{11,13+5\}=11$$

(оценка не уменьшилась, то есть лучший путь не найден);

$$d(8)=\min\{d(8),\ d(6)+c(6,\ 8)\}=\min\ \{13,13+\infty\}=13;$$

$$d(9)=\min\{d(9),\ d(6)+c(6,\ 9)\}=\min\ \{\infty,13+7\}=20;$$

$$d(10)=\min\{d(10),\ d(6)+c(6,10)\}=\min\ \{19,13+6\}=19.$$

Так как минимум выпал на вершину 8 (из неокрашенных), то y=8 – последняя из окрашенных вершин (рис. 45).

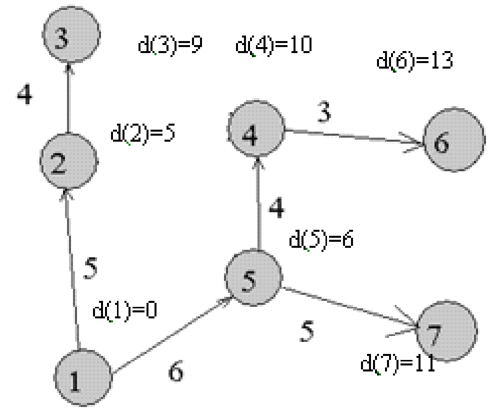


Рисунок 44

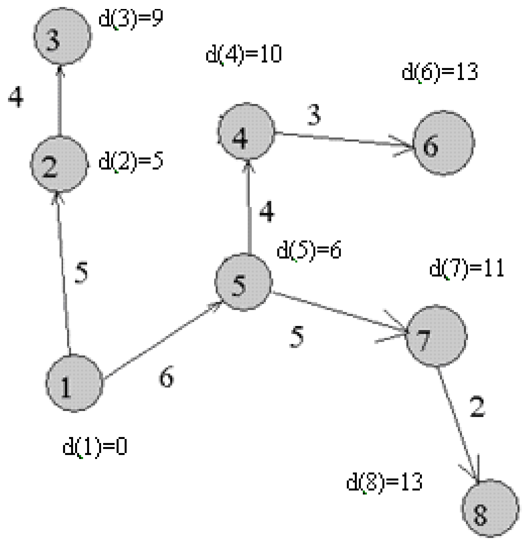


Рисунок 45

$$d(9)=\min\{d(9),\ d(8)+c(8,\ 9)\}=\min\ \{20,13+\infty\}=20;$$

$$d(10)=\min\{d(10),\ d(8)+c(8,10)\}=\min\ \{19,13+7\}=19.$$

Так как минимум выпал на вершину 10, то y=10, и на этом алгоритм заканчивает работу (рис. 46).

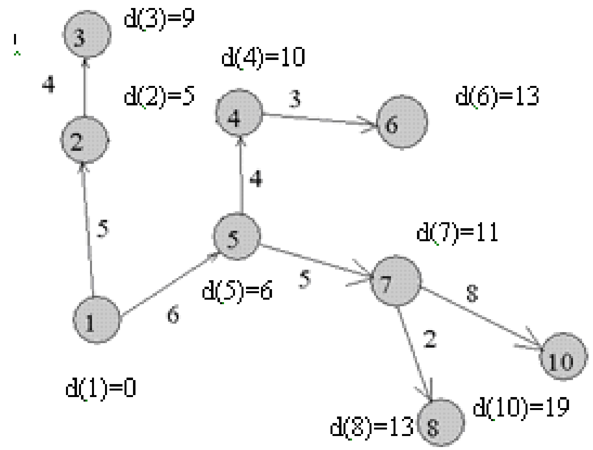


Рисунок 46

Таким образом, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 10 проходит через промежуточные вершины 5 и 7 (рис. 47). Длина этого пути равна 19.

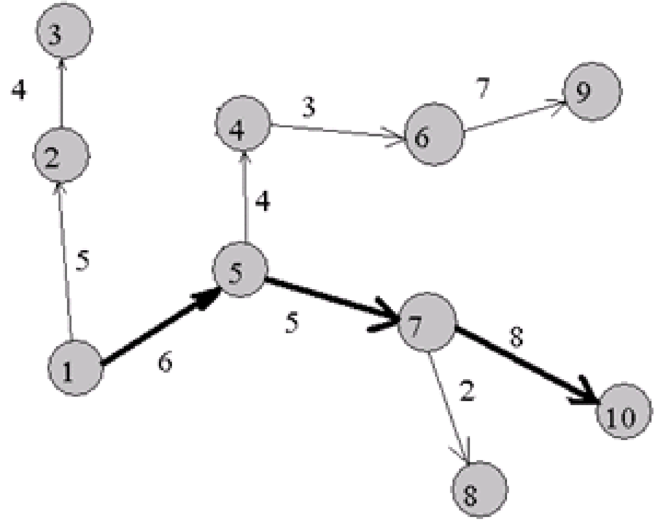


Рисунок 47

Решение задачи о поиске кратчайшего пути с использованием надстройки MS EXCEL «Поиск решения»

Для получения математической модели задачи введем булевы переменные x_{ij}, которые интерпретируются следующим образом: $x_{ij}=1$, если дуга (i, j) входит в маршрут; $x_{ij}=0$, если дуга (i, j) не входит в маршрут. Тогда математическая модель может иметь, например, такой вид, как на рис. 48 [12].

Ограничение (2) требует, чтобы искомый путь начинался в вершине s. Ограничение (3) требует, чтобы искомый путь заканчивался в вершине t. Ограничение (4) требует, чтобы искомый путь был связным, то есть проходил через вершины графа G. Ограничение (5) требует, чтобы все переменные модели были булевыми.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min_{x\in\Delta_\beta}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} - \sum_{i=1}^{n} x_{is} = 1; & (2)\\ \sum_{j=1}^{n} x_{tj} - \sum_{i=1}^{n} x_{it} = -1; & (3)\\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_{ji} = 0 \left(\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, i \neq s, i \neq t\right); & (4)\\ x_{ij} \in \{0,1\} \left(\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}\right). & (5) \end{cases}$$

Рисунок 48

Задача 5.3. Используя приведенный на рис. 49 граф, найти кратчайший путь между вершинами 1 и 10 с использованием надстройки «Поиск решения».

Решение. В заданном графе 10 вершин и 16 дуг. Следовательно, переменными математической модели этой индивидуальной задачи о построении кратчайшего пути являются 16 переменных:

$$x_{12}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{46}, x_{54}, x_{57}, x_{69}, x_{6,10}, x_{67}, x_{78}, x_{7,10},$$
$$x_{8,10}, x_{9,10}.$$

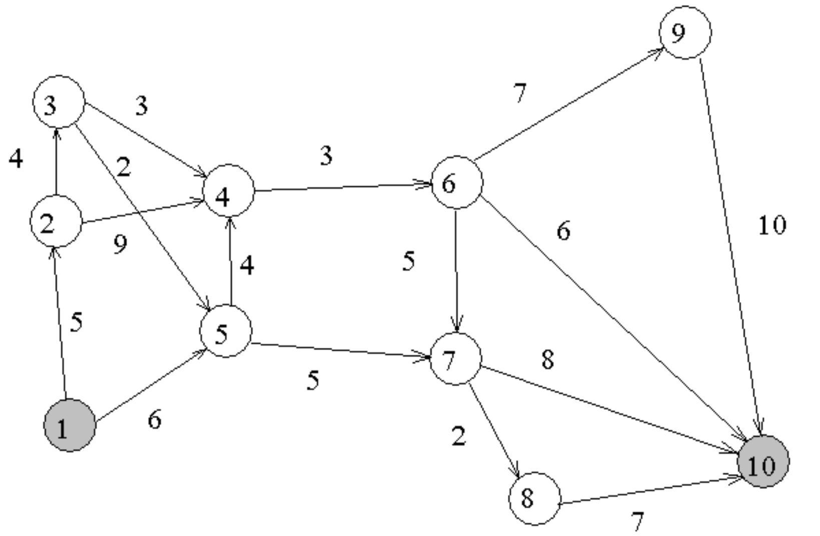


Рисунок 49

Математическая постановка такой индивидуальной задачи имеет следующий вид:

$$5x_{12} + 6x_{15} + 4x_{23} + 9x_{24} + 3x_{34} + 2x_{35} + 3x_{46} + 4x_{54} + 5x_{57} + 7x_{69} +$$

$$+ 6x_{6,10} + 5x_{67} + 2x_{78} + 8x_{7,10} + 7x_{8,10} + 10x_{9,10} \to \min_{x\in\Delta_\beta},$$

где множество ограничений выглядит так, как на рис. 50.

Воспользуемся надстройкой «Поиск решения», входящей в состав MS EXCEL. Расположим исходные данные на рабочем листе, например, так, как на рис. 51. В ячейках показаны формулы, связывающие переменные модели. Целевая функция находится в ячейке E19. На рис. 52 приведено окно диалога надстройки перед запуском на выполнение. На рис. 53 показан результат работы надстройки, а на рис. 54 – путь из вершины 1 в вершину 10 минимальной длины. Это значение совпадает с решением, полученным в соответствии с алгоритмом Дейкстры.

$$
\begin{cases}
x_{12} + x_{15} = 1; \\
x_{6,10} + x_{7,10} + x_{8,10} + x_{9,10} = 1; \\
x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0; \\
x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0; \\
x_{34} + x_{24} - x_{46} = 0; \\
x_{35} + x_{15} - x_{54} - x_{57} = 0; \\
x_{46} - x_{67} - x_{69} - x_{6,10} = 0; \\
x_{57} + x_{67} - x_{78} - x_{7,19} = 0; \\
x_{78} - x_{8,10} = 0; \\
x_{69} - x_{9,10} = 0; \\
x_{12}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{46}, x_{54}, x_{57}, x_{69}, x_{6,10}, x_{67}, \\
x_{78}, x_{7,10}, x_{8,10}, x_{9,10} . \in \{0, 1\}.
\end{cases}
$$

Рисунок 50

	A	B	C	D	E
1	начальная вершина ребра	конечная вершина ребра	вес ребра	Переменные	Ограничения
2	1	2	5	0	=СУММ(D2:D3)
3	1	5	6	0	=СУММ(D4:D7)
4	6	10	6	0	=D2-D8-D9
5	7	10	8	0	=D8-D10-D11
6	8	10	7	0	=D10+D9+D13-D12
7	9	10	10	0	=D11+D3-D13-D14
8	2	3	4	0	=D12-D16-D4-D15
9	2	4	9	0	=D14+D15-D17-D5
10	3	4	3	0	=D17-D6
11	3	5	2	0	=D16-D7
12	4	6	3	0	
13	5	4	4	0	
14	5	7	5	0	
15	6	7	5	0	
16	6	9	7	0	
17	7	8	2	0	
18					
19					=СУММПРОИЗВ(D2:D17;C2:C17)

Рисунок 51

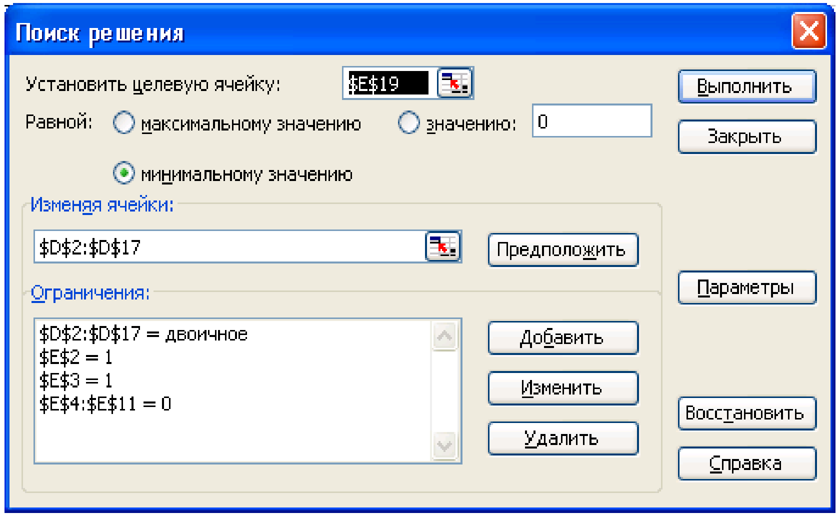


Рисунок 52

	A	B	C	D	E
1	начальная вершина ребра	конечная вершина ребра	вес ребра	Переменные	Ограничения
2	1	2	5	0	1
3	1	5	6	1	1
4	6	10	6	0	0
5	7	10	8	1	0
6	8	10	7	0	0
7	9	10	10	0	0
8	2	3	4	0	0
9	2	4	9	0	0
10	3	4	3	0	0
11	3	5	2	0	0
12	4	6	3	0	
13	5	4	4	0	
14	5	7	5	1	
15	6	7	5	0	
16	6	9	7	0	
17	7	8	2	0	
18					
19					19
25	19				

Рисунок 53

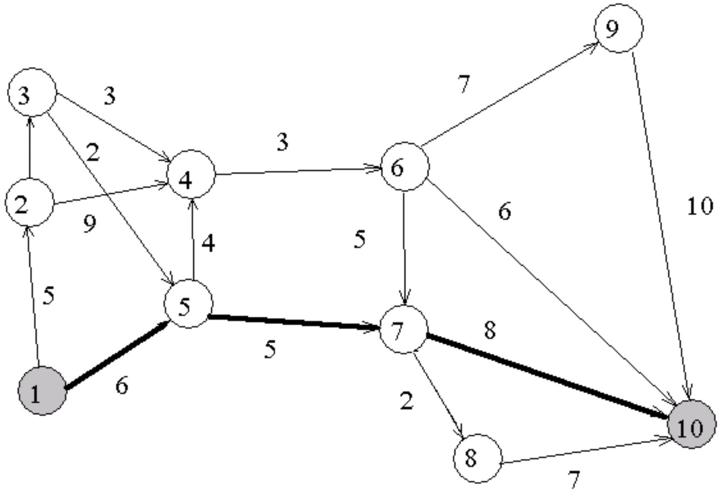


Рисунок 54

Поиск всех кратчайших путей (алгоритм Флойда)

Перенумеруем все вершины исходного графа целыми числами от 1 до n. Обозначим через d_{ij}^{m} длину кратчайшего пути из вершины i в вершину j, который в качестве промежуточных может содержать только первые m вершин графа. Если же между вершинами i и j не существует ни одного пути указанного типа, то условно будем считать что $d_{ij}^{m} = \infty$. Из данного определения величины d_{ij}^{m} следует, что величина d_{ij}^{0} представляет собой длину кратчайшего пути из вершины i в вершину j, не имеющего промежуточных вершин, то есть, длину кратчайшей дуги, соединяющей вершины i и j (если такие дуги присутствуют в графе). Будем считать, что $d_{ij}^{0} \geq 0$ для всех i и j ($1 \leq i \neq j \leq n$). Для любой вершины i положим $d_{ii}^{0} = 0$.

Обозначим через D^m матрицу размера n×n, элемент которой, расположенный на пересечении i-й строки и j-го столбца, совпадает с d_{ij}^{m}. Если в исходном графе известна длина каждой дуги, то можно сформировать матрицу D^0. Наша цель

состоит в определении матрицы D^n, представляющей кратчайшие пути между всеми вершинами исходного графа. В алгоритме Флойда в качестве исходной выступает матрица D^0. Затем по ней вычисляется матрица D^1, а по ней – матрица D^2 и т.д. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет вычислена матрица D^n.

Предположим, что нам известны

1) кратчайший путь из вершины i в вершину m, в котором в качестве промежуточных допускается использование только первых (m-1) вершин;
2) кратчайший путь из вершины m в вершину j, в котором в качестве промежуточных допускается использование только первых (m-1) вершин;
3) кратчайший путь из вершины i в вершину j, в котором в качестве промежуточных допускается использование только первых (m-1) вершин.

