ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Исследование операций
Часть II
Модели управления запасами

Учебно-методическое пособие

Специальности
010101 (010100) — Математика

Воронеж
2005

Утверждено научно-методическим советом
математического факультета
14 июня 2005 года
Протокол №11

Составители: Михайлова И.В.
Баркова Л.Н.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета

Рекомендуется для студентов 4–5 курсов всех форм обучения

Учебно-методическое пособие написано в соответствии с программой курса «Исследование операций». Оно содержит краткие теоретические сведения и задачи для самостоятельного решения.

Введение

В течение ряда лет студентам математического факультета ВГУ читался специальный курс «Исследование операций».

Содержание этого курса составляют четыре раздела: 1) общие математические модели операции; 2) элементы теории игр; 3) модели управления запасами; 4) системы массового обслуживания.

По темам 1, 2 существует обширная литература, в которой содержится большое число задач для самостоятельного решения. Там же можно найти и некоторые рекомендации к решению типовых задач. Значительно хуже обстоит дело с задачами по разделу 3, что затрудняло проведение практических занятий по данное курсу.

Авторы настоящих методических указаний попытались восполнить этот пробел.

1. Динамические модели управления запасами

Рассмотрим простейшую модель управления запасами с постоянной интенсивностью спроса α и поставок β ($\beta > \alpha$). График изменения запасов $J(t)$ показан на рис. 1 (в течение интервала $(0, t_1)$ — поступление и потребление, в интервале (t_1, t_1+t_2) только потребление, в $(t_1+t_2, t_1+t_2+t_3)$ — накопление дефицита, а в $(t_1 + t_2 + t_3, T)$ — поступление и погашение дефицита).

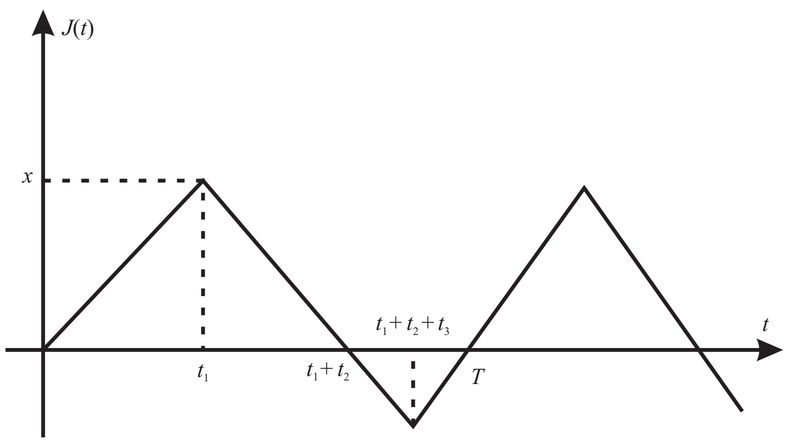

Рисунок 1.

Обозначим: x — максимальный уровень запаса, T — продолжительность полного цикла, c_1 — стоимость заказа и запуска в производство одной партии сырья, c_2 — стоимость хранения одной единицы сырья в единицу времени, c_3 — штраф за дефицит одной единицы сырья, $W(x, t)$

— средние по времени затраты при максимальном уровне запасов x и продолжительность цикла T.

Определить x^0, T^0 по критерию минимума затрат.

Для решения задачи найдем

$$W(x,T) = \frac{1}{T}\left(c_1 + \frac{(c_3+c_2)\beta x^2}{2\alpha(\beta-\alpha)}\right) + \frac{c_3\alpha}{2\beta}(\beta-\alpha)T - c_3 x.$$

Решая систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W(x,T)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial W(x,T)}{\partial T} = 0, \end{cases}$$

получим

$$x^0 = \sqrt{\frac{2c_1\alpha(1-\gamma)}{\left(1+\frac{c_2}{c_3}\right)c_2}}, \quad T^0 = \sqrt{\frac{2c_1\left(1+\frac{c_2}{c_3}\right)}{c_2\alpha(1-\gamma)}}, \tag{1}$$

где $\gamma = \dfrac{\alpha}{\beta}$. При этом минимальные средние затраты

$$W(x^0,T^0) = \sqrt{\frac{2\alpha(1-\gamma)c_1c_2}{1+\frac{c_2}{c_3}}}. \tag{2}$$

Задача 1. *Мыловаренный завод выпускает моющие средства, используя для всех них одно и то же оборудование. Очистка оборудования и подготовка его к производству данного вида моющих средств стоят 1000 ден. ед.Интенсивность спроса на данное моющее средство составляет 100 тонн в месяц. Спрос не случаен. Издержки производства на тонну продукции составляют 200 ден. ед. Стоимость хранения одной тонны моющего средства в месяц равна 34 ден. ед. Чему равен оптимальный объем продукции, производимой за один цикл, если дефицит не допускается? Чему равна продолжительность цикла?*

Решение. Обозначим $J(t)$ — количество тонн данного вида продукта, произведенное к моменту времени t для $t < T$. Можно считать, что график функции $J(t)$ будет иметь вид (рис. 2).

