

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Математическое моделирование
случайных величин**

Учебно-методическое пособие по специальности
010501 (010200) “Прикладная математика и информатика ”

ВОРОНЕЖ
2005

Утверждено научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики 21 июня 2005 г., протокол № 6.

Составители:

Голуб В.А.
Жукова Т.М.
Соколова М.А

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре технической кибернетики и автоматического регулирования Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 4 курса дневного отделения специальности 010501 “Прикладная математика и информатика ”

Содержание

1. Моделирование последовательности случайных испытаний	4
2. Моделирование дискретных случайных величин	5
2.1. Общий алгоритм моделирования.....	5
2.2. Моделирование случайной величины с биномиальным распределением.....	6
2.3. Моделирование случайной величины, распределенной по закону Пуассона.....	6
2.4. Моделирование случайной величины, распределенной по геометрическому закону.....	7
3. Моделирование непрерывных случайных величин	8
3.1. Моделирование непрерывной случайной величины методом обратной функции.....	8
3.2. Моделирование случайной величины с заданной гистограммой.....	9
3.3. Моделирование непрерывной случайной величины стандартным методом исключения.....	10
3.4. Моделирование непрерывной случайной величины методом суперпозиции.....	11
3.5. Моделирование гауссовской случайной величины методами обратной функции и суммирования.....	12
3.6. Моделирование гауссовской случайной величины методами функционального преобразования, исключения и суперпозиции.....	13
3.7. Моделирование случайной величины с экспоненциальным распределением.....	16
3.8. Моделирование случайной величины с гамма- распределением.....	16
3.9. Моделирование случайных величин с распределениями χ^2 , Стьюдента, Фишера.....	19
Задание на выполнение лабораторных работ по компьютерному моделированию случайных величин.....	20
Пример. Моделирование случайной выборки, распределенной по экспоненциальному закону.....	21
 Литература	 26

1. Моделирование последовательности случайных испытаний [1]

Последовательность независимых испытаний

Пусть проводится последовательность k независимых испытаний, в результате каждого из которых может произойти одно из двух противоположных событий A и $B = \bar{A}$ с вероятностью $P(A) = p$, $P(B) = 1 - p = q = P(\bar{A})$.

Моделирование последовательности испытаний осуществляется следующим образом.

Получают последовательность значений r_1, r_2, \dots, r_k базовой случайной величины (БСВ) – величины, равномерно распределенной на интервале $(0,1)$: $\xi \sim R(0,1)$. Если $r_i < p, i = 1, 2, \dots, k$, то считаем, что в i -том испытании наступило событие A , если $r_i > p$, то считаем, что в i -том испытании наступило событие $B = \bar{A}$.

Эти допущения правомерны, т.к. если $x \sim R(0,1)$, то $P(0 < x < p) = p$, т.е. $P(x < p) = P(A)$. Также справедливо: $P(p < x < 1) = 1 - p$, т.е. $P(\xi > p) = P(\bar{A})$.

Теперь предположим, что результатом каждого из k независимых испытаний может быть появление одного из n несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n , образующих полную группу. Вероятность появления каждого из событий известна $P(A_i) = p_i, i = \overline{1, n}$, и не меняется при переходе от одного к другому (т.к. все A_i несовместны и образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^n p_i = 1$).

Моделирование такой последовательности осуществляется следующим образом.

Разделим отрезок $[0,1]$ на n участков $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, длины которых соответственно равны p_1, p_2, \dots, p_n .

Получаем последовательность значений r_1, r_2, \dots, r_n случайной величины $x \sim R(0,1)$. Если $r_i \in \Delta_m$, то считаем, что в i -том испытании наступило событие A_m . Это допущение правомерно, т.к. $P(x \in \Delta_m) = P(A_m)$, $P(x \in \Delta_m) = \text{длина отрезка } \Delta_m = p_m = P(A_m)$.