По предположению исходный граф не может содержать контуров отрицательной длины. Следовательно, один из двух путей – путь, совпадающий с путем, описанным в пункте 3, или путь, являющийся объединением путей из пунктов 1–2 – должен быть кратчайшим путем из вершины i в вершину j, в котором в качестве промежуточных допускается использование только первых m вершин. Таким образом,

$$d_{ij}^{m} = \min\left\{d_{im}^{m-1} + d_{mj}^{m-1}, d_{ij}^{m-1}\right\}.$$

Приведем пошаговое описание алгоритма Флойда [13].

Шаг 1. Пронумеровать вершины исходного графа целыми числами от 1 до n. Определить матрицу D^0, задав величину каждого ее элемента d_{ij}^{0} равной длине кратчайшей дуги, соединяющей вершины i и j. Если в исходном графе указанные вершины не соединяются дугами, положить $d_{ij}^0 = \infty$. Кроме того, положить $d_{ii}^0 = 0$ для всех i (1≤i≤n).

Шаг 2. Для целого m, последовательно принимающего значения 1, 2, …, n, определить по величинам элементов матрицы D^{m-1} величины элементов матрицы D^m, используя соотношение

$$d_{ij}^m = \min\left\{d_{im}^{m-1} + d_{mj}^{m-1}, d_{ij}^{m-1}\right\}.$$

При определении величины каждого элемента матрицы D^m фиксировать соответствующий кратчайший путь. По окончании данной процедуры величина элемента d_{ij}^n матрицы D^n определяет величину кратчайшего пути, ведущего из вершины i в вершину j.

Строки и столбцы матрицы D^m, для которых i=m и j=m, будем называть базовыми. Нетрудно заметить, что в таких строках и столбцах значения матрицы можно не пересчитывать, так как они полностью совпадают с соответствующими значениями матрицы D^{m-1}.

Задача 5.4. Для графа, приведенного на рис. 55, найти кратчайшие пути между любой парой вершин.

Решение. Матрица D^0 для данного графа приведена на. рис. 55 слева. Весь процесс вычислений приведен в таблице 3

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & \infty \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

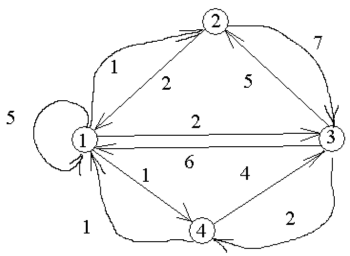


Рисунок 55

Таблица 3

$d_{ij}^1 = \min\left\{d_{i1}^0 + d_{1j}^0, d_{ij}^0\right\}$	Соответст-вующие пути
$d_{11}^1 = d_{11}^0 = 0$	
$d_{12}^1 = d_{12}^0 = 1$	(1, 2)
$d_{13}^1 = d_{13}^0 = 2$	(1, 3)
$d_{14}^1 = d_{14}^0 = 1$	(1, 4)
$d_{21}^1 = d_{21}^0 = 2$	(2, 1)
$d_{22}^1 = 0$	
$d_{23}^1 = \min\left\{d_{21}^0 + d_{13}^0, d_{23}^0\right\} = \min\{2+2,7\} = 4$	(2, 1), (1, 3)
$d_{24}^1 = \min\left\{d_{21}^0 + d_{14}^0, d_{24}^0\right\} = \min\{2+1,\infty\} = 3$	(2, 1), (1, 4)
$d_{31}^1 = d_{31}^0 = 6$	(3, 1)
$d_{32}^1 = \min\left\{d_{31}^0 + d_{12}^0, d_{32}^0\right\} = \min\{6+1,5\} = 5$	(3, 2)
$d_{33}^1 = 0$	
$d_{34}^1 = \min\left\{d_{31}^0 + d_{14}^0, d_{34}^0\right\} = \min\{6+1,2\} = 2$	(3, 4)
$d_{41}^1 = d_{41}^0 = 1$	(4, 1)
$d_{42}^1 = \min\left\{d_{41}^0 + d_{12}^0, d_{42}^0\right\} = \min\{1+1,\infty\} = 2$	(4, 1), (1, 2)
$d_{43}^1 = \min\left\{d_{41}^0 + d_{13}^0, d_{43}^0\right\} = \min\{1+2,4\} = 3$	(4, 1), (1, 3)
$d_{44}^1 = 0$	

Аналогично определяются матрицы D^2, D^3, D^4. Полученные результаты приводятся в таблице 4.

Таблица 4

Матрицы	Кратчайшие пути
$D^2=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\2&0&4&3\\6&5&0&2\\1&2&3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & (1,2) & (1,3) & (1,4)\\(2,1) & & (2,1),(1,3) & (2,1),(1,4)\\(3,1) & (3,2) & & (3,4)\\(4,1) & (4,1),(1,2) & (4,1),(1,3) & \end{pmatrix}$
$D^3=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\2&0&4&3\\6&5&0&2\\1&2&3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & (1,2) & (1,3) & (1,4)\\(2,1) & & (2,1),(1,3) & (2,1),(1,4)\\(3,1) & (3,2) & & (3,4)\\(4,1) & (4,1),(1,2) & (4,1),(1,3) & \end{pmatrix}$
$D^4=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\2&0&4&3\\3&4&0&2\\1&2&3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & (1,2) & (1,3) & (1,4)\\(2,1) & & (2,1),(1,3) & (2,1),(1,4)\\(3,4),(4,1) & (3,4),(4,1),(1,2) & & (3,4)\\(4,1) & (4,1),(1,2) & (4,1),(1,3) & \end{pmatrix}$

Для решения реальных задач приведенный выше способ формирования кратчайших путей малопригоден.

Удобно ввести в рассмотрение матрицу маршрутов R. На m-ой итерации она определяется как $R^m=\left(r_{ij}^m\right)$, где r_{ij}^m — первый промежуточный узел кратчайшего пути из i в j, выбираемый среди множества {1, 2,…, m} (i≠j≠m). Алгоритм начинает работу при $R^0=\left(r_{ij}^0\right)$, где $r_{ij}^0=j$. На m-ой итерации элемент r_{ij}^m может быть получен из следующего соотношения:

$$r_{ij}^m=\begin{cases}m,\ \text{åñëè}\ \mathrm{d}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{m\text{-}1}}>d_{im}^{m-1}+d_{mj}^{m-1}\\ r_{ij}^{m-1}\ \text{â ïðîòèâíîì ñëó÷àå.}\end{cases}$$

Для рассмотренного выше примера имеем:

$$D^0=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\2&0&7&\infty\\6&5&0&2\\1&\infty&4&0\end{pmatrix}\qquad R^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$

$$D^1=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\2&0&4&3\\6&5&0&2\\1&2&3&0\end{pmatrix}\qquad R^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&1&1\\1&2&3&4\\1&1&1&4\end{pmatrix}$$

$$D^2=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\2&0&4&3\\6&5&0&2\\1&2&3&0\end{pmatrix}\qquad R^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&1&1\\1&2&3&4\\1&1&1&4\end{pmatrix}$$

$$D^3=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\2&0&4&3\\6&5&0&2\\1&2&3&0\end{pmatrix}\qquad R^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&1&1\\1&2&3&4\\1&1&1&4\end{pmatrix}$$

$$D^4=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\2&0&4&3\\3&4&0&2\\1&2&3&0\end{pmatrix}\qquad R^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&1&1\\4&4&3&4\\1&1&1&4\end{pmatrix}$$

Чтобы воспользоваться матрицей R^4 для определения пути, например, из вершины 3 в вершину 2, просматриваем элемент r_{32}^4. Так как он равен 4, это означает, что вершина с номером 4 является первой промежуточной в этом пути. Далее просматриваем элемент r_{42}^4. Так как он равен 1, это означает, что вершина с номером 1 является второй промежуточной в этом пути. Далее просматриваем элемент r_{12}^4. Так как элемент равен номеру конечной вершины 2, получаем, что искомый путь проходит по дугам (3, 4), (4, 1) и (1, 2) (что соответствует результату из таблицы 3).

Решение задачи о поиске всех кратчайших путей с использованием MS EXCEL

Расположим исходные данные D^0, R^0 индивидуальной задачи на рабочем листе, например, так, как на рис. 56. Здесь через 1000 обозначено отсутствие соответствующей дуги в исходном графе. Матрицы D^1, D^2, D^3, D^4 и R^1, R^2, R^3, R^4 получены по формулам вида (1)–(4) и (5)–(8) соответственно, а затем распространены на соответствующие диапазоны.

=МИН(ДВССЫЛ(АДРЕС(СТРОКА(A1);$G$6);ИСТИНА)+
+ДВССЫЛ(АДРЕС($F$6;СТОЛБЕЦ(A1));ИСТИНА);A1) (1)

=МИН(ДВССЫЛ(АДРЕС(СТРОКА(A6);$G$11);ИСТИНА)+
+ДВССЫЛ(АДРЕС($F$11;СТОЛБЕЦ(A6));ИСТИНА);A6) (2)

МИН(ДВССЫЛ(АДРЕС(СТРОКА(A11);$G$16);ИСТИНА)+
+ДВССЫЛ(АДРЕС($F$16;СТОЛБЕЦ(A11));ИСТИНА);A11) (3)

=МИН(ДВССЫЛ(АДРЕС(СТРОКА(A16);$G$21);ИСТИНА)+
+ДВССЫЛ(АДРЕС($F$21;СТОЛБЕЦ(A16));ИСТИНА);A16) (4)

=ЕСЛИ(ДВССЫЛ(АДРЕС(СТРОКА(A1);$G$6);ИСТИНА)+
+ДВССЫЛ(АДРЕС($F$6;СТОЛБЕЦ(A1));ИСТИНА)<A1;
$G$6;I1) (5)

=ЕСЛИ(ДВССЫЛ(АДРЕС(СТРОКА(A6);$G$11);ИСТИНА)+
+ДВССЫЛ(АДРЕС($F$11;СТОЛБЕЦ(A6));ИСТИНА)<A6;
$G$11;I6) (6)

=ЕСЛИ(ДВССЫЛ(АДРЕС(СТРОКА(A11);$G$16);ИСТИНА)+
+ДВССЫЛ(АДРЕС($F$16;СТОЛБЕЦ(A11));ИСТИНА)<A11;
$G$16;I11) (7)

=ЕСЛИ(ДВССЫЛ(АДРЕС(СТРОКА(A16);$G$21);ИСТИНА)+
+ДВССЫЛ(АДРЕС($F$21;СТОЛБЕЦ(A16));ИСТИНА)<A16;
$G$21;I16) (8)

O29 fx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	0	1	2	1					1	2	3	4	
2	2	0	7	1000	D^0				1	2	3	4	R^0
3	6	5	0	2					1	2	3	4	
4	1	1000	4	0					1	2	3	4	
5						строка	столбец						
6	0	1	2	1		1	1		1	2	3	4	
7	2	0	4	3	D^1				1	2	1	1	R^1
8	6	5	0	2					1	2	3	4	
9	1	2	3	0					1	1	1	4	
10													
11	0	1	2	1		7	2		1	2	3	4	
12	2	0	4	3	D^2				1	2	1	1	R^2
13	6	5	0	2					1	2	3	4	
14	1	2	3	0					1	1	1	4	
15													
16	0	1	2	1		13	3		1	2	3	4	
17	2	0	4	3	D^3				1	2	1	1	R^3
18	6	5	0	2					1	2	3	4	
19	1	2	3	0					1	1	1	4	
20													
21	0	1	2	1		19	4		1	2	3	4	
22	2	0	4	3	D^4				1	2	1	1	R^4
23	3	4	0	2					4	4	3	4	
24	1	2	3	0					1	1	1	4	
25													

Рисунок 56

На рис. 56 показаны используемые в формулах вспомогательные значения для указания базовых номеров строк и столбцов.

Задачи для самостоятельного решения

Граф содержит 10 вершин. Расстояния между вершинами заданы таблицей. Найти кратчайший путь между вершинами 1 и 10 (номера вариантов указаны в верхнем левом углу таблицы).

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	8	∞	∞	9	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	3	8	∞	∞	2	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	5	6	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	6	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	2	0	∞	9	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	5	∞	4	5
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	5	∞	1
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	8
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	5
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	3	∞	∞	10	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	4	3	∞	∞	7	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	5	5	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	6	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	9	0	∞	5	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	9	6
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞	10
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	1
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	2	∞	∞	9	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	3	3	∞	∞	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	9	3	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	5	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	4	0	∞	3	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	1	∞	10	5
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	8
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	10
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	2	∞	∞	9	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	2	6	∞	∞	3	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	9	2	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	7	0	∞	2	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	10	∞	6	6
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	3
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	3
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	7	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	10	1	∞	∞	3	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	2	10	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	8	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	9	0	∞	2	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	5	8
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	4	∞	1
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	7
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	7
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	10	∞	∞	2	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	5	6	∞	∞	1	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	10	5	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	6	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	9	0	∞	3	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞	2	6
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	5	∞	5
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	6
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	5
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	10	∞	∞	5	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	1	3	∞	∞	7	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	4	5	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	7	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	7	0	∞	1	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	10	∞	9	2
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	3
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	6	∞	∞	7	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	4	8	∞	∞	9	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	6	6	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	3	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	5	0	∞	5	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	3	10
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	5
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	7
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	4
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	10	∞	∞	7	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	5	4	∞	∞	8	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	10	1	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	3	0	∞	8	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	9	∞	5	5
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	3
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	1
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	4
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	8	∞	∞	5	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	2	10	∞	∞	7	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	4	1	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	1	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	4	0	∞	6	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	7	∞	3	7
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	6
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	8
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	8
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	7	∞	∞	10	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	4	5	∞	∞	1	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	10	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	9	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	8	0	∞	3	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	5	9
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞	3
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	1
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	4
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	4	∞	∞	5	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	12	10	∞	∞	7	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	4	10	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	10	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	14	0	∞	6	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	7	∞	13	7
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	13	∞	6
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	8
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	48
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

6. Задача о максимальном потоке и минимальном разрезе в сети

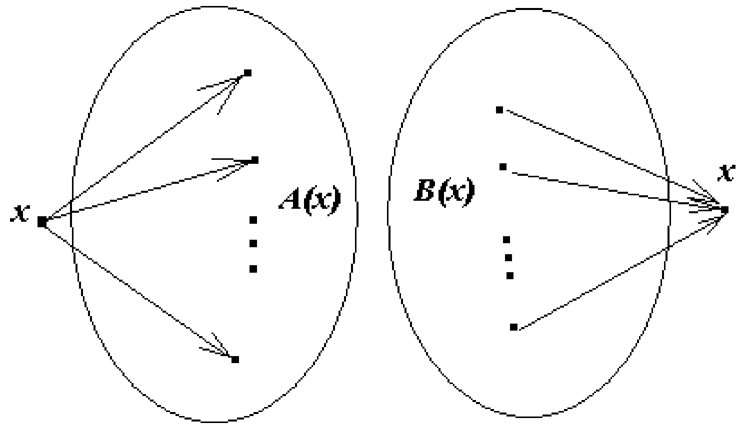
Пусть $G = (N, A)$ – связный граф, в котором выделены две вершины: s – источник, t – сток. Каждой дуге (x, y) графа поставлено в соответствие неотрицательное число c(x, y), которое интерпретируется как максимальное количество единиц некоторого товара, которое может быть доставлено из вершины x в вершину y за единицу времени. Это число принято называть пропускной способностью дуги. Такой граф называют сетью, а его вершины – узлами.

Стационарный поток величины v из s в t в сети $G = (N, A)$ есть функция f, отображающая множество A в множество неотрицательных чисел, удовлетворяющих линейным уравнениям и неравенствам следующего вида:

$$\sum_{x\in A(x)} f(x,y) - \sum_{y\in B(x)} f(y,\mathrm{x}) = \begin{cases} v, x = s; \\ 0,\ x \ne s, t; \\ -v, x = t; \end{cases}$$

$$f(x,y) \le c(x,y)\ \text{äëÿ âñåõ}\ (x,y) \in \grave{A},$$

где A(x) — подмножество множества N, включающее вершины y, являющиеся концами дуг с началом в вершине x; B(x) — подмножество множества N, включающее вершины y, являющиеся началом дуг, входящих в вершину x.