Тогда, переходя, в (1), (2) к пределу при $\beta \to \infty$, $c_3 \to \infty$ и считая, что $c_1 = 1000$ ден. ед., $c_2 = 34$ ден. ед., $\alpha = 100$ тонн в месяц, получим

$$x^0 = \sqrt{\frac{2c_1\alpha}{c_2}} \approx 76,7\ (\text{т}), T^0 = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2\alpha}} = \frac{x_0}{\alpha} \approx 23\ (\text{дн})$$
$$W(x^0,T^0) = \sqrt{3c_1c_2\alpha} = \sqrt{68\cdot 10^5} = 10^3\sqrt{6,8} = 2600 \text{ ден. ед.}$$

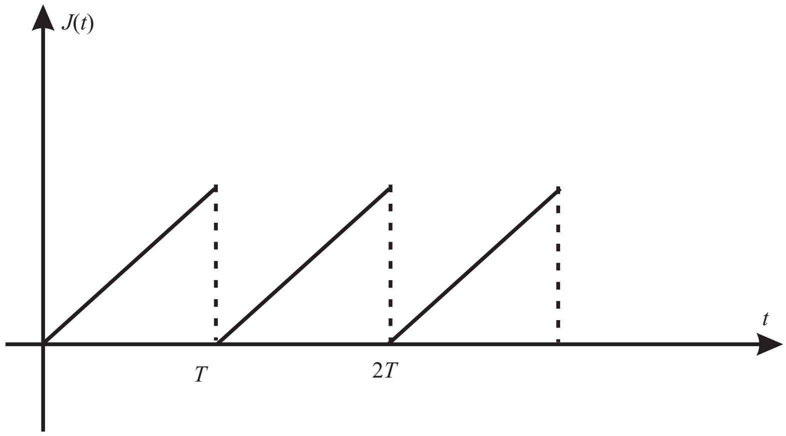

Рисунок 2.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Полная загрузка танкера нефтью может быть осуществлена за N циклов в течение недели. (N составов цистерн с нефтью. Заполнение танкера происходит равномерно в течение периода загрузки. Причем момент окончательного опустошения всех цистерн одного состава есть момент начала откачки нефти из другого состава. Каждый из N составов содержит одинаковое число цистерн вместимостью 50 т. Грузоподъемность танкера 100000 т. Затраты на подготовительные операции для каждого из составов — 100 ден. ед. Стоимость хранения 1 т нефти 10 ден. ед. в сутки.

Найти оптимальное количество цистерн в составе (по критерию минимума средних затрат).

1.2. Предприятие должно поставить заказчику 12000 деталей в год. Заказчик не имеет склада. Требуемые детали расходуются с постоянной интенсивностью. Дефицит деталей не допускается. Предприятие может изготовить все 12000 изделий в начале года, а затем отпускать эти изделия со склада равномерно о течение года. Оно может также выпускать продукцию несколько раз в год партиями меньшего объема. За счет этого уменьшается стоимость хранения запасов, но увеличиваются затраты на оформление заказа.

Определить оптимальное число производственных периодов, если известно, что стоимость оформления заказа равна 500 ден. ед., а стоимость хранения — 0,3 ден. ед. на одно изделие в единицу времени (в месяц).

1.3. Рассмотреть ситуацию, предлагаемую в задаче 1.2, считая возможным дефицит. Стоимость нехватки одной детали (ущерб) за единицу времени составляет 1 ден. ед. (единица времена — месяц).

1.4. Один из цехов кондитерской фабрики каждые сутки должен подавать несколько заказов на поставку патоки для приготовления карамели. Каждый заказ поступает как одна партия, причем в доставке патоки возможны перебои. Патока расходуется равномерно (с постоянной интенсивностью). Суточная потребность цеха — 1 т патоки. Затраты на подготовительные операции для выполнения каждого из заказов 10 ден. ед. Стоимость хранения 1 кг патоки 1 ден. ед. в час. Отсутствие патоки приводит к убытку 2 ден. ед. на каждый недостающий килограмм патоки в час.

Найти оптимальный объем партии (средние затраты) и максимальный уровень запасов, предполагая, что дефицит можно погасить мгновенно.