Пример. Пусть проводится последовательность независимых испытаний, в каждом из которых может произойти одно из трех несовместных событий A_1, A_2, A_3 , образующих полную группу, $P(A_1) = 0,35$, $P(A_2) = 0,25$, $P(A_3) = 0,4$.

При моделировании отрезок $[0,1]$ делят на три участка. Генерируют двухразрядные числа r_i . Например, $r_1 = 0,15$ – это число попало на первый участок, значит в первом испытании произойдет A_1 , $r_2 = 0,34$, следовательно, во втором испытании тоже произойдет A_1 ; $r_3 = 0,71$, значит в третьем испытании произойдет A_3 и т.д.

Последовательность зависимых испытаний

Пусть проводится последовательность зависимых испытаний, в каждом из которых может произойти событие A или не произойти ($B = \bar{A}$).

Моделирование осуществляется следующим образом:

1. Получаем значение r_1 случайной величины $x \sim R(0, 1)$. Если $r_1 < P_1(A)$, где $P_1(A)$ – вероятность наступления события A в первом испытании, то считаем, что в 1-ом испытании произошло событие A . Если $r_1 \geq P_1(A)$, то фиксируется непоявление события A (т.е. событие B). Допустим, что в первом испытании появилось событие A .

2. Получаем следующее значение r_2 . Если $r_2 < P_2(A \setminus A)$, где $P_2(A \setminus A)$ – условная вероятность появления во втором испытании события A при условии, что в 1-вом испытании произошло событие A , то фиксируем появление во втором испытании события A , если $r_2 \geq P_2(A \setminus A)$, то считаем, что во втором испытании произошло $B = \bar{A}$. Допустим произошло B .

3. Получаем следующее значение r_3 . Если $r_3 < P_3(A \setminus AB)$ – вероятность наступления в третьем испытании события A , при условии наступления в первом – события A и во втором – события B , то считаем, что в третьем испытании появилось событие A , в противном случае B и т.д.

Этот алгоритм легко может быть обобщен на случай не двух, а k событий.

2. Моделирование дискретных случайных величин [1]

2.1. Общий алгоритм моделирования

Если случайная величина дискретная, то её моделирование (получение последовательности её значений) можно свести к моделированию независимых испытаний. Действительно, пусть имеется ряд распределения

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Обозначим A_i событие, состоящее в том, что случайная величина ξ примет значение x_i .

Тогда нахождение значения, принятого случайной величиной в результате испытания, сводится к определению того, какое из событий A_1, A_2, \dots, A_n появится. Т.к. эти события несовместны, образуют полную группу и вероятность появления каждого из них не меняется от испытания к испытанию, то для моделирования значений ξ можно использовать процедуру моделирования последовательности независимых испытаний. Существуют и другие специальные алгоритмы.

2.2. Моделирование случайной величины с биномиальным распределением

Биномиальное распределение определяется соотношением

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m=0,1,2,\dots,n, \quad (2.2.1)$$

где $P_n(m)$ – вероятность того, что в n испытаниях случайное событие появится m раз, p – вероятность появления события в одном испытании.

Введем случайную величину ξ – число появлений событий в i -том испытании. Очевидно, что эта величина может принимать только два значения: 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $(1-p)$. Определение значения случайной величины m – числа появлений события в n испытаниях, возможно по следующей процедуре.

1. Получают последовательность значений r_1, r_2, \dots, r_n случайной величины $R(0,1)$.

2. Для каждого числа $r_i, i=1, 2, \dots, n$, проверяют выполняется ли неравенство $r_i < p$. Если неравенство выполняется, то полагают $x_i = 1$, в противном случае считают $x_i = 0$;

3. Находят сумму значений n случайных величин ξ_i (это и будет значение случайной величины m).

Повторяя эту процедуру, получают последовательность значений m_1, m_2, \dots случайной величины с биномиальным законом распределения.