Разрезом $\left(X, \overline{X}\right)$ в сети $G = (N, A)$, отделяющим узлы s и t, называется множество дуг, где $s \in X, t \in \overline{X}$. При этом $X \cap \overline{X} = \varnothing,\ X \cup \overline{X} = N$.

Приведем формулировку теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе.

Теорема [25]. Для любой сети максимальная величина потока из s в t равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего s и t.

Задача построения максимального потока между заданной парой вершин $s \in N$ и $t \in N$ заключается в том, чтобы из множества путей, соединяющих указанные вершины, найти такие, по которым можно пропустить максимальное количество единиц потока в единицу времени. При этом должны соблюдаться следующие ограничения:

- поток по каждой дуге не должен превышать ее пропускную способность;
- поток из источника s равен потоку, приходящему в сток t;
- для промежуточных вершин количество единиц потока, попавшего в этот узел, должно в точности равняться количеству единиц потока, вышедшего из этого узла.

Для решения задачи можно воспользоваться алгоритмом расстановки пометок Форда-Фалкерсона [25].

Алгоритм может начинать работу с нулевого потока. Затем вычисления развиваются в виде последовательности «расстановки пометок» (операция А), каждая из которых либо приводит к потоку с большей величиной (операция В), либо заканчивается заключением о том, что рассматриваемый поток максимален. Все узлы сети находятся в одном из следующих состояний: не помечен, помечен и не просмотрен, помечен и просмотрен. Вначале все узлы не помечены.

Операция А (процесс расстановки пометок). Источник *s* получает пометку $(-,\ \varepsilon(s)=\infty)$ (источник теперь помечен и не просмотрен, остальные узлы не помечены). Выбираем любой помеченный и не просмотренный узел *x*. Пусть он имеет пометку $\left(z^{\pm},\varepsilon(x)\right)$. Всем узлам *y*, которые не помечены и для которых $f(x, y) < c(x, y)$ приписываем пометку $\left(x^{+},\varepsilon(y)\right)$, где

$$\varepsilon(y)=\min\left[\varepsilon(x), c(x, y)\text{-}f(x, y)\right]$$

(такие узлы у теперь помечены и не просмотрены). Всем узлам у, которые после этого не помечены и для которых $f(y, x) > 0$ приписываем пометку $\left(x^{-},\varepsilon(y)\right)$, где

$$\varepsilon(y)=\min\left[\varepsilon(x),\ f(y, x)\right]$$

(такие узлы у теперь помечены и не просмотрены, а узел х после этого помечен и просмотрен).

Этот общий шаг повторяем до тех пор, пока

1) не окажется помеченным и не просмотренным сток *t*,
2) или же до тех пор, пока нельзя будет пометить ни один узел, а сток *t* останется непомеченным.

В первом случае переходим к операции В, а во втором — алгоритм закончил работу, так как максимальный поток в сети получен.

Операция В (изменение потока). Пусть сток t имеет пометку $\left(y^{\pm},\varepsilon(t)\right)$. Если он имеет пометку $\left(y^{+},\varepsilon(t)\right)$, то $f(y, t)$ заменяем на $f(y, t)+\varepsilon(t)$; если он имеет пометку $\left(y^{-},\varepsilon(t)\right)$, то $f(y, t)$ заменяем на $f(y, t)-\varepsilon(t)$. В любом из этих случаев переходим к

узлу y. Вообще, если узел y имеет пометку $\left(x^{+},\varepsilon(y)\right)$, то $f(x, y)$ заменяем на $f(x, y)+\varepsilon(t)$, а если он имеет пометку $\left(x^{-},\varepsilon(y)\right)$, то $f(x, y)$ заменяем на $f(x, y)-\varepsilon(t)$ и переходим к узлу *x*. Когда мы достигнем источника *s*, изменение потока прекращается. Нужно стереть все старые пометки и вновь перейти к операции А.

Примечание. Пропускные способности дуг должны быть целыми неотрицательными числами. В [3] приведен пример с иррациональными пропускными способностями, для которого алгоритм приводит к неоптимальному решению.

Задача 6.1. Найти максимальный поток и минимальный разрез, отделяющий источник 1 и сток 6 для сети, приведенной на рис. 57. Пара чисел около каждой дуги означает пропускную способность и поток по дуге соответственно.

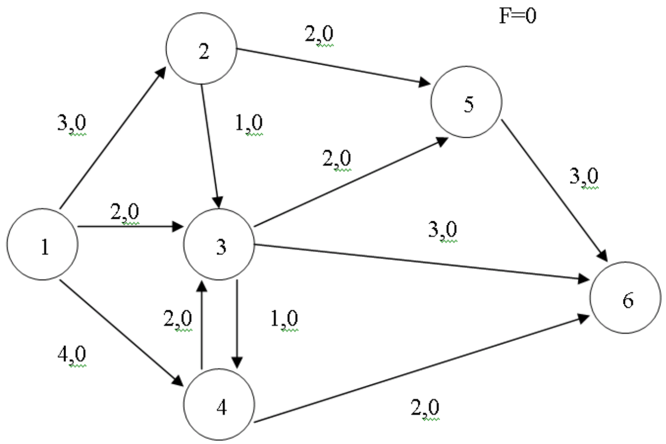


Рисунок 57

Решение. На рис. 58 показаны пометки, полученные в ходе выполнения операции А на первой стадии работы алгоритма. Источник (узел 1) получил пометку (-, ∞). Затем из узла 1 помечаются узлы 2, 3 и 4. Из узла 2 помечается узел 5, а из узла 3 – сток (узел 6). Так как сток оказался помеченным, переходим к операции В. Сток получил пометку (3^{+}, 2). Следовательно, $f(3, 6)$ станет равным 0+2=2. Переходим к узлу 3. Так как он имеет пометку (1^+, 2), то поток по дуге (1, 3) станет равным 0+2=2.

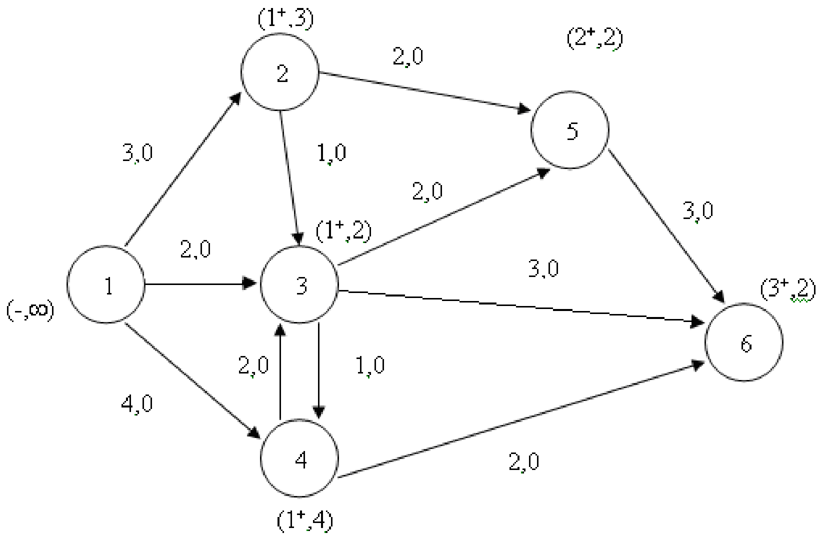


Рисунок 58

Так как в результате выполнения операции В достигнут источник (узел 1), то следует стереть старые пометки и снова перейти к операции А. Состояние сети приведено на рис. 59. Жирными стрелками указаны дуги, по которым идут две единицы потока.

Снова выполняем операцию А. Источник (узел 1) получил пометку (-, ∞). Затем из узла 1 помечаются узлы 2 и 4 (рис. 60). Из узла 2 помечаются узлы 3 и 5, а из узла 3 – сток (узел 6). Так как сток оказался помеченным, переходим к операции В. Сток получил пометку (3^+, 1). Следовательно, *f(3, 6)* станет равным 2+1=3. Переходим к узлу 3. Так как он имеет пометку (2^+, 1), то поток по дуге (2, 3) станет равным 0+1=1. Переходим к узлу 1 и увеличиваем поток по дуге (1^+, 3), то поток по дуге (1, 2): он станет равным 0+1=1. Следовательно, поток в сети стал равен 3. На рис. 60 жирными стрелками указано новое увеличение потока в сети.

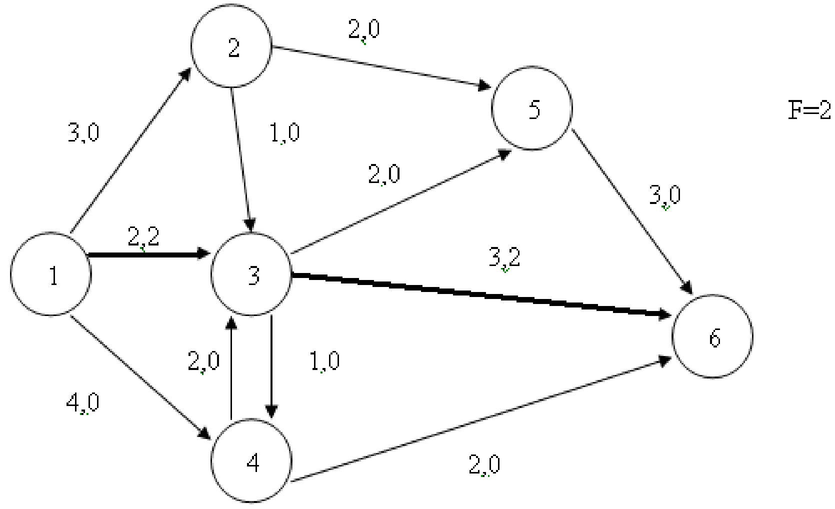


Рисунок 59

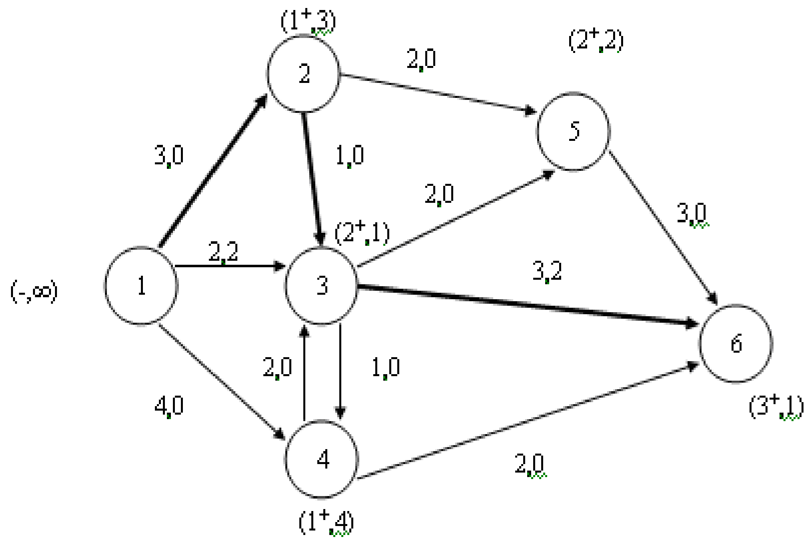


Рисунок 60

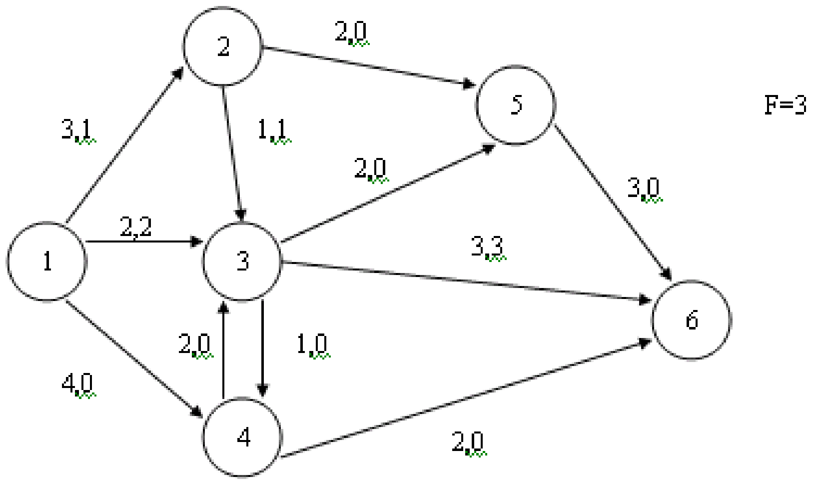


Рисунок 61

На рис. 61 показано новое состояние сети с потоком в 3 единицы. На рис. 62–67 показано выполнение операций А и В, которые привели к увеличению потока в сети до 8 единиц.