1.5. Один из цехов кондитерской фабрики работает в следующем режиме. Производство шоколадной смеси происходит одновременно с удовлетворением потребности цеха в этой смеси. Через τ часов выпуск смеси прекращается, а оставшиеся запасы расходуются. Как только будут израсходованы все запасы, мгновенно начинается следующий цикл (производственный период τ, потребление) и т. д.

В течение недели интенсивность потребления смеси постоянна и равна 8 кг в час. Интенсивность производства шоколадной смеси составляет 10 кг в час. Стоимость подготовительных операций для каждого производственного периода 10 ден. ед., стоимость хранения 1 кг смеси в час 2 ден. ед.

Определить оптимальное количество производственных циклов (минимизировать затраты).

1.6. Производство товаров широкого потребления в течение некоторого промежутка времени происходит одновременно с удовлетворением спроса (так называемый производственный период). Затем выпуск продукции прекращается, а запасы расходуются с той же интенсивностью, что и в производственный период. Как только уровень запасов станет равным нулю, мгновенно начинается следующий производственный период, затем опять только потребление и т. д.

В течение года интенсивность потребления товара постоянна и равна 1000 ед. в месяц, а интенсивность производства 3000 ед. в месяц. Стоимость подготовительных операций для каждого производственного периода 500 ден. ед. Стоимость хранения 1 ед. товара в месяц — 3 ден. ед.

Определить оптимальную длительность производственного периода (минимизировать затраты).

1.7. Отдел текстильных товаров большого универсального магазина продает 500 штук купальных полотенец определенного вида. Стоимость заказа одной партии составляет 2 ден. ед. Стоимость хранения одного полотенца в месяц равна 0,34 ден. ед.

Считая, что спрос неслучаен и что дефицит не допускается, определите оптимальный размер заказа. Чему равно время между моментами подачи заказов на пополнение? Время поставки составляет один месяц. Чему равна точка заказа, подсчитанная по уровню наличного запаса?

1.8. В большой авторемонтной мастерской на некоторую деталь наблюдается очень низкий спрос, равный 8 единицам в год. Его можно считать неслучайным и постоянным во времени. Стоимость подачи заказа на эту деталь составляет 1 ден. ед. Хранение в мастерской одного изделия в течение года обходится 6 ден. ед.

Определить оптимальный размер заказываемой партии. Чему равно время между моментами подачи заказов?

1.9. Химическое предприятие производит партиями органическое вещество. Годовая интенсивность спроса на эту продукцию составляет 100000 кг. Можно считать, что спрос известен точно и что его интенсивность во времени не меняется. Фиксированные затраты на изготовление партии равны 500 ден. ед. Переменные издержки производства равны 2 ден. ед. на 1 кг. Издержки по учету требований, не реализованных вовремя, ее составляют 5 ден. ед. на 1 кг в год.

Определить оптимальный размер партии и оптимальное число учтенных требований.

1.10. Предприятие, производящее электронное оборудование, выпускает магнитные сердечники определенного типа партиями. В день может быть изготовлено 1600 сердечников. Ежедневный спрос на сердечники этого типа составляют 250 штук. Стоимость переналадки оборудования равна 700 ден. ед. Издержки по хранению одного сердечника в день равны 0,30 ден. ед.

Считая, что дефицит недопустим, найдите оптимальный размер партии. Сколько времени должен длиться производственный цикл (интервал, в котором одновременно происходят и потребление и производство)? Чему равна длина цикла?

1.11. Предприятие, производящее детали для автомобилей, выпускает коленчатые валы партиями. Предприятие решило применить: формулу экономичного размера партии для минимизации, суммарных издержек на переналадку и на хранение запасов. Ежегодный спрос равен восьми тысячам валов. Стоимость каждой переналадки равна 245 ден. ед. (исходя из нормы затраченного времени). Издержки на хранение одного вала составляют 2 ден. ед. в год. Предположим, что в год можно провести лишь четыре переналадки оборудования. Чему равен оптимальный размер партии? Каков оптимальный размер партии, если бригада наладчиков может проводить десять переналадок?

1.12. На складе тары хранятся ящики, каждый из которых занимает 4 кв. м, площади стеллажей составляют 600 кв м. Ежегодно в год требуется 2000 ящиков. Стоимость оформления одной партии ящиков равна 5 ден. ед., стоимость хранения одного ящика за год обходится 0,50 ден. ед.

Во что обойдется один дополнительный метр складского помещения? Сколько будут стоить 100 дополнительных квадратных метров стеллажей?

2. Статические модели управления запасами

Статические модели управления запасами применяются в тех случаях, когда для удовлетворения спроса может подаваться только один заказ на закупку товара.