Пример. Найдем последовательность значений случайной величины m с биномиальным законом распределения, если $n=7, p=0,3$.

Из таблицы случайных чисел $R(0,1)$ берутся 7 значений, например $r_1 = 0,15, r_2 = 0,34, r_3 = 0,71, r_4 = 0,06, r_5 = 0,28, r_6 = 0,36, r_7 = 0,78$. Три числа не превосходят $p=0,3$. Следовательно, $m=3$. Потом берутся ещё 7 случайных чисел $R(0,1)$ и вновь определяется, сколько из них не превосходит $p=0,3$; это дает следующее значение m и т.д.

2.3. Моделирование случайной величины, распределенной по закону Пуассона

Распределение Пуассона

$$P_m = \frac{I^m}{m!} e^{-I}, \quad m=0,1,2,\dots,n, \quad (2.3.1)$$

где $I = np$ – среднее число появления события в n испытаниях, используют в том случае, когда число n независимых испытаний велико, и вероятность p появления события в каждом испытании мала.

Обычно распределение Пуассона вместо биномиального применяют, если n порядка нескольких десятков-сотен, а $np < 10$. Практически обычно задано λ , а не n и p . Алгоритм моделирования следующий:

1. Выбирают n такое, чтобы вероятность $p = \frac{\lambda}{n}$ была мала ($p < 0,01$).
2. Получают последовательность значений r_1, r_2, \dots, r_n случайной величины $R(0, 1)$.
3. Для каждого числа r_i , $i = 1, 2, \dots, n$, проверяют, выполняется ли неравенство $r_i < p$, если это неравенство выполняется, то полагают $x_i = 1$, в противном случае считают $x_i = 0$.
4. Вычисляют $\sum_{i=1}^n x_i$ – это и есть значение случайной величины, распределенной по закону Пуассона.

2.4. Моделирование случайной величины, распределенной по геометрическому закону [2]

Рассмотрим алгоритм моделирования дискретной случайной величины x , распределенной по геометрическому закону:

$$P\{x = x\} = \begin{cases} p(1-p)^x, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots\}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

где $p \in (0, 1)$ – заданный параметр распределения.

Распределение (2.4.1) часто встречается в приложениях: x описывает число безуспешных попыток, предшествующих первой успешной попытке в схеме независимых испытаний, при условии, что вероятность успеха в отдельном испытании равна p .

Рассмотрим два основных метода моделирования случайной величины ξ .

Первый метод заключается в моделировании полной счетной системы случайных событий: $\{x = 0\}, \{x = 1\}, \dots, \{x = x\}, \dots$.

Второй метод основан на следующем утверждении. Если $a \sim R(0, 1)$, т.е. a – БСВ, то случайная величина

$$x = \lceil \ln a / \ln(1 - p) \rceil, \quad (2.4.2)$$

где $\lceil z \rceil$ – целая часть z имеет распределение (2.4.1).

Формула (2.4.2) определяет моделирующий алгоритм второго метода.

3. Моделирование непрерывных случайных величин [2]

3.1. Моделирование непрерывной случайной величины методом обратной функции

Для моделирования непрерывной случайной величины ξ с фиксированной плотностью распределения $f_0(x)$ методом обратной функции определим функцию распределения непрерывной случайной величины ζ

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^x f_0(y) dy, \quad (3.1.1)$$

которую будем предполагать строго монотонно возрастающей. Через $F_0^{-1}(y)$ обозначим обратную функцию; она находится при решении уравнения

$$F_0(x) = y \quad (3.1.2)$$

относительно x : $x = F_0^{-1}(y)$.

Если a - БСВ, то случайная величина

$$x = F_0^{-1}(a) \quad (3.1.3)$$

имеет функцию распределения $F_x(x) \equiv F_0(x)$.