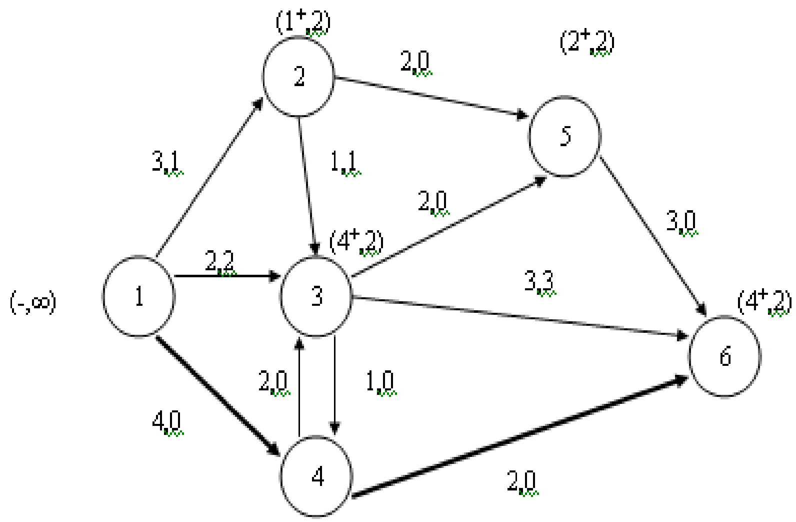


Рисунок 62

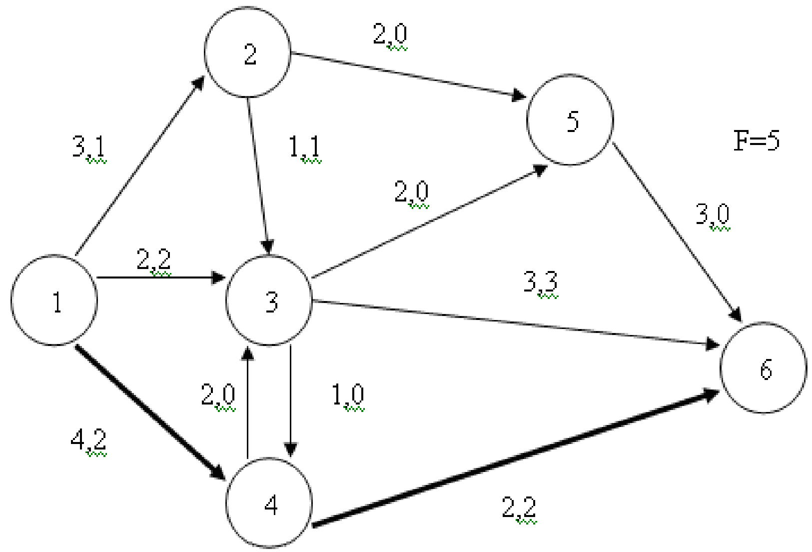


Рисунок 63

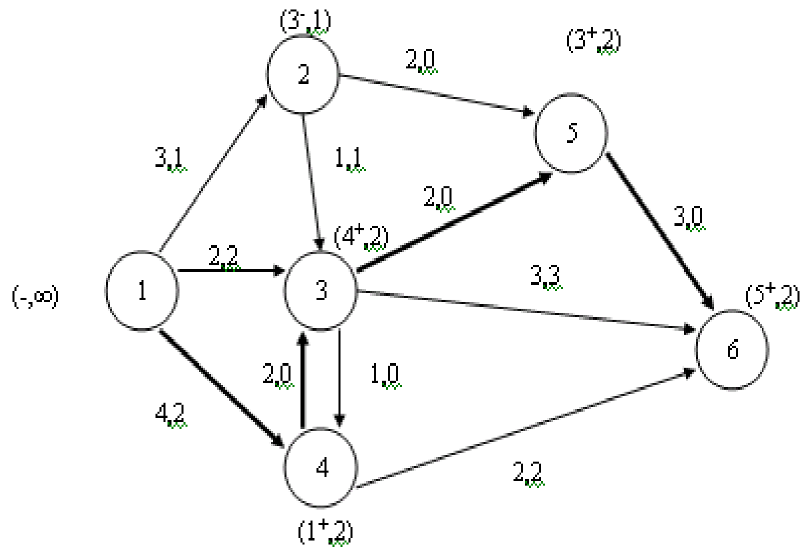


Рисунок 64

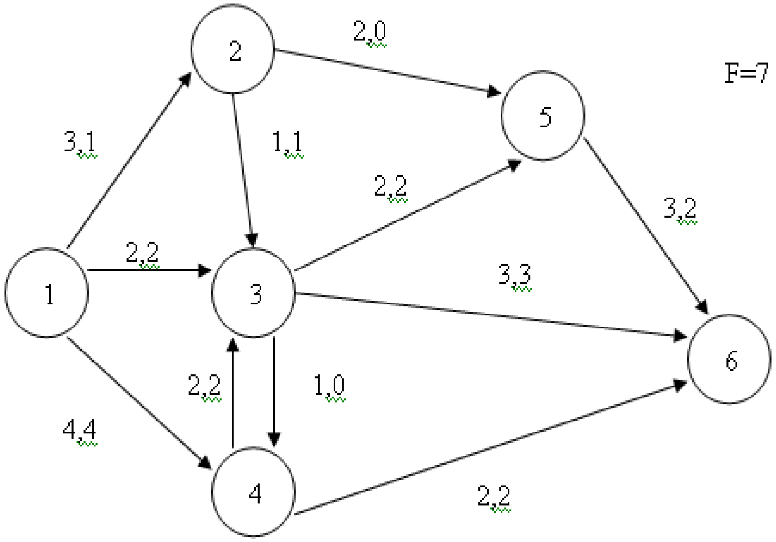


Рисунок 65

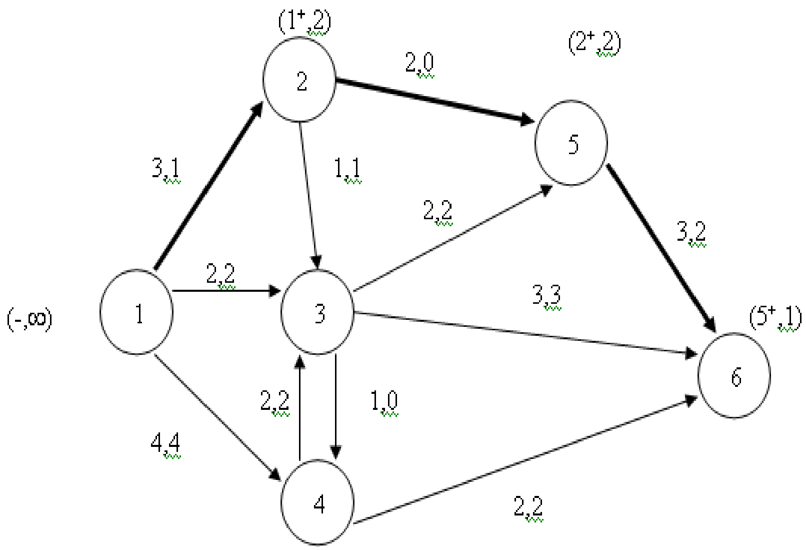


Рисунок 66

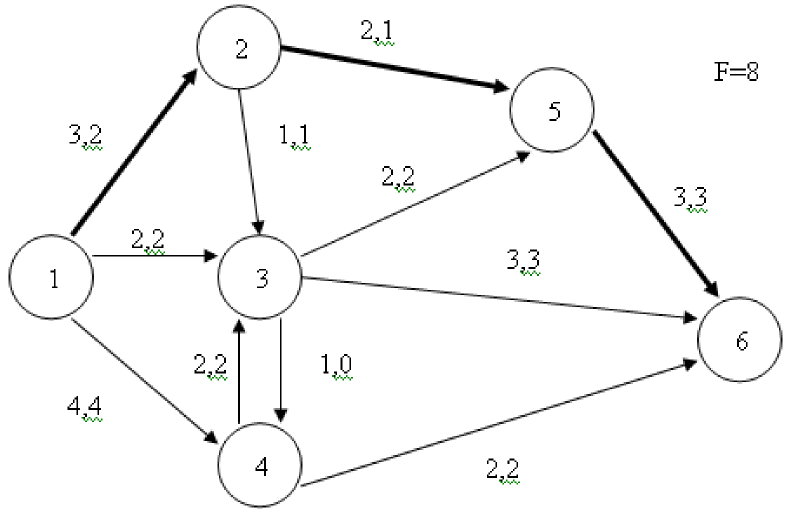


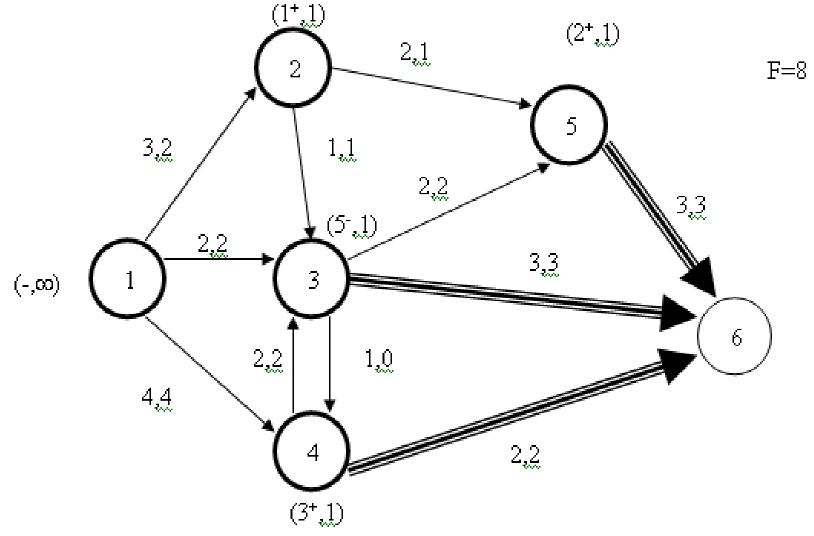
Рисунок 67

На рис. 68 показана попытка нахождения нового прорыва в сети. При этом вершины 2 и 5 получили пометки $(1^+, 1)$ и $(2^+, 1)$ соответственно. Заметим, что в данном случае удается пометить узел 3 пометкой $(5^-, 1)$, так как по дуге (3, 5) есть ненулевой поток. После этого удается пометить вершину 4 пометкой $(3^+, 1)$. Однако дальнейшее выполнение алгоритма невозможно, так как дуги (5, 6), (3, 6) и (4, 6) имеют нулевую остаточную пропускную способность. Так как не удается пометить вершину 6 (сток), то на предыдущем шаге выполнения алгоритма получен максимальный поток величины 8.

Поскольку помеченными оказались вершины 1–5, а непомеченной – вершина 6, то минимальный разрез, отделяющий источник и сток, представляет собой совокупность дуг

$$\left(X, \overline{X}\right) = \left\{(5, 6), (3, 6), (4, 6)\right\}, \text{ где } X = \left\{1, 2, 3, 4, 5\right\}, \overline{X} = \left\{6\right\}.$$

Состояние сети приведено на рис. 68. Жирными стрелками изображен минимальный разрез $\left(X, \overline{X}\right)$.



$$X = \{1,2,3,4,5\};$$
$$\overline{X} = \{6\};$$
$$\left(X, \overline{X}\right) = \{(5,6),(3,6),(4,6)\}.$$

Рисунок 68

Решение задачи о максимальном потоке и минимальном разрезе с использованием надстройки MS EXCEL «Поиск решения»

Для получения математической модели задачи введем неотрицательные целочисленные переменные x_{ij}, которые интерпретируются как величина потока по дуге *(i, j)*. Тогда математическая модель может иметь, например, такой вид, как на рис. 69 [12].

Ограничение (2) требует, чтобы величина потока, выходящего из источника *s*, была равна величине потока, пришедшего в вершину *t*. Ограничение (4) требует, чтобы искомый путь был связным, то есть проходил через вершины графа *G*. Ограничение (5) требует, чтобы все переменные модели были неотрицательными целочисленными переменными.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{sj} \to \max_{x \in \Delta_\beta}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} - \sum_{i=1}^{n} x_{ii} = 0; & (2) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_{ji} = 0 \left(\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, i \neq s, i \neq t\right); & (3) \\ 0 \le x_{ij} \le c_{ij} & (4) \\ x_{ij} \in Z^1 \left(\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}\right). & (5) \end{cases}$$

Рисунок 69

Задача 6.2. Используя приведенную на рис. 70 сеть, найти максимальный поток с использованием надстройки «Поиск решения».

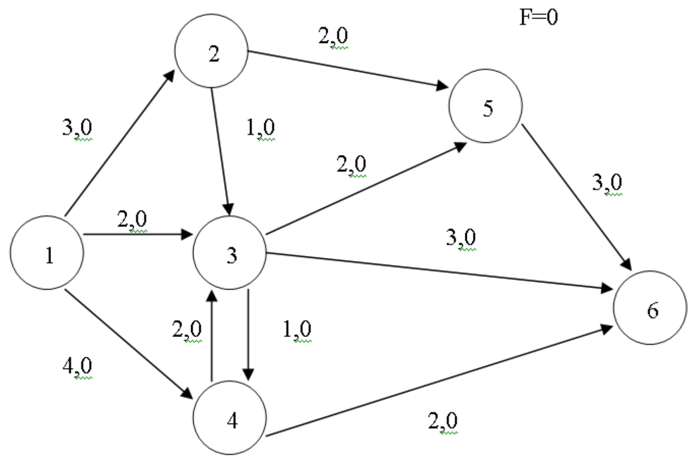


Рисунок 70

Решение. Расположим исходные данные на рабочем листе так, как на рис. 71. В столбец E введены ограничения в соответствии с моделью для данной индивидуальной задачи. На рис. 72 приведено окно диалога надстройки «Поиск решения», а на рис. 73 – полученное решение. Величина максимального потока в точности равна полученному значению при использовании алгоритма Форда-Фалкерсона.

	A	B	C	D	E
1	начальная вершина дуги	конечная вершина дуги	пропускная способность	поток	Ограничения
2	1	2	3	0	=СУММ(D2:D4)
3	1	3	2	0	=СУММ(D5:D7)
4	1	4	4	0	=D2-D8-D9
5	5	6	3	0	=D3+D12+D8-D10-D6
6	3	6	3	0	=D4+D11-D12-D7
7	4	6	2	0	=D9+D10-D5
8	2	3	1	0	
9	2	5	2	0	
10	3	5	2	0	
11	3	4	1	0	
12	4	3	2	0	
13					
14					
15					
16	Целевая функция				
17	=E2				

Рисунок 71

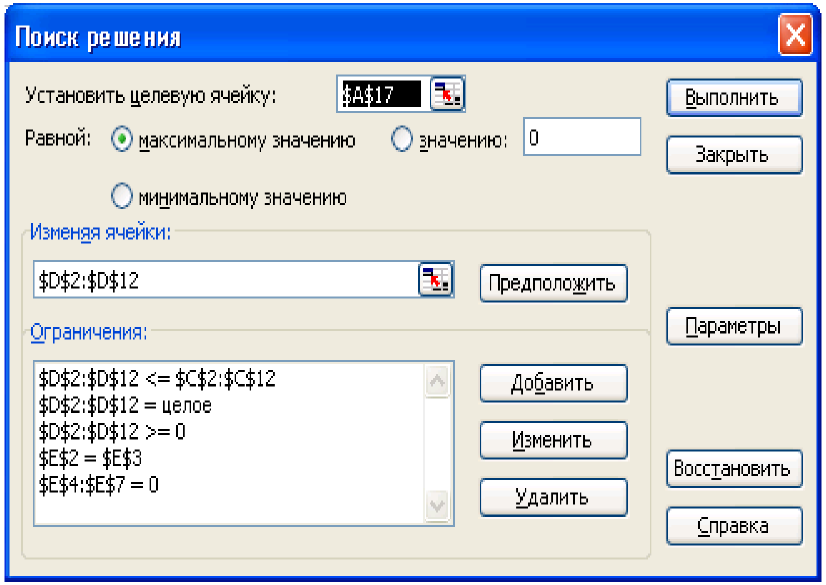


Рисунок 72

	A	B	C	D	E
1	начальная вершина дуги	конечная вершина дуги	пропускная способность	поток	Ограничения
2	1	2	3	2	8
3	1	3	2	2	8
4	1	4	4	4	0
5	5	6	3	3	0
6	3	6	3	3	0
7	4	6	2	2	0
8	2	3	1	1	
9	2	5	2	1	
10	3	5	2	2	
11	3	4	1	0	
12	4	3	2	2	
13					
14					
15					
16	Целевая функция				
17	8				

Рисунок 73

Задачи для самостоятельного решения

Сеть содержит 10 вершин (рис. 74). Пропускные способности дуг заданы таблицей. Найти максимальный поток между вершинами 1 и 10 и соответствующий минимальный разрез (номера вариантов указаны в верхнем левом углу таблицы).