Дискретная модель. Рассмотрим задачу, представляющую исключительный интерес для промышленности. Это задача о закупке запасных частей для основного оборудования.

Предположим, что при покупке основного оборудования может быть приобретено определенное число запасных частей по относительно низкой цене c за каждую единицу. Обозначим через Z количество единиц запасного оборудования, которое потребуется в течение срока службы основного оборудования. Z — дискретная случайная величина, возможные значения которой $z \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Ущерб, причиняемый отсутствием каждой единицы запасного оборудования, равен u. Обычно этот ущерб очень велик. Он включает в себя стоимость дополнительного оборудования, которая, как правило, больше c, и убытки, связанные с простоем основного оборудования. Отсюда следует, что $u > c$.

Допустим, что неиспользованное запасное оборудование может быть реализовано по цене v за единицу ($v < c$).

Наша задача определить оптимальное число запасных частей, минимизируя средние затрата.

Обозначим затраты при закупке x единиц запасного оборудования через $W(x, Z)$. Очевидно, $W(x, Z)$ будет случайной величиной и

$$W(x,z) = \begin{cases} cx - (x-z)v, & z \leqslant x, \\ cx + (z-x)u, & z > x. \end{cases}$$

Тогда средние затраты

$$\overline{W}(x) = MW(x,z) = cx + u\sum_{z=x+1}^{\infty}(z-x)P\{Z=z\} - v\sum_{z=0}^{x}(x-z)P\{Z=z\}.$$

Наша задача найти такое x^0, что

$$\overline{W}(x^0) = \min_{x \in M_0} \overline{W}(x), \tag{3}$$

где $M_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Можно показать, что x^0 удовлетворяющее (3), является решением системы

$$P\{Z \leqslant x-1\} \leqslant \frac{u-c}{u-v} \leqslant P\{Z \leqslant x\}, \quad x \in M_0,$$

которое в силу наших предположений, о параметрах u, c и V всегда существует.

Непрерывная модель. Рассмотрим следующую ситуацию. В большом продовольственном магазине необходимо определить, сколько молока нужно, заказать на день. Изучение накопленного опыта сбыта показало, что спрос Z за день можно считать случайной величиной, плотность распределения вероятностей которой $f(z)$ ($f(z) = 0$ для $z < 0$). Один литр молока продается за a ден. ед. Себестоимость товара для магазина составляет b ден. ед. за один литр. Все непроданное за день молоко сбывается по цене d ден. ед. за литр. Нужно определить оптимальный размер закупки, максимизирующий среднюю выручку за день.

Обозначим через $W(x, z)$ дневную выручку, если куплено x литров молока, а спрос на него z. Тогда

$$W(x,z) = \begin{cases} z(a-d) + x(d-b), & z < x, \\ x(a-b), & z \geqslant x, \end{cases}$$

и

$$\overline{W}(x) = MW(x,z) = (a-d)\int\limits_0^x zf(z)dz + x(a-b) + x(d-a)\int\limits_0^x f(z)dz.$$

Нетрудно показать, что оптимальный размер заказываемой партии является решением уравнения

$$\int_0^x f(z)dz = \frac{a-b}{a-d}, \quad x \geqslant 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. При постройке пяти судов нового класса военно-морским флотом для каждого из этих судов закупается запасное оборудование. Стоимость единицы оборудования для i-го судна равна c_i ден. ед.

$$c_i = i \cdot 10^5, \quad i = 1, 2, \ldots, 5.$$

Количество единиц Z запасного оборудования, требуемых в течение срока службы i-го судна, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λ_i.

$$\lambda_i = i \cdot 0,2 - 0,1, \quad i = 1, 2, \ldots, 5.$$

Ущерб, причиняемый вследствие отсутствия каждой единицы запасного оборудования, равен для i-го судна u_i ден. ед.

$$u_i = i \cdot 10^7, i = 1, 2, \ldots, 5.$$

Неиспользованное запасное оборудование уничтожается.

Определить число единиц запасного оборудования, которое должно быть закуплено, чтобы минимизировать средние убытки для каждого из судов в отдельности. Определить минимальные средние убытки.

2.2. Решить предыдущую задачу, предполагая, что неиспользованное запасное оборудование может быть реализовано по цене, равной v_i ден. ед. за единицу

$$v_i = 5 \cdot 10^4 \cdot i^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, 5.$$

2.3. Столовая ежедневно должна подавать заказ на поставку молока. Стоимость одного литра молока равна 22 ден. ед. Дневной спрос на молоко есть случайная величина, распределенная

а) равномерно в интервале $(100, 300)$;

б) показательно с параметром $\lambda = 0,005$;

в) по закону Симпсона ("закон равнобедренного треугольника") в интервале $(100, 300)$.