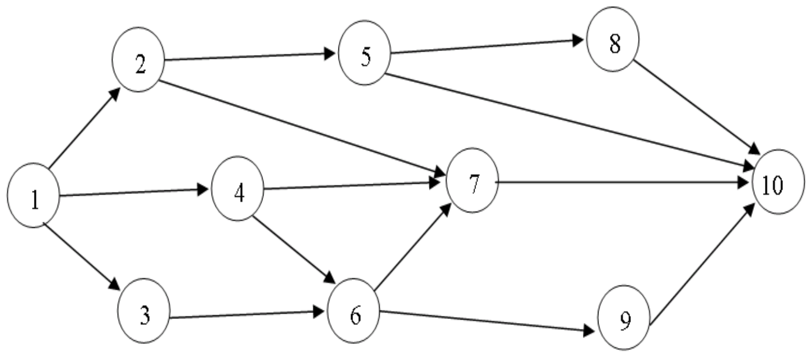


Рисунок 74

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	8	2	9	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	3	0	2	0	0	0
3	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	3	2	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	4	0	9	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	5	5	4	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	6	0	3	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	5	4	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	9	0	7
6	0	0	0	0	0	0	1	0	5	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	9	6	7	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	2	0	8	0	0	0
3	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	5	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	10	0	1
6	0	0	0	0	0	0	10	0	5	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	10	10	10	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	10	0	10	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	6	7	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	4	0	4
6	0	0	0	0	0	0	4	0	3	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	6	5	6	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	10	0	3	0	0	0
3	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	7	3	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	8	0	2
6	0	0	0	0	0	0	3	0	6	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	10	7	4	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	7	0	6	0	0	0
3	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	4	2	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2
6	0	0	0	0	0	0	7	0	6	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	5	2	6	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	6	0	9	0	0	0
3	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	9	8	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	6	0	7
6	0	0	0	0	0	0	9	0	10	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	2	9	2	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	8	6	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	8
6	0	0	0	0	0	0	3	0	6	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	5	10	2	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	2	0	9	0	0	0
3	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	5	7	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	2	0	3	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	3	10	9	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0
3	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	4	9	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	6	0	7
6	0	0	0	0	0	0	10	0	3	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	7	9	6	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	5	0	10	0	0	0
3	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	2	10	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5
6	0	0	0	0	0	0	6	0	9	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	8	6	4	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	9	0	2	0	0	0
3	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	5	0	5
6	0	0	0	0	0	0	1	0	5	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

7. Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ

Пусть n требований обслуживаются одним прибором. Все требования поступают на обслуживание в момент времени d=0. Длительность обслуживания требования k (k=1, 2,…, n) равна t_k единиц времени. Если требование k обслуживается первым, то для подготовки прибора к обслуживанию этого требования необходимо δ_{0k} единиц времени. Если требование j обслуживается непосредственно после требования i, то для переналадки прибора с обслуживания требования i на обслуживание требования j необходимо δ_{ij} единиц времени ($1 \le i \ne j \le n$). Требуется так организовать процесс обслуживания (то есть указать такую их последовательность), чтобы общее время обслуживания всех требований было минимальным. Нетрудно заметить, что искомой последовательности при этом должно соответствовать наименьшее время пуско-наладочных работ. В ряде случаев желательно также учитывать время δ_{k0}, требуемое на приведение обслуживающего устройства в исходное состояние, если требование k обслуживается последним. Таким образом, необходимо найти такую последовательность $\pi=(i_1, i_2,\ldots,i_n)$ обслуживания требований, чтобы величина

$$\delta_{0i_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{i_k i_{k+1}} + \delta_{i_n 0}$$

была наименьшей.

Эта задача допускает простую графическую интерпретацию. Рассмотрим полный симметрический ориентированный граф (X,U), где X={0,1,…,n} – множество вершин, U – множество дуг. Каждой дуге (i, j) графа приписано число σ_{ij}. Требуется найти контур, проходящий через каждую вершину один и только один раз (гамильтонов контур), которому соответствует наименьшая длина. Под длиной контура понимается величина, равная сумме длин дуг.

Приведем один из способов решения этой задачи − метод ветвей и границ (предложен в 1965 году группой авторов (Дж.Литтл, К.Мурти, Д.Суини, К.Кэрол).

Вначале для множества всех гамильтоновых контуров R определяется некоторая оценка снизу (нижняя граница) $\varphi_{(R)}$

длины контура. Затем множество всех гамильтоновых контуров разбивается на два подмножества. Первое подмножество состоит из гамильтоновых контуров, которые включают некоторую дугу (i, j). Обозначим это множество $\{(i, j)\}$. Второе множество состоит из гамильтоновых контуров, которые не включают эту дугу. Обозначим его $\overline{\{(i, j)\}}$. Для каждого из подмножеств $\{(i, j)\}$ и $\overline{\{(i, j)\}}$ определяется нижняя граница длины гамильтоновых контуров $\varphi_{(i,j)}$ и $\varphi_{\overline{(i,j)}}$. Каждая новая граница оказывается не меньше нижней границы всего множества гамильтоновых контуров $\varphi_{(R)}$. Среди двух подмножеств контуров $\{(i, j)\}$ и $\overline{\{(i, j)\}}$ выбирается подмножество с меньшей нижней границей. Это подмножество снова разбивается на два подмножества. Для вновь образованных подмножеств находится нижняя граница. Процесс разбиения подмножеств аналогичным образом продолжается до тех пор, пока не будет выделено подмножество, содержащее единственный гамильтонов контур. Взаимосвязь подмножеств, полученных в результате разбиения, изображается в виде дерева, вершинам которого приписываются нижние границы.

Получив гамильтонов контур, просматривают оборванные ветви дерева и сравнивают нижние границы множеств, соответствующих оборванным ветвям, с длиной полученного гамильтонова контура (рекорда). Если нижние границы подмножеств, соответствующих оборванным ветвям, окажутся меньше рекорда, то эти ветви развивают по тому же правилу. В результате развития ветвей могут быть получены новые гамильтоновы контуры. В этом случае рекорд берется равным наименьшей из длин гамильтоновых контуров. Решение задачи считается законченным, если нижние границы обозванных ветвей окажутся не меньше рекорда. В качестве оптимального контура выбирается контур с наименьшей длиной.

Расчет нижних границ может быть основан на следующем свойстве. Если найти длину оптимального контура с матрицей расстояний A, а затем из элементов некоторой строки или столбца матрицы A вычесть некоторое число a и снова решить задачу с новой матрицей, то контур не изменится, а длина его уменьшится на это число a. Действительно, длина оптимального контура состоит из n чисел, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Следовательно, изменение всех элементов строки или столбца на одно и то же число не влияет на оптимальное решение задачи. Если операцию вычитания проделать и для других строк и столбцов, то длина оптимального контура с измененной матрицей будет отличаться от длины оптимального контура с исходной матрицей на сумму чисел, вычитаемых из элементов строк и столбцов.

Поэтому для определения нижней границы множества всех гамильтоновых контуров необходимо в каждой строке матрицы A найти $\alpha_i = \min\limits_{1 \le i \le n}\{a_{ij}\}$ и вычесть это значение из всех элементов данной строки (операция приведения матрицы расстояний по строкам). В результате приведения матрицы в каждой ее строке будет, по крайней мере, по одному нулю (получена матрица A^*). Затем в матрице, приведенной по строкам, находим наименьший элемент $\beta_j = \min\limits_{1 \le j \le n}\{a^*_{ij}\}$ в каждом столбце матрицы A^* (операция приведения матрицы расстояний по столбцам). α_i, β_j – константы приведения. Полностью приведенная матрица содержит, по крайней мере, по одному нулю в каждой строке и каждом столбце.

Так как длина оптимального контура L_1 в задаче с полностью приведенной матрицей отличается от длины оптимального контура L в задаче с неприведенной матрицей на сумму констант приведения

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j ,$$

то $L=L_1+\gamma$.

В полностью приведенной матрице все элементы неотрицательны, поэтому $L_1 \ge 0$, а γ можно выбрать в качестве нижней границы длины гамильтонова контура, то есть положить $\varphi_{(R)} = \gamma$.

Рассмотрим способ выбора дуги (i, j), включение или невключение которой в контур разбивает множество гамильтоновых контуров на подмножества $\{(i, j)\}$ и $\overline{\{(i, j)\}}$.

Исключение дуги (i, j) из гамильтонова контура осуществляется заменой соответствующего элемента матрицы расстояний на ∞. В результате исключения появляется возможность выполнить дополнительное приведение в матрице и улучшить границу.

Включение дуги (i, j) в гамильтонов контур позволяет сократить размер матрицы за счет вычеркивания i-й строки и j-го столбца. Кроме того, при включении дуги (i, j) в гамильтонов контур появляется возможность образования негамильтонова контура, то есть контура, проходящего через часть вершин. Поэтому в целях предотвращения образования такого контура следует исключить из рассмотрения одну из дуг. В простейшем случае при включении дуги (i, j) в гамильтонов контур следует исключить из рассмотрения дугу (j, i). После этой операции следует выполнить операцию дополнительного приведения матрицы и улучшить нижнюю границу.

Наиболее вероятно, что в оптимальный контур войдут дуги, которым в приведенной матрице соответствуют нулевые элементы. Поэтому выбор следует осуществлять так. В приведенной матрице элемент $\alpha_{ij}=0$ условно заменяют на ∞. Этим самым дуга (i, j) будет исключаться из гамильтонова контура. Чтобы определить сумму констант приведения вновь полученной матрицы, необходимо сложить наименьший элемент α_i i-й строки с минимальным элементов β_j j-го столбца, так как остальные строки и столбцы содержат, по крайней мере, по одному нулевому элементу. Обозначим сумму констант приведения матрицы с исключенной дугой (i, j) через

$$\gamma_{\overline{(i,j)}} = \alpha_i + \beta_j .$$

Аналогичный расчет производится для всех остальных нулевых элементов приведенной матрицы, условно заменяя их на ∞.

В первую очередь будем исключать из контура ту дугу (i, j), для которой сумма констант приведения $\gamma_{\overline{(i,j)}}$ является наибольшей, так как в этом случае произойдет наиболее резкое изменение оценки.

При практических расчетах процесс разбиения множества контуров на подмножества продолжается до тех пор, пока не получится квадратная матрица второго порядка. При этом выбор двух последних дуг по ней должен осуществляться автоматически.

Опишем алгоритм решения задачи [10].

1. Привести матрицу расстояний по строкам и столбцам. Найти нижнюю границу всех гамильтоновых контуров

$$\varphi_{(R)} = \gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j .$$

2. Каждый ноль в приведенной матрице условно заменить на ∞ и найти сумму констант приведения $\gamma_{\overline{(i,j)}} = \alpha_i + \beta_j$. Значения $\gamma_{\overline{(i,j)}}$ записать в соответствующих строках и столбцах приведенной матрицы рядом с нулями.

3. Исключить ту дугу *(i, j),* для которой сумма констант приведения $\gamma_{\overline{(i,j)}}$ является наибольшей (исключение дуги (i, j) достигается заменой соответствующего элемента матрицы на ∞. В результате будет образовано подмножество гамильтоновых контуров $\{\overline{(i,j)}\}$.

4. Привести полученную матрицу расстояний и определить нижнюю границу $\varphi_{\overline{(i,j)}}$ подмножества контуров $\{\overline{(i,j)}\}$.

5. Включить дугу (i, j) в контур, что приведен к исключению из матрицы, полученной после выполнения п. 2, i-й строки и j-го столбца. Заменить один из элементов полученной матрицы на ∞ для предотвращения образования негамильтонова контура.

6. Привести полученную матрицу расстояний и определить нижнюю границу $\varphi_{(i,j)}$ подмножества контуров $\{(i,j)\}$.

7. Проверить размерность сокращенной матрицы. Если сокращенная матрица имеет размерность 2 на 2, то перейти к п. 9.

8. Сравнить нижние границы подмножеств контуров $\varphi_{\overline{(i,j)}}$ и $\varphi_{(i,j)}$ и перейти к шагу 2. Если при этом $\varphi_{\overline{(i,j)}} < \varphi_{(i,j)}$, то разбиению подлежит подмножество $\{\overline{(i,j)}\}$, в противном случае – подмножество $\{(i,j)\}$.

9. Определить гамильтонов контур и его длину.

10. Сравнить длину полученного контура с нижними границами оборванных ветвей. Если длина контура не превосходит нижних границ оборванных ветвей дерева решений, то получен оптимальный гамильтонов контур. Если длина полученного гамильтонова контура больше границы некоторых ветвей, то, действуя по алгоритму, развиваем эти ветви до тех пор, пока не получим контур с меньшей длинной или убедимся, что такого не существует.

Задача 7.1. Найти решение задачи коммивояжера для графа с матрицей расстояний

	1	2	3	4	5	6
1	∞	20	28	12	39	32
2	21	∞	15	9	17	27
3	30	25	∞	45	29	47
4	7	52	40	∞	15	1
5	60	46	11	5	∞	34
6	11	45	14	21	30	∞

Решение. Выполним приведение матрицы по строкам:

	1	2	3	4	5	6	
1	∞	20	28	12	39	32	12
2	21	∞	15	9	17	27	9
3	30	25	∞	45	29	47	25
4	7	52	40	∞	15	1	1
5	60	46	11	5	∞	34	5
6	11	45	14	21	30	∞	11
							63 $= \sum_{i=1}^{6} \alpha_i$

В результате будет получена матрица:

	1	2	3	4	5	6
1	∞	8	16	0	27	20
2	12	∞	6	0	8	18
3	5	0	∞	20	4	22
4	6	51	39	∞	14	0
5	55	41	6	0	∞	29
6	0	34	3	10	19	∞

Выполним приведение матрицы по столбцам:

	1	2	3	4	5	6
1	∞	8	16	0	27	20
2	12	∞	6	0	8	18
3	5	0	∞	20	4	22
4	6	51	39	∞	14	0
5	55	41	6	0	∞	29
6	0	34	3	10	19	∞
			3		4	

$$7 = \sum_{j=1}^{6} \beta_j$$

В результате будет получена полностью приведенная матрица:

	1	2	3	4	5	6
1	∞	8	13	0	23	20
2	12	∞	3	0	4	18
3	5	0	∞	20	0	22
4	6	51	36	∞	10	0
5	55	41	3	0	∞	29
6	0	34	0	10	15	∞

Сумма констант приведения для полностью приведенной матрицы равна

$$\sum_{i=1}^{6}\alpha_i + \sum_{j=1}^{6}\beta_j = 70.$$

Выполняем оценку для нулевых элементов полностью приведенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} \infty & 8 & 13 & 0^8 & 23 & 20 \\ 12 & \infty & 3 & 0^3 & 4 & 18 \\ 5 & 0^8 & \infty & 20 & 0^4 & 22 \\ 6 & 51 & 36 & \infty & 10 & 0^{24} \\ 55 & 41 & 3 & 0^3 & \infty & 29 \\ 0^6 & 34 & 0^3 & 10 & 15 & \infty \end{pmatrix}$$

Наибольшую оценку получил элемент, находящийся на пересечении 4 строки и 6 столбца. Поэтому все множество гамильтоновых контуров разбивается на подмножества $\{(4,6)\}$ и $\{\overline{(4,6)}\}$. На рис. 75 приведено дерево решений на данном этапе.

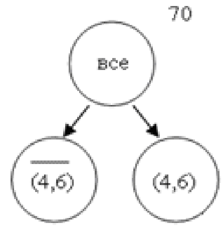


Рисунок 75

Рассмотрим подмножество $\{(4,6)\}$. Включая дугу (4, 6) в контур, следует запретить вхождение дуги (6, 4) (рис. 76).

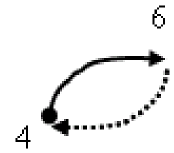


Рисунок **76**

Вычеркиваем 4 строку, 6 столбец и запрещаем переход (6, 4). В результате получится матрица, приведенная на рис. 77.

(4,6)	1	2	3	4	5
1	∞	8	13	0	23
2	12	∞	3	0	4
3	5	0	∞	20	0
5	55	41	3	0	∞
6	0	34	0	∞	15

Рисунок 77

Так как в каждой строке и каждом столбце вновь полученной матрицы есть нулевой элемент, то $\varphi_{\{(4,6)\}} = 70$.

Невключение дуги (4, 6) в множество гамильтоновых контуров приводит к матрице, приведенной на рис. 78. Полученную таким образом матрицу можно привести по 4 строке и 6 столбцу, в результате чего оценка увеличится на 24 и станет равной 94. На рис. 79 приведено дерево решений с оценками вершин на данном этапе.

$$\begin{pmatrix} \infty & 8 & 13 & 0^8 & 23 & 20 \\ 12 & \infty & 3 & 0^3 & 4 & 18 \\ 5 & 0^8 & \infty & 20 & 0^4 & 22 \\ 6 & 51 & 36 & \infty & 10 & \infty \\ 55 & 41 & 3 & 0^3 & \infty & 29 \\ 0^5 & 34 & 0^3 & 10 & 15 & \infty \end{pmatrix}$$

Рисунок 78

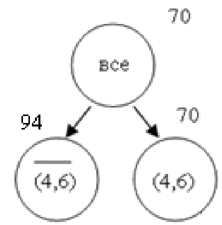


Рисунок 79

Так как 70<94, то рассматриваем множество контуров, включающих дугу (4, 6). Выполняем оценку нулевых элементов матрицы, приведенной на рис. 80.

(4,6)	1	2	3	4	5
1	∞	8	13	0^8	23
2	12	∞	3	0^3	4
3	5	0^8	∞	20	0^4
5	55	41	3	0^4	∞
6	0^5	34	0^3	∞	15

Рисунок 80

Наибольшую оценку, равную 8, имеют два элемента, поэтому выбираем любой из них, например, (1, 4). На рис. 81 приведено дерево решений на данном этапе.

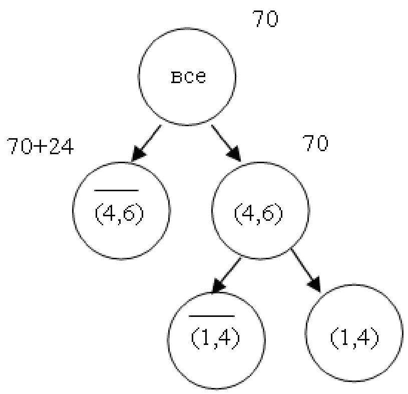


Рисунок 81

Невключение дуги (1, 4) приведет к увеличению оценки на 8 (рис. 82).

	1	2	3	4	5
1	∞	8	13	∞	23
2	12	∞	3	0	4
3	5	0	∞	20	0
5	55	41	3	0	∞
6	0	34	0	∞	15

8

	1	2	3	4	5
1	∞	0	5	∞	15
2	12	∞	3	0	4
3	5	0	∞	20	0
5	55	41	3	0	∞
6	0	34	0	∞	15

Рисунок 82

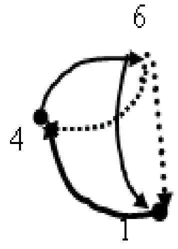


Рисунок 83

Включение дуги (1, 4) потребует запретить переход по дуге (6, 1) (рис. 83). Соответствующая матрица после вычеркивания 1 строки, 4 столбца и замены элемента (6, 1) на ∞, приведена на рис. 84.

(1, 4)	1	2	3	5
2	12	∞	3	4
3	5	0	∞	0
5	55	41	3	∞
6	∞	34	0	15

Рисунок 84

Эту матрицу следует привести по строкам и столбцам. Результат приведения показан на рис. 85.

(1, 4)	1	2	3	5	
2	12	∞	3	4	3
3	5	0	∞	0	
5	55	41	3	∞	3
6	∞	34	0	15	
					6

(1, 4)	1	2	3	5
2	9	∞	0	1
3	5	0	∞	0
5	52	38		∞
6	∞	34	0	15
	5			

(1, 4)	1	2	3	5
2	4	∞	0	1
3	0	0	∞	0
5	47	38		∞
6	∞	34	0	15

Рисунок 85

В результате получаем дерево решений, приведенное на рис. 86.

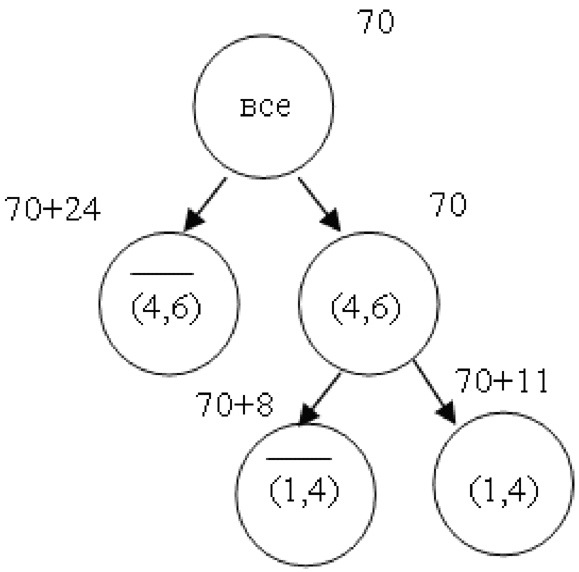


Рисунок 86

Так как 78<81, следует использовать вариант невключения дуги (1, 4). Это означает возврат к матрице, приведенной на рис. 82 справа. Выполняем оценку нулевых элементов этой матрицы
(рис. 87).

	1	2	3	4	5
1	∞	0^5	5	∞	15
2	12	∞	3	0^3	4
3	5	0^0	∞	20	0^4
5	55	41	3	0^3	∞
6	0^5	34	0^3	∞	15

Рисунок 87

Наибольшую оценку получил элемент, расположенный в 1 строке и 2 столбце. Следовательно, дерево решений на данном этапе принимает вид в соответствии с рис. 88.

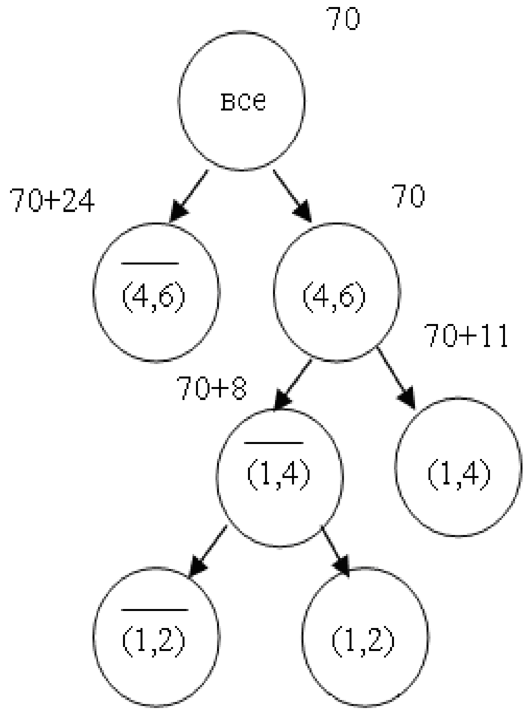


Рисунок 88

Невключение дуги (1, 2) приведет к увеличению оценки на 5 (рис. 89).

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	5	∞	15
2	12	∞	3	0	4
3	5	0	∞	20	0
5	55	41	3	0	∞
6	0	34	0	∞	15

5

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	0	∞	10
2	12	∞	3	0	4
3	5	0	∞	20	0
5	55	41	3	0	∞
6	0	34	0	∞	15

Рисунок 89

Включение дуги (1, 2) потребует запретить переход по дуге (2, 1) (рис. 90).

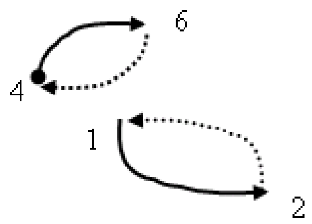


Рисунок 90

(1,2)	1	3	4	5
2	∞	3	0	4
3	5	∞	20	0
5	55	3	0	∞
6	0	0	∞	15

Рисунок 91

Соответствующая матрица после вычеркивания 1 строки, 2 столбца и замены элемента (2, 1) на ∞ приведена на рис. 91.

Эта матрица приведена по строкам и столбцам. В результате получаем дерево решений, приведенное на рис. 92. Так как 78<83, продолжаем решение задачи по ветке, включающей дугу (1, 2).

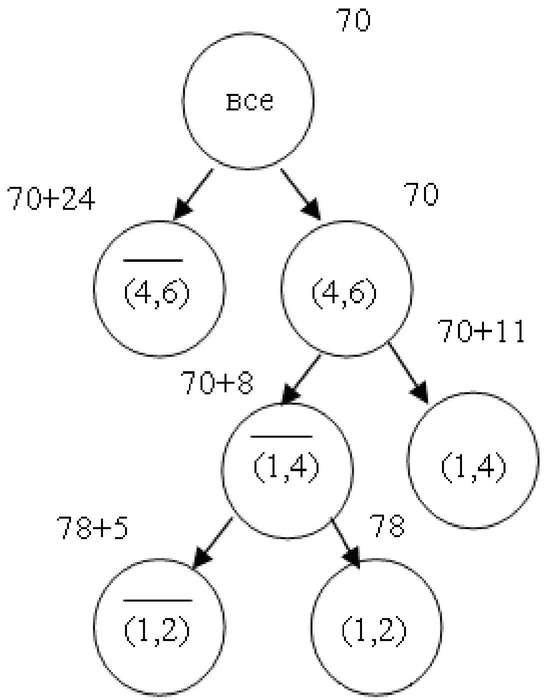


Рисунок 92

Выполняем оценку нулевых элементов матрицы, приведенной на рис. 91. Результат приведения показан на рис. 93.

Наибольшую оценку получил элемент, расположенный в 3 строке и 5 столбце. Следовательно, дерево решений на данном этапе принимает вид в соответствии с рис. 94.

(1,2)	1	3	4	5
2	∞	3	0^{3}	4
3	5	∞	20	0^{9}
5	55	3	0^{3}	∞
6	0^{5}	0^{3}	∞	15

Рисунок 93

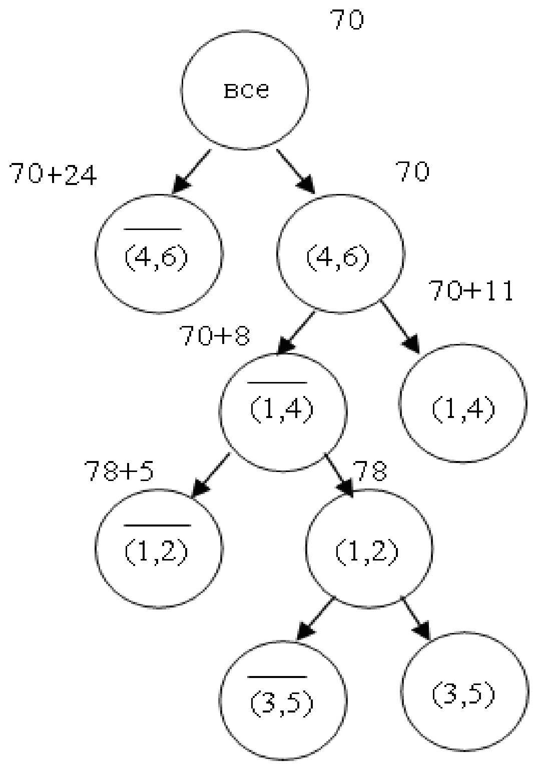


Рисунок 94

Невключение дуги (3, 5) приведет к увеличению оценки на 9 (рис. 95).

(3,5)	1	3	4	5	
2	∞	3	0	4	
3	5	∞	20	∞	5
5	55	3	0	∞	
6	0	0	∞	15	

(3,5)	1	3	4	5
2	∞	3	0	4
3	0	∞	15	∞
5	55	3	0	∞
6	0	0	∞	15
				4

(3,5)	1	3	4	5
2	∞	3	0	0
3	0	∞	15	∞
5	55	3	0	∞
6	0	0	∞	11

Рисунок 95

Включение дуги (3, 5) потребует запретить переход по дуге (5, 3) (рис. 96).

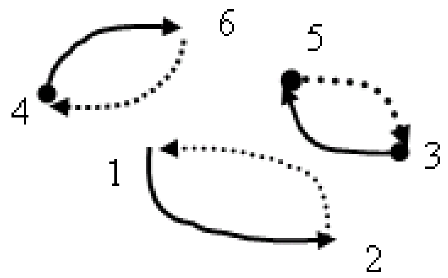


Рисунок 96

Соответствующая матрица после вычеркивания 3 строки, 5 столбца и замены элемента (5, 3) на ∞ приведена на рис. 97.

(3,5)	1	3	4
2	∞	3	0
5	55	∞	0
6	0	0	∞

Рисунок 97

(3,5)	1	3	4
2	∞	3	0^{3}
5	55	∞	0^{55}
6	0^{55}	0^{3}	∞

Рисунок 98

Эта матрица приведена по строкам и столбцам. В результате получаем дерево решений, приведенное на рис. 99. Так как 78<87, продолжаем решение задачи по ветке, включающей дугу (3, 5).

Выполняем оценку нулевых элементов матрицы, приведенной на рис. 97. Результат приведения показан на рис. 98.

Наибольшую оценку получили два элемента (5 строка, 4 столбец и 6 строка, 1 столбец). Следовательно, дерево решений на данном этапе принимает вид в соответствии с рис. 100.

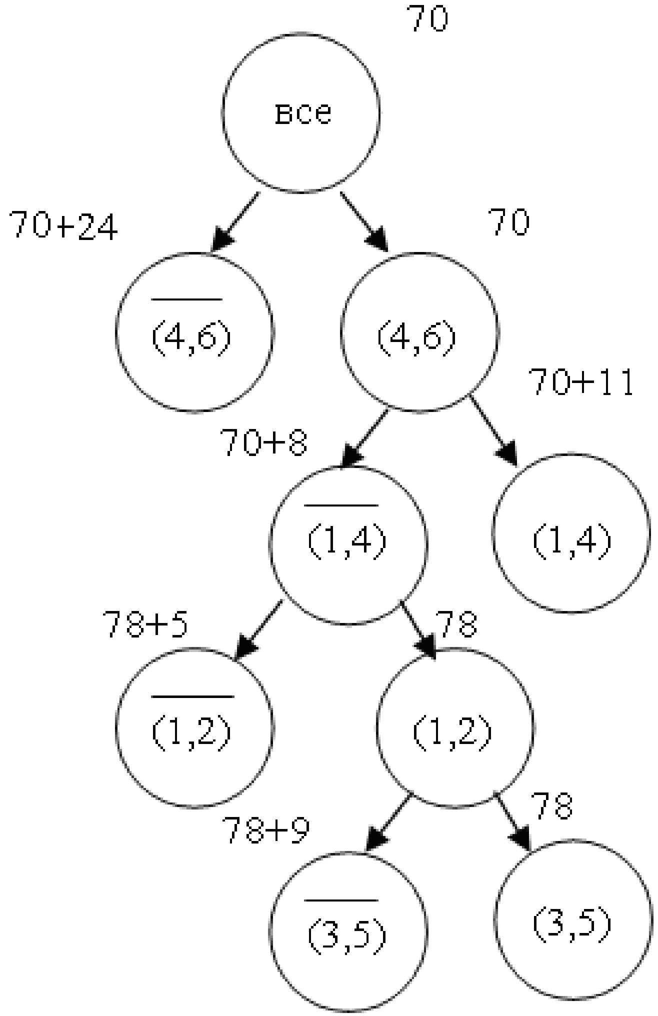


Рисунок 99

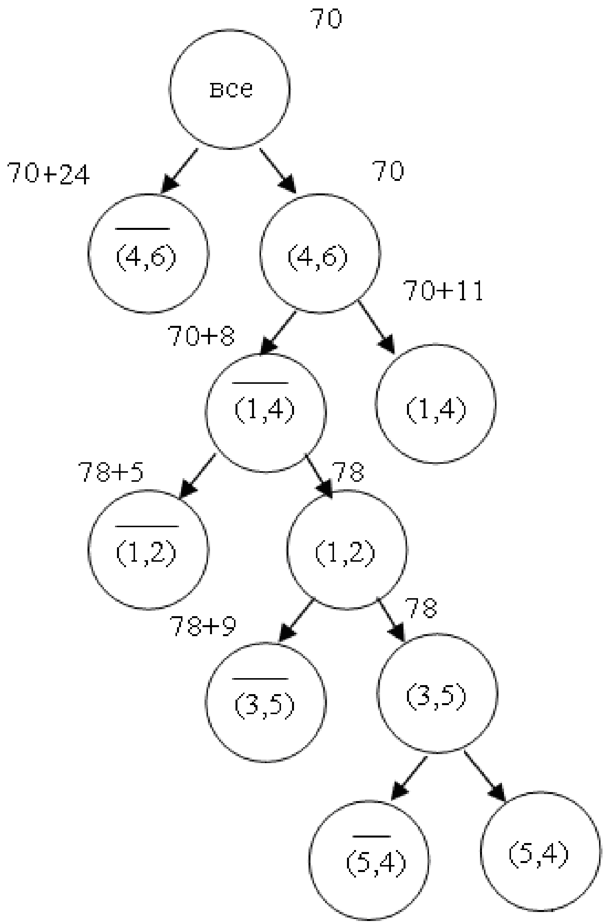


Рисунок 100

Невключение дуги (5, 4) приведет к увеличению оценки на 55 (рис. 101).