Отсутствие молока в столовой приводит к убытку, равному 0,50 ден. ед. на каждый недостающий литр. Каждый непроданный литр молока может быть реализован по цене 0,10 ден. ед.

Определить количество литров молока, которое должно ежедневно заказывать столовая, чтобы минимизировать средние убытки за день. Определить минимальное математическое ожидание убытков за день.

2.4. Решить предыдущую задачу, предполагая, что отсутствие молока в столовой приводит к убытку, равному 0,20 ден. ед., на каждый недостающий литр.

2.5. Строительно-монтажное управление ежедневно должно подавать заказ на поставку бетона. Стоимость 1 т бетона 100 ден. ед.Отсутствие бетона приводит к убытку, равному 150 ден. ед.на одну тонну. Ежедневная потребность в бетоне есть случайная величина, распределенная

а) равномерно в интервале $(10, 50)$;

б) по закону Симпсона ("закон равнобедренного треугольника") в интервале $(10, 50)$;

в) по закону с плотностью распределения вида

$$f(x) = \begin{cases} 0,15 - 0,005x, & \text{если } 10 \leqslant x \leqslant 30, \\ 0, & \text{если } x < 10 \text{ или } x > 30; \end{cases}$$

г) по показательному закону с параметром $\lambda = 0,1$.

Какова оптимальная политика СМУ? Определить минимальные средние ежедневные убытки СМУ.

2.6. Рассмотреть ситуацию, описанную в задаче 2.5, предполагая, что отсутствие бетона приводит к убытку 50 ден. ед.на одну тонну.

2.7. Продавцу рождественских елок нужно определить, сколько елок заготовить к празднику. Опыт подсказывает, что спрос на елки распределен по равномерному закону со средним 200 и дисперсией 300.

Каждая елка стоит торговцу 4 ден. ед., а сам он продает ее за 7,5 ден. ед. Нераспроданные вовремя елки сбыта не находят.

Сколько елей следует заказать, чтобы максимизировать среднюю прибыль? Чему будет равна средняя прибыль, если размер заказа в точности равен среднему спросу? Каково среднее число нераспроданных елей, если размер заказа оптимален?

2.8. Торговец мороженым перед началом однодневной торговой ярмарки должен определить оптимальный размер заказываемой партий мороженого по критерию — максимум средней прибыли. Опыт подсказывает, что спрос на мороженое в течение дня ярмарки распределен по нормальному закону со средним 200 и дисперсией 300. Каждый килограмм мороженого стоит 4 ден. ед., а сам он продает его за 7,6 ден. ед. Нераспроданное вовремя мороженое сбыта не находит. Найти оптимальный размер заказываемой партии. Чему будет равна средняя прибыль, если размер заказа в точности равен среднему спросу? Каково среднее число нераспроданных килограммов мороженого, если размер заказа оптимален?

2.9. Рассмотрим систему, подверженную старению. Известно, что полный износ может наступить к концу пятого, шестого или седьмого года эксплуатации соответственно с вероятностями 0,5; 0,3 и 0,2. В системе имеется высоконадежный блок. Комплект запасных блоков ограничен. Спрос на эти блоки распределен по закону Пуассона со средней интенсивностью один блок в год. Стоимость одного блока — 50 ден. ед., причем неиспользованные блоки применения не находят и обесцениваются. Каждое неудовлетворенное требование обходится в 2000 ден. ед.

Сколько блоков должно быть в комплекте, чтобы достигали минимума средние издержки? Чему равно среднее число неиспользованных блоков?

2.10. Международный нефтяной концерн закупает большой танкер для перевозки необработанной нефти. Запасные узлы, например, рули, должны быть изготовлены вместе о самим кораблем. Достать их в процессе эксплуатации танкера будет очень сложно. Рассмотрим определенный узел механизма руля, который в процессе изготовления корабля обходит в 5000 ден. ед., а при попытке достать в процессе эксплуатации — 25000 ден. ед. Согласно накопленному опыту — необходимость в узлах этого типа выражается законом Пуассона со средним 0,2 в год. Предполагается, что общее время использования танкера имеет гаммараспределение со средним 20 лет и средним квадратическим отклонением 10 лет.

Используя приведенные данные, определите, сколько запасных узлов рассматриваемого типа концерну следует заказать в процессе сборки танкера.