	1	3	4
2	∞	3	0
5	55	∞	∞
6	0	0	∞

55

	1	3	4
2	∞	3	0
5	0	∞	∞
6	0	0	∞

Рисунок 101

Включение дуги (5, 4) потребует запретить переход по дуге (6, 5) (рис. 102).

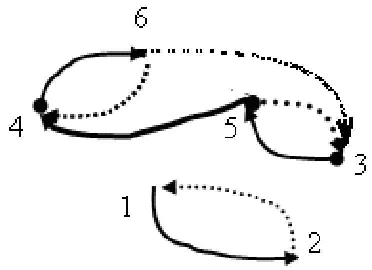


Рисунок 102

Соответствующая матрица после вычеркивания 5 строки и 4 столбца приведена на рис. 103. Так как 5 столбца в матрице уже нет, то и переход по дуге (6, 5) уже невозможен. Зато следует запретить переход по дуге (6, 3).

Приводя полученную квадратную матрицу порядка 2 путем вычитания 3 из первой строки, получаем увеличение оценки на 3.

(5,4)	1	3
2	∞	3
6	0	∞

3

(5,4)	1	3
2	∞	0
6	0	∞

Рисунок 103

В последней матрице выбор двух оставшихся дуг производится однозначно − это дуги (6, 1) и (2, 3). На рис. 104 приведен полученный контур, а на рис. 105 – дерево решений. Длина полученного контура равна 81.

Анализируя полученное решение, приходим к выводу о том, что оно оптимально, так как оценки всех остальных «оборванных» ветвей дерева не меньше полученного значения.

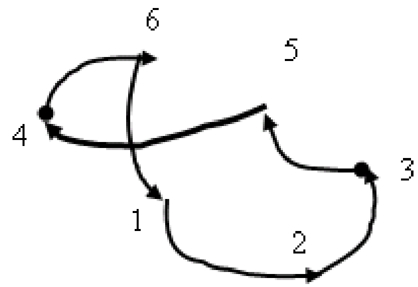


Рисунок 104

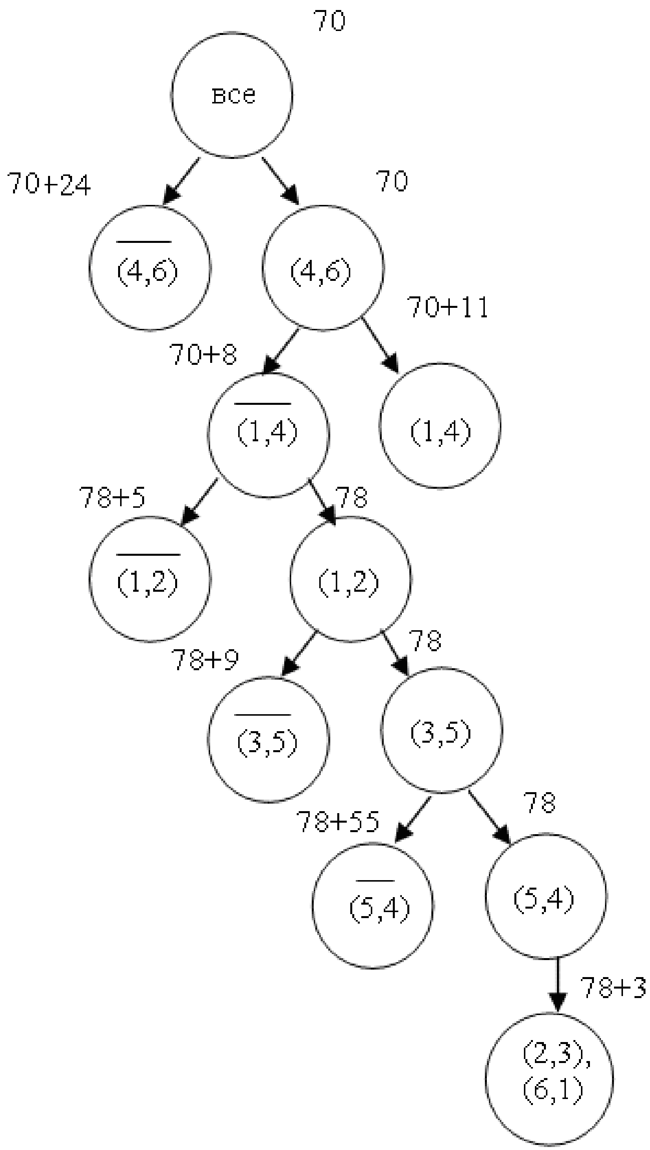


Рисунок 105

Решение задачи коммивояжера с использованием надстройки MS EXCEL «Поиск решения»

Приведем математическую модель задачи. Пусть переменная x_{ij} означает наличие дуги вида (i, j) в гамильтоновом контуре, а a_{ij} интерпретируется как длина указанной дуги. Тогда математическая модель задачи имеет вид [12]:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (\forall j \in \{1, 2, 3, ..., n\}); & (2) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}); & (3) \\ u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \le n-1 \ (\forall i, j \in \{2, 3, ..., n\}, i \ne j); & (4) \\ x_{ij} \in \{0,1\} (\forall i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}); & (5) \\ \mathrm{u_i} \in R^1 \ (\forall i \in \{2, 3, ..., n\}). & (6) \end{cases}$$

Ограничения (1)–(2) означают, что из каждой вершины можно выйти только один раз и, аналогично, войти в нее можно только один раз. Так как решением задачи должен быть гамильтонов контур, то ограничения (4) обеспечивают невозможность распадения контура-решения на отдельные контуры. Ограничения (5) указывают, что переменные x_{ij} являются булевыми, то есть принимают только значения 0 или 1. Ограничения (6) указывает на принадлежность переменных u_i множеству вещественных чисел.

*Задача 7.2***.** Найти решение задачи коммивояжера для графа с заданной матрицей расстояний с использованием надстройки «Поиск решения».

	1	2	3	4	5	6
1	∞	20	28	12	39	32
2	21	∞	15	9	17	27
3	30	25	∞	45	29	47
4	7	52	40	∞	15	1
5	60	46	11	5	∞	34
6	11	45	14	21	30	∞

Решение. Воспользуемся приведенной выше моделью для представления исходных данных, целевой функции и ограничения на рабочем листе MS EXCEL (рис. 106).

	A	B	C	D	E	F	G
1	1000	20	28	12	39	32	исходные данные
2	21	1000	15	9	17	27	
3	30	25	1000	45	29	47	
4	7	52	40	1000	15	1	
5	60	46	11	5	1000	34	
6	11	45	14	21	30	1000	
7	переменные						
8	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	
15		0	0	0	0	0	
16		2	3	4	5	6	
17	2	0	0	0	0	0	ограничения
18	3	0	0	0	0	0	
19	4	0	0	0	0	0	
20	5	0	0	0	0	0	
21	6	0	0	0	0	0	

Рисунок 106

На рис. 107 приведены формулы, находящиеся в ячейках G8:G13, A14:F14, B17:F21 соответственно.

	A	B	C	D	E	F	G
7	переменные						
8	0	0	0	0	0	0	=СУММ(A8:F8)
9	0	0	0	0	0	0	=СУММ(A9:F9)
10	0	0	0	0	0	0	=СУММ(A10:F10)
11	0	0	0	0	0	0	=СУММ(A11:F11)
12	0	0	0	0	0	0	=СУММ(A12:F12)
13	0	0	0	0	0	0	=СУММ(A13:F13)
14	=СУММ(A8:A13)	=СУММ(B8:B13)	=СУММ(C8:C13)	=СУММ(D8:D13)	=СУММ(E8:E13)	=СУММ(F8:F13)	
16		2	3	4	5	6	
17	2	0	=$B$15-C15+6*C9	=$B$15-D15+6*D9	=$B$15-E15+6*E9	=$B$15-F15+6*F9	
18	3	=$C$15-B15+6*B10	0	=$C$15-D15+6*D10	=$C$15-E15+6*E10	=$C$15-F15+6*F10	
19	4	=$D$15-B15+6*B11	=$D$15-C15+6*C11	0	=$D$15-E15+6*E11	=$D$15-F15+6*F11	
20	5	=$E$15-B15+6*B12	=$E$15-C15+6*C12	=$E$15-D15+6*D12	0	=$E$15-F15+6*F12	
21	6	=$F$15-B15+6*B13	=$F$15-C15+6*C13	=$F$15-D15+6*D13	=$F$15-E15+6*E13	0	

Рисунок 107

На рис. 108–110 приведены состояние окна диалога надстройки «Поиск решения» и его параметров, а также рабочего листа MS EXCEL.

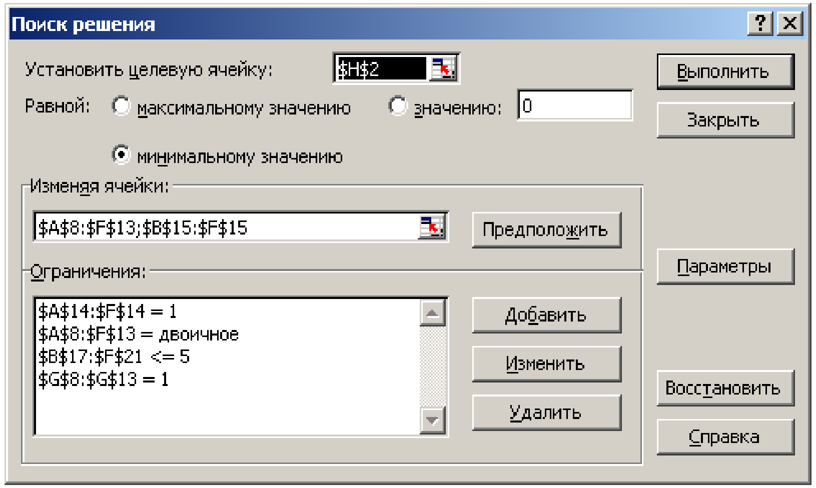


Рисунок 108

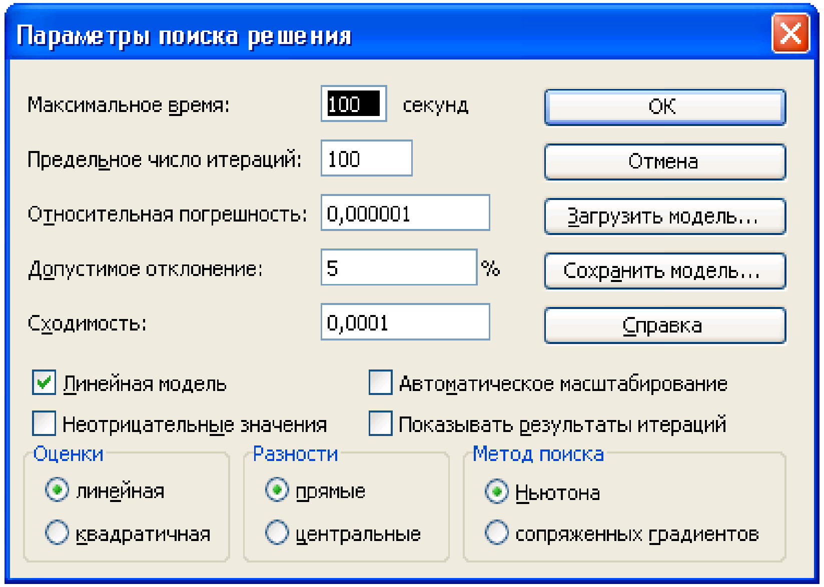


Рисунок 109

7	переменные							
8	0	1	0	0	0	0	1	
9	0	0	1	0	0	0	1	
10	0	0	0	0	1	0	1	
11	0	0	0	0	0	1	1	
12	0	0	0	1	0	0	1	
13	1	0	0	0	0	0	1	
14	1	1	1	1	1	1		
15		0	1	3	2	4		
16		2	3	4	5	6		
17	2	0	5	-3	-2	-4		
18	3	1	0	-2	5	-3		
19	4	3	2	0	1	5	ограни	
20	5	2	1	5	0	-2	чения	
21	6	4	3	1	2	0		

Рисунок 110

На рис. 111 показано полученное значение целевой функции. Оно полностью совпадает с расчетным значением.

H	I	J
целевая функция		
81		

Рисунок 111

Полученный контур можно увидеть на рис. 112 в ячейках, соответствующих изменяемым ячейкам: 1 в изменяемых ячейках на рис. 110 означает включение соответствующей дуги в контур. При расчетах с помощью MS EXCEL получен контур, приведенный на рис. 112 справа.

контур					
	(1;2)				
		(2;3)			
				(3;5)	
					(4;6)
			(5;4)		
(6;1)					

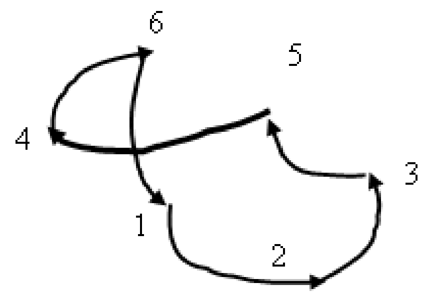


Рисунок 112

ε-подход к решению задачи коммивояжера

Пусть через R^* обозначена длина оптимального контура для задачи коммивояжера, а через R – длина некоторого найденного контура (рекорда). Говорят, что некоторый контур является ε-оптимальным, если выполняется условие (1).

Поскольку R^* заранее неизвестно, следует выполнять проверку соотношения (1) другим способом. Пусть получена длина некоторого контура *R,* однако эта длина больше нижних границ для некоторых оборванных ветвей дерева решений. Следуя алгоритму метода ветвей и границ, необходимо развивать эти ветви до тех пор, пока не будет получен контур с меньшей длиной или мы убедимся, что такого контура не существует. Если же нас устраивает ε-приближенное решение, то часть ветвей с оценкой O < R можно не рассматривать, если для них выполняется условие (2).

$$\frac{R-R^*}{R^*}\le\varepsilon. \qquad (1) \qquad \frac{R-O}{O}\le\varepsilon. \qquad (2)$$

Действительно, так как $R^*=O+\Delta$ $(\Delta\ge 0)$, то, подставляя в (2) вместо O разность $R^*-\Delta$, получим:

$$\frac{R-R^*+\Delta}{R^*-\Delta}\le\varepsilon \;\rightarrow\; R-R^*+\Delta\le\varepsilon(R^*-\Delta) \;\rightarrow$$

$$R-R^*\le\varepsilon(R^*-\Delta)-\Delta \;\rightarrow\; R-R^*\le\varepsilon R^*-\varepsilon\Delta-\Delta\rightarrow$$

$$\frac{R-R^*}{R^*}\le\varepsilon-\frac{\Delta}{R^*}(\varepsilon+1)\le\varepsilon.$$

Задача 7.3. Найти ε-приближенное решение задачи коммивояжера с заданной матрицей расстояний.

Решение. Выполнив приведение матрицы по строкам и столбцам, получим полностью приведенную матрицу. Сумма констант приведения (нижняя оценка длин всех гамильтоновых контуров) при этом равна 65. Продолжая процесс решения, получаем контур, приведенный на рис. 113. Дерево решений при этом выглядит так, как показано на рис. 114.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	15	7	10	9	21	5	11
2	17	∞	10	15	7	12	6	9
3	11	9	∞	13	25	14	8	10
4	12	7	13	∞	21	24	10	17
5	23	8	9	13	∞	15	21	16
6	17	21	8	11	13	∞	10	14
7	9	11	20	15	10	17	∞	8
8	7	12	17	10	9	11	22	∞

∞	10	2	2	3	12	0	6
11	∞	4	6	0	2	0	3
3	1	∞	2	16	2	0	2
5	0	6	∞	13	13	3	10
15	0	1	2	∞	3	13	8
9	13	0	0	4	∞	2	6
1	3	12	4	1	5	∞	0
0	5	10	0	1	0	15	∞

Длина полученного контура равна 69. Среди оборванных ветвей дерева решений есть вершина с оценкой 68. Так как 68<69, то для получения точного решения пришлось бы выполнить ветвление по подмножеству $\{\overline{(4,2)}\}$. Если требуется найти ε-приближенное решение при ε=0,02, то получаем:

$$\frac{69-68}{68}=0{,}014706\le 0{,}02.$$

Следовательно, решение заданной точности получено.

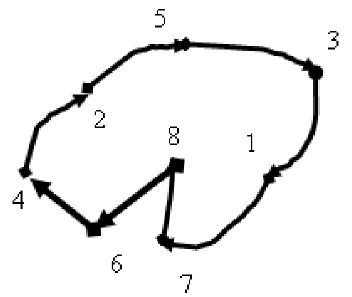


Рисунок 113

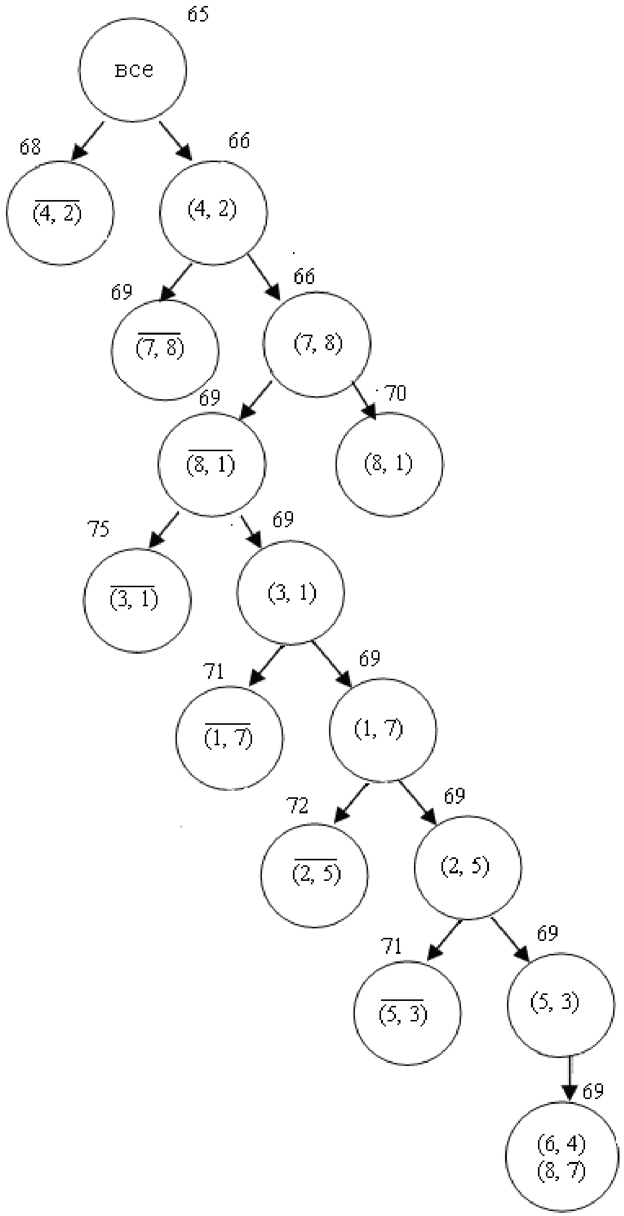


Рисунок 114

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти точное решение задач коммивояжера методом ветвей и границ:

1.1.

∞	31	15	19	8	55
19	∞	22	31	7	35
25	43	∞	53	57	16
5	50	49	∞	39	9
24	24	33	5	∞	14
34	26	6	3	36	∞

1.2.

∞	20	28	12	39	32
21	∞	15	9	17	27
30	25	∞	45	29	47
7	52	40	∞	15	1
60	46	11	5	∞	34
11	45	14	21	30	∞

1.3.

∞	22	30	14	41	34
23	∞	17	11	19	29
32	27	∞	47	31	49
9	54	44	∞	17	3
62	48	13	7	∞	36
13	47	16	23	32	∞

1.4.

∞	64	57	52	1	33
37	∞	40	3	68	18
29	3	∞	33	9	25
48	35	29	∞	44	36
49	64	4	8	∞	58
43	3	69	16	35	∞

1.5.

∞	60	31	66	7	15
7	∞	23	4	37	58
32	43	∞	18	5	12
4	31	56	∞	50	9
50	37	58	34	∞	11
12	43	38	60	48	∞

1.6.

∞	9	67	42	40	58
47	∞	66	31	6	68
1	4	∞	9	43	22
19	69	4	∞	47	45
31	46	68	10	∞	21
69	39	7	15	30	∞

1.7.

∞	17	53	29	34	16
35	∞	41	20	37	45
41	4	∞	65	38	59
40	29	46	∞	15	40
33	4	49	50	∞	25
49	11	8	35	24	∞

1.8.

∞	65	60	59	3	41
61	∞	34	70	70	32
30	29	∞	44	16	51
58	41	10	∞	28	4
55	58	38	12	∞	28
24	57	56	15	37	∞

1.9.

∞	22	54	52	41	52
17	∞	52	35	36	28
4	62	∞	63	35	41
37	63	7	∞	36	68
19	34	17	64	∞	10
65	34	62	3	26	∞

1.10.

∞	27	28	4	3	70
58	∞	14	70	6	31
68	19	∞	10	43	17
4	43	22	∞	33	57
47	44	58	69	∞	60
50	9	35	2	36	∞

1.11.

∞	50	47	44	46	64
3	∞	70	5	50	1
24	41	∞	20	68	11
44	15	43	∞	59	7
63	49	12	30	∞	26
49	22	52	22	62	∞

1.12.

∞	62	62	68	26	5
5	∞	23	21	2	2
64	45	∞	17	9	29
66	47	5	∞	65	58
35	32	57	64	∞	1
64	34	70	8	51	∞

1.13.

∞	6	9	60	8	18
44	∞	16	49	34	58
10	41	∞	11	56	6
43	30	40	∞	17	4
49	42	26	18	∞	41
59	64	18	52	27	∞

1.14.

∞	8	66	17	32	43
1	∞	35	70	62	27
4	59	∞	35	30	1
52	30	41	∞	51	70
18	8	32	6	∞	17
13	63	40	24	61	∞

1.15.

∞	41	13	10	5	31
45	∞	16	28	6	67
45	4	∞	50	12	61
37	31	24	∞	20	67
7	6	62	24	∞	40
49	41	3	7	26	∞

1.16.

∞	26	54	63	8	6
40	∞	68	17	16	20
42	43	∞	64	68	18
60	18	9	∞	49	3
21	32	9	7	∞	57
29	44	43	24	18	∞

2. Найти точное решение задач коммивояжера, используя надстройку MS Excel «Поиск решения» для матриц расстояний, приведенных в задании 1.

3. Найти ε-приближенное решение задачи коммивояжера для приведенных ниже матриц расстояний:

3.1

∞	1	18	5	6	14	7	4	8	9
2	∞	2	17	2	6	19	8	16	7
14	17	∞	7	4	7	10	5	17	6
10	3	18	∞	16	20	10	18	17	1
3	3	11	1	∞	1	16	14	16	15
12	5	14	12	20	∞	20	5	14	6
2	16	10	18	11	12	∞	14	7	1
15	20	16	15	4	3	19	∞	12	18
14	6	2	13	6	18	4	6	∞	20
4	4	6	4	12	10	6	4	13	∞

3.2

∞	12	9	1	5	16	6	14	19	9
11	∞	19	16	4	15	17	3	12	19
13	2	∞	4	15	5	6	13	2	10
14	14	3	∞	1	6	19	15	5	13
5	7	16	9	∞	14	8	18	10	6
10	7	2	4	13	∞	7	12	5	6
15	3	1	7	10	20	∞	14	17	2
18	18	10	9	17	16	2	∞	18	14
20	1	12	11	17	1	20	18	∞	13
5	17	12	18	11	12	20	13	14	∞

3.3

∞	11	17	8	19	15	13	4	1	6
9	∞	3	1	5	5	12	11	3	9
12	13	∞	12	20	9	11	17	14	2
4	6	16	∞	12	1	13	10	15	18
6	7	18	4	∞	7	4	9	5	9
16	3	16	20	19	∞	18	4	7	18
5	11	16	7	11	20	∞	11	19	7
11	17	19	3	7	18	19	∞	9	4
7	20	3	8	11	17	14	1	∞	4
14	16	4	9	4	3	2	19	20	∞

3.4

∞	11	9	2	16	14	6	4	20	11
2	∞	5	9	18	2	6	8	12	11
8	19	∞	9	13	17	2	4	2	15
17	1	7	∞	17	11	7	7	2	2
5	10	16	1	∞	10	15	19	7	20
10	6	20	11	12	∞	10	11	1	12
20	3	8	9	2	18	∞	5	2	2
7	16	12	15	1	13	18	∞	2	10
12	19	17	19	3	7	13	5	∞	14
9	20	6	4	5	5	7	1	20	∞

3.5

∞	6	11	1	7	12	17	16	20	8
7	∞	19	4	3	19	20	5	8	4
14	2	∞	15	7	14	16	19	19	14
4	2	2	∞	5	4	8	20	15	3
7	15	19	3	∞	17	2	12	4	5
19	7	14	1	14	∞	3	15	15	18
16	3	12	8	9	3	∞	19	5	5
8	15	12	10	11	10	13	∞	6	5
11	19	13	5	3	3	3	3	∞	16
7	1	19	5	15	2	1	8	5	∞

3.6

∞	16	12	12	6	10	13	20	4	17
9	∞	14	13	4	11	8	5	3	7
7	6	∞	11	4	1	5	3	17	17
17	13	16	∞	8	12	19	12	19	5
8	13	6	19	∞	19	10	7	11	11
11	16	2	20	11	∞	15	7	3	2
2	5	9	3	3	11	∞	14	4	17
2	11	12	14	5	9	12	∞	3	14
7	2	15	16	9	18	20	8	∞	5
14	5	16	15	14	8	9	9	2	∞

3.7

∞	20	5	8	5	20	6	11	13	8
10	∞	7	17	19	17	8	9	4	7
8	11	∞	18	11	16	13	15	4	20
15	13	4	∞	19	18	9	2	15	6
19	6	6	5	∞	8	15	2	10	16
17	11	1	17	10	∞	12	10	1	17
4	10	9	16	8	6	∞	14	5	7
16	11	14	3	18	4	3	∞	20	2
17	9	2	10	6	16	13	12	∞	14
11	15	3	10	5	1	19	16	15	∞

3.8

∞	19	18	2	18	9	12	4	11	16
4	∞	7	16	9	11	17	13	18	12
5	19	∞	7	17	17	5	14	7	14
7	13	6	∞	12	19	2	2	11	7
18	19	6	5	∞	19	11	8	9	10
5	14	18	15	20	∞	13	3	2	15
7	10	2	12	16	18	∞	20	11	14
8	4	5	20	1	5	14	∞	11	15
15	9	16	14	8	3	11	9	∞	10
5	18	16	12	6	3	9	8	16	∞

3.9

∞	9	17	9	1	13	4	20	3	8
9	∞	4	6	10	10	8	5	7	16
2	20	∞	17	3	17	14	14	12	18
19	4	19	∞	6	3	6	18	20	8
15	3	8	1	∞	17	8	20	16	16
20	8	13	13	19	∞	20	8	13	12
20	10	15	1	4	14	∞	11	17	1
12	16	4	2	3	14	3	∞	17	13
5	3	9	8	7	3	3	8	∞	14
10	17	2	6	13	6	6	4	3	∞

Список рекомендуемой литературы

1. Адельсон-Вельский, Г.М. Потоковые алгоритмы / Г.М. Адельсон-Вельский, Е.А. Диниц, А.В. Карзанов. – М.: Наука, 1975. – 120 с.
2. Белов, В.В. Теория графов / В.В. Белов, Е.М. Воробьев, В.Е. Шаталов. – М.: Высшая школа, 1976. – 392 с.
3. Блаттнер, П. Использование Microsoft Office Excel 2003 / П. Блаттнер. Специальное издание. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 864 с.
4. Винтер, Р. Microsoft Office для Windows 95 в подлиннике / Р. Винтер, П. Винтер. – Санкт-Петербург: BHV – Санкт-Петербург, 1996. – 1056 с.
5. Гончаров, А. EXEL 7.0 в примерах / А.Гончаров. – Санкт-Петербург: Питер, 1996. – 256 с.
6. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982. – 406 с.
7. Дегтярев, Ю.Н. Исследование операций / Ю.Н. Дегтярев. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.
8. Зыков, А. А. Основы теории графов / А. А.Зыков. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
9. Карлберг, К. Управление данными с помощью Microsoft Excel / К. Карлберг. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 448 с.
10. Конвей, Р.В. Теория расписаний / Р.В. Конвей, В.Л. Максвелл, Л.В. Миллер. – М.: Наука, 1975. – 360 с.
11. Кузнецов, О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов, Г.М. Адельсон-Вельский. – М.: Энергия, 1980. – 344 с.
12. Леонников, А.В. Решение задач оптимизации в среде MS EXCEL / А.В. Леонников. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 704 с.
13. Майника, Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Э. Майника. – М.: Мир, 1981. – 323 с.
14. Экономическое моделирование в MICROSOFT EXCEL / Дж.Мур [и др.]. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 1024 с.
15. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. – Санкт-Петербург: Питер, 2007. – 364 с.
16. Ревчук, И.Н. Автоматизация офисной деятельности / И.Н. Ревчук, В.К. Пчельник. – Гродно: ГрГУ, 2004. – 128 с.
17. Ревчук, И.Н. Компьютерные информационные технологии / И.Н. Ревчук, В.К. Пчельник. – Гродно: ГрГУ, 2005. – 201 с.
18. Рейнгольд, Э. Комбинаторные алгоритмы / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, И. Део. – М.: Мир, 1980. – 480 с.
19. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
20. Столяр, А.А. Логическое введение в математикут / А.А. Столяр. – Минск: Вышэйшая школа, 1971. – 224 с.

21. Танаев, В.С. Введение в теорию расписаний / В.С. Танаев, В.В. Шкурба. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
22. Таха, Х. Введение в исследование операций: в 2 т. / Х. Таха. – М.: Мир, 1985. – 2 т.
23. Уокенбах, Д. Подробное руководство по созданию формул в Excel 2002 / Д. Уокенбах. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 624 с.
24. Филлипс, Д. Методы анализа сетей / Д. Филлипс, А. Гарсиа-Диас. – М.: Мир, 1984. – 496 с
25. Форд, Л. Потоки в сетях / Л. Форд, Д. Фалкерсон. – М.: Мир, 1966. – 276 с
26. Харари, Ф. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. – М.: Мир, 1977. – 324 с.
27. Ху, Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху. – М.: Мир, 1974. – 520 с.
28. Шапорев, С.Д. Дискретная математика / С.Д. Шапорев. – Санкт-Петербург: Питер, 2006. – 400 с.
29. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский. – М.: Наука, 1979. – 272 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание
Ревчук Ирина Николаевна
Пчельник Владимир Константинович

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Пособие

Редактор М.В.Вахмянина

Компьютерная верстка: И.Н.Ревчук

Сдано в набор 12.03.2007. Подписано в печать 04.05.2007 г.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Печать RISO. Гарнитура Таймс.
Усл.печ.л. 7,42. Уч.-изд.л. 6,54. Тираж . Заказ .

Учреждение образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».

ЛИ № 02330/0133257 от 30.04.2004. Ул. Пушкина, 39, 230012, Гродно.

Отпечатано на технике издательского центра
Учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».
ЛП № 02330/0056882 от 30.04.2004.Ул. Пушкина, 39, 230012, Гродно.