2.11. К праздничному сезону директор универсального магазина должен закупить в Италии партию дорогих кожаных сумок. Каждая сумка стоит магазину 17,5 ден. ед., а продается за 50 ден. ед.Директор уверен в том, что все нераспроданные в сезон сумки рано или поздно будут реализованы по прежней цене. Тем не менее 0,3 каждой денежной единицы, вложенной в нереализованные вовремя сумки, "омертвляются", так как, использовав эти средства иначе, по-видимому, можно поучить большую прибыль. Предполагается, что удастся продать за сезон не менее 50, но и не более 250 сумок, причем продажа любого количества в названных пределах равновероятна.

Сколько сумок следует закупить?

2.12. Бригада рабочих, которая к следующей зиме должна построить электростанцию, вместе с семьями и обслуживающим персоналом живет в посадке недалеко от строительства. В связи с приближением зимы возникает проблема создания угольных запасов для поселка. Потребность в угле в зависимости от суровости зимы есть случайная величина с известным законом распределения.

Z	12 m	15 m	18 m
p_Z	0,3	0,6	0,1

В зависимости от того, какая будет зима, стоимость тонны угля составляет 10, 12, 14 ден. ед. В настоящее время 1 тонна угля стоит 10 ден. ед. Оставшийся уголь будет потерян, т. к. весной бригада переезжает на новый объект.

Определить оптимальный размер запаса угля на зиму так, чтобы средние издержки были минимальны.

2.13. Швейная фабрика по плану должна израсходовать в апреле 35000 ден. ед.на пошив мужских брюк и костюмов, причем брюки ей обходятся по 10 ден. ед., а костюм — по 25 ден. ед.Реализация происходят в мае по следующим ценам: брюки — по 20 ден. ед., костюм — по 45 ден. ед.Спрос на продукцию в зависимости от погоды является случайной величиной с известным законом распределения

Z	500 брюк и 1200 костюмов	2000 брюк и 600 костюмов
p_Z	0,4	0,6

Товар, не реализованный в течение месяца, долго лежит на складах и дохода не приносят. Требуется изготовить такое количество товаров, которое максимизирует средний доход фабрики.

2.14. Имеется склад вместимостью a, на котором требуется создать запас некоторого однородного продукта. К моменту планирования нет точной информации о потребностях в этом продукте, но есть основания считать величину спроса случайной величиной с известным законом распределения. Пусть плотность распределения — $f(z)$. Стоимость хранения единицы продукта на складе — α, а затраты, связанные с отсутствием в нужный момент товаров на складе, — β.

Составить модель для минимизации средних ожидаемых затрат.

2.15. Предприятию по выплавке стали предстоит решить, какое количество x_1 чистой стали и какое количество x_2 металлолома следует использовать для приготовления (из соответствующего сплава) литья для одного из своих заказчиков. Пусть производственные затраты в расчете на 1 т чистой стали равняются 3 ден. ед., а затраты в расчете на 1 т металлолома — 5 ден. ед.(последняя цифра больше предыдущей, так как использование металлолома сопряжено с его предварительной очисткой). Заказ предусматривает поставку не менее 5 т литья; при этом заказчик готов купить и большее количество литья, если предприятие поставит перед ним такие условия.

Предположим, что запасы чистой стали ограничены и не превышают 4 т, а запасы металлолома не превышают 6 т. Отношение веса металлолома к весу чистой стали в процессе получения сплава не должно превышать 7 : 8. Производственно-технологические условия таковы, что на процессы плавки и литья не может быть отведено более 18 ч, при этом на 1 т стали уходит 3 ч, а на 1 т металлолома — 2 ч производственного времени.

Построить для данной задачи математическую оптимизационную модель. Найти значения x_1 и x_2 из условия минимума затрат.

2.16. Предприятие по переработке лесоматериалов столкнулось с проблемой наиболее рационального использования ресурсов лесоматериалов, имеющихся в одной из принадлежащих этой фирме лесных массивов. В районе данного массива имеется лесопильный завод и фабрика, на которой изготавливают фанеру. Таким образом, лесоматериалы можно использовать как для производства пиломатериалов, так и для изготовления фанеры.

Чтобы получить 2,5 куб. м коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2,5 куб. м еловых и 7,5 куб. м пихтовых лесоматериалов. Для приготовления 100 кв. м фанеры требуется 5 куб. м еловых и 10 куб. м пихтовых лесоматериалов. Лесной массив содержит 80 куб. м пихтовых лесоматериалов.

Согласно условиям поставок, в течение планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 10 куб. м пиломатериалов и 1200 кв. м фанеры. Доход с 1 куб. м пиломатериалов составляет 16 ден. ед., а со 100 кв. м фанеры — 60 ден. ед.

Найти количество (в кубических метрах) производимых пиломатериалов и количество (в квадратных метрах) изготавливаемой фанеры из условия максимизации прибыли.

2.17. Заводом по выпуску радиоаппаратуры изготавливаются радиоприемники трех различных моделей: модель A, модель B и модель C. Каждое изделие указанных моделей приносит доход в размере 8, 15 и 25 соответственно. Необходимо, чтобы завод выпускал за неделю не менее 100 приемников модели A, 150 приемников модели B и 75 приемников модели C.

Каждая модель характеризуется определенным временем, необходимым для изготовления соответствующих деталей, сборки изделия и его упаковки. Так, в частности, в расчете на 10 приемников модели A требуется 3 ч для изготовления соответствующих деталей, 4 ч на сборку и 1 ч на упаковку. Соответствующие показатели в расчете на 10 приемников модели B равняются 3,5, 5 и 1,5 ч, а на 10 приемников модели C — 5, 8 и 3. В течение ближайшей недели завод может израсходовать на производство радиодеталей 150 ч, на сборку 200 ч и на упаковку 60 ч.

Построить математическую модель для максимизации прибыли завода.

2.18. Директор предприятия «Нефтепродукты» пытается определить оптимальное распределение имеющейся в его распоряжении сырой нефти (различного сорта) по двум возможным технологическим процессам составления смесей. Технологический процесс I характеризуется следующими показателями: из одной единицы объема сырой нефти A и трех единиц объема сырой нефти B получается пять единиц объема бензина X и две единицы объема бензина Y. Технологический процесс II характеризуется другими показателями: из четырех единиц объема сырой нефти A и двух единиц объема сырой нефти B получается три единицы бензина X и восемь единиц бензина Y. Объемы продукции, выпускаемой при реализации технологических процессов I и II, обозначим соответственно через x_1 и x_2.

Максимальное количество запасов сырой нефти A равняется 100 единицам объема, а сырой нефти B — 150 единицам объема. По условиям поставок требуется произвести не менее 200 единиц объема бензина X и 75 единиц объема бензина Y. Доходы с единицы объема продукции, получаемой с помощью технологических процессов I и II, составляют p_1 и p_2 соответственно.

Составить математическую модель для определения x_1 и x_2 из условия максимума прибыли.

2.19. Авиационное объединение, обслуживающее периферийные районы страны, располагает 8 самолетами типа I, 15 самолетами типа II, 12 самолетами типа III, которые оно может использовать для выполнения рейсов в течение ближайших суток. Грузоподъемность (в тысячах тонн) известна: 45 для самолетов типа I, 7 для самолетов типа II, 4 для самолетов типа III.

Авиационное объединение обслуживает города A и B. Городу A требуется тоннаж в 20000 т, а городу B — в 30000 т. Избыточный тоннаж не оплачивается. Каждый самолет в течение дня может выполнить только один рейс.

Расходы, связанные с перелетом самолетов по маршруту "центральный, аэродром — пункт назначения", указаны в приведенной ниже таблице:

	Тип I	Тип II	Тип III
Город A	23	5	1,4
Город B	58	10	3,8

Обозначим через x_i $(i = 1, 2, 3)$ число самолетов i-го типа, отправленных в город A, а через y_j $(j = 1, 2, 3)$ — число самолетов j-го типа, отправленных в город B.

Найти x_i и y_j $(i, j = 1, 2, 3)$ из условия минимизации транспортных расходов.

2.20. Аэрофлоту требуется определить, сколько стюардесс следует принять на работу в течение шести месяцев при условии, если каждая из них прежде чем приступить к самостоятельному выполнению обязанностей стюардессы, должна пройти предварительную подготовку. Потребности в количестве стюардессо-часов (с.-ч.) летного времени известны: в январе требуется 8000 с.-ч., в феврале — 9000, в марте — 8000, в апреле — 10000, в мае — 9000, в июне — 12000 с.-ч.

Подготовка стюардессы к выполнению своих обязанностей на регулярных авиалиниях занимает один месяц. Следовательно, прием на работу должен по крайней мере на один месяц опережать ввод стюардессы в строй. Кроме того, каждая обучаемая стюардесса должна в течение месяца, отведенного на ее подготовку, пройти 100-часовую практику непосредственно во время полетов. Таким образом, за счет каждой обучаемой стюардессы в течение месяца освобождается 100 ч рабочего времени, отделенного для уже обученных стюардесс.

Каждая полностью обученная стюардесса в течение месяца может иметь налет до 150 ч. Аэрофлот в начале января уже имеет 60 опытных стюардесс. Если ресурсы стюардесоо-часов (летного времени) превышают месячные потребности аэрофлота, то стюардессы работают в режиме налета менее 150 ч в месяц. При этом ни одну из них не снимают с работы. Установлено также, что приблизительно 10 % обученных стюардесс увольняются по собственному желанию, по семейным или другим причинам.

Опытная стюардесса обходится аэрофлоту в 800 ден. ед., а обучаемая — в 400 ден. ед.в месяц.

Построить математическую модель задачи, исхода из условия минимизации издержек.

2.21. Предприятие заказывает сырье на длительный производственный период T. Потребность в сырье в течение этого периода есть случайная величина Z с заданным распределением вероятностей $p_z = P\{Z = z\}$ для $z = 0, 1, \dots, n$. Заказанная партия поступает сразу на склад. Предположим, что предприятие расходует сырье с постоянной интенсивностью в течение всего производственного периода T.

Пусть a — стоимость хранение одной единицы сырья на складе в течение единицы времени; c — закупочная стоимость одной единицы товара; u — штраф за нехватку одной единицы товара.

Определить минимальные средние убытки предприятия за время T и оптимальный размер заказа.

Обозначим через $Y(t)$ уровень запасов сырья на складе в момент времени t. Как к прежде, $W(X, Z)$ означает убытки, если заказано X единиц сырья.

Тогда средние убытки вычисляются по формуле

$$\overline{W}(X) = MW(X,Z) = cx - \frac{aT}{2}\sum_{z=0}^{x} z\cdot p_z + aT\sum_{z=0}^{x} x\cdot p_z +$$
$$+\frac{(a+u)^2}{2}T\sum_{z=x+1}^{n}\frac{x^2}{z}p_z + \frac{kT}{2}\sum_{z=x+1}^{n}(z-2x)\cdot p_z.$$

Теперь надо посчитать $\overline{W}(X)$ для $X = 0, 1, \ldots, n$ и выбрать среди них минимальное.

Решить задачу, полагая, что $T = 5$ лет, $a = 100$ ден. ед., $c = 100$ ден. ед., $u = 20$ ден. ед., а случайная величина z имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ и $p = 0,2$.

2.22. Предприятие хочет определить для некоторого изделия оптимальный уровень запасов. Изделия равномерно расходуются в течение года, однако общая потребность в них случайна. Предприятие делает заказ в начале года, который выполняется, практически немедленно. Изучение спроса позволило определить вероятности различных значений годового спроса, они приведены в таблице

спрос	10	20	30	40	50	60	70 и >
вероятность	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	0

Затраты на хранение одной детали на складе в течение года составляют 10 ден. ед., а нехватка одной детали обходится в 200 ден. ед.в течение года.

Найти оптимальный уровень запасов.

Замечание. Заказ можно делать только в начало года, так что запасы не пополняются в течение года. Потребление считать непрерывным. Решение искать в десятках единиц.

2.23. Предприятие «Нитроткань» производит определенного типа мелкие детали для промышленных изделий и продает их через своих посредников-оптовиков по фиксированной поставочной цене 2,5 ден. ед.за штуку. Число посредников-оптовиков равняется пяти. Коммерческие прогнозы указывают на то, что объем месячных поставок составит: посреднику I — 3000 штук, посреднику II — 3000 штук, посреднику III — 10000 штук, посреднику IV — 5000 штук, посреднику V — 4000 штук.

Предприятие располагает следующими производственными мощностями:

завод 1 — 5000 деталей в месяц,

завод 2 — 10000 деталей в месяц,

завод 3 — 12500 деталей в месяц.

Себестоимость одной детали, изготовленной на заводе 1, равняется 1 ден. ед., на заводе 2 — 0,9 ден. ед., на заводе 3 — 0,8 ден. ед.

Транспортные расходы (в ден. ед.), связанные с доставкой одной детали в точки оптовой продажи, приведены ниже:

	Клиент I	Клиент II	Клиент III	Клиент IV	Клиент V
Завод 1	0,05	0,07	0,10	0,15	0,15
Завод 2	0,08	0,06	0,09	0,12	0,14
Завод 3	0,10	0,09	0,08	0,10	0,15

Оптимальный объем продукции, подлежащий выпуску на каждом заводе данного предприятия, и количество деталей, поставляемых предприятием своим посредникам-оптовикам.

Литература

[1] Волков И.К. Исследование операций / И.К. Волков, Е.А. Загоруйко. – М.: Изд-во МГТУ, 2002. – 435с.

[2] Букан Дж. Научное управление запасами / Дж. Букан, Э. Кенингсберг. – М.: Изд-во Наука, 1967. – 383 с.

[3] Черчмен У. Введение в исследование операций / У. Черчмен, Р. Алоф, Л. Арноф. – М.: Изд-во Наука, 1966. – 488 с.

Составители: Баркова Лариса Николаевна
Михайлова Ирина Витальевна

Редактор Тихомирова О.А.