Формула (3.1.3) определяет моделирующий алгоритм. Недостатком описанного метода являются аналитические трудности при вычислениях (3.1.1), (3.1.2). Отметим, что в «чистом виде» метод обратной функции редко используется на практике, так как для многих распределений (например, нормального) даже $F_0(x)$ (не говоря уже о $F_0^{-1}(y)$) не выражается через элементарные функции, а табулирование $F_0^{-1}(y)$ существенно усложняет моделирование. На практике метод обратной функции дополняют аппроксимацией $F_0(y)$ или сочетают с другими методами.

Пример. Рассмотрим применение метода обратной функции для моделирования случайной величины с равномерным распределением на отрезке $[a, b]$.

Для такой случайной величины функция распределения:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Полагая $F_x(x) = r$, имеем $\frac{x-a}{b-a} = r$. Отсюда $x = a + r(b-a)$.

Последовательности значений $r_1, r_2, \dots, \mathbf{K}$ случайной величины $R(0,1)$ соответствует последовательность значений $x_1 = a + r_1(b-a), x_2 = a + r_2(b-a), \dots, \mathbf{K}$ величины ξ , равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$.

3.2. Моделирование случайной величины с заданной гистограммой

В приложениях часто возникает задача моделирования непрерывной случайной величины ζ в условиях априорной неопределенности: плотность распределения неизвестна. В такой ситуации проводится серия наблюдений (экспериментов) над ζ , по результатам которых вычисляется гистограмма – оценка неизвестной плотности.

Общий вид гистограммы с K ячейками

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^K c_i I_{[z_{i-1}, z_i)}(x), \quad (3.2.1)$$

где $[z_{i-1}, z_i)$ – i -я ячейка, c_i – значение гистограммы в i -й ячейке.

Для моделирования случайной величины ζ , плотность распределения которой полагается совпадающей с гистограммой $f_0(x)$, применим метод обратной функции. Обозначим

$$p_i = P\{x \in [z_{i-1}, z_i)\}, \quad b_0 = 0, \quad b_j = \sum_{i=1}^j p_i, \quad j = \overline{1, K}. \quad (3.2.2)$$

Из (3.2.1) и условия нормировки следует, что

$$p_i = c_i(z_i - z_{i-1}), \quad i = \overline{1, K}, \quad b_K = 1. \quad (3.2.3)$$

Согласно (3.1.1), (3.2.1) – (3.2.3) вычислим функцию распределения

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq z_0, \\ b_{j-1} + c_j(x - z_{j-1}), & \text{если } z_{j-1} \leq x < z_j, \quad j = \overline{1, K}, \\ 1, & \text{если } x \geq z_K, \end{cases}$$

причем $x \in [z_{j-1}, z_j) \Leftrightarrow F_0(x) \in [b_{j-1}, b_j)$.

Тогда получаем моделирующий алгоритм:

$$x = z_{j-1} + (a - b_{j-1})/c_j, \quad \text{если } b_{j-1} \leq a < b_j, \quad 1 \leq j \leq K \quad (3.2.4)$$

Иногда гистограмма строится так, что $p_i = b_i - b_{i-1} = \text{const} = 1/K$. При этом вычисления по (3.2.4) упрощаются, так как для j имеется явное выражение $j = [Ka] + 1$.

3.3. Моделирование непрерывной случайной величины стандартным методом исключения

Рассмотрим алгоритм моделирования непрерывной случайной величины ξ с фиксированной плотностью распределения $f_0(x)$.

Метод исключения (метод режекции, метод Дж. Неймана) основан на трех следующих теоремах.

1. Если (x, h) - двумерный случайный вектор, равномерно распределенный в области $F_0 = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f_0(x)\}$

2.

$$p_{x,h}(x, y) = I_{F_0}(x, y), \quad (3.3.1),$$

то компонента ξ этого вектора имеет плотность распределения $f_0(x)$.

Определим теперь мажорирующую функцию $y = g(x)$:

$$g(x) \geq f_0(x) \geq 0 \quad (3.3.2)$$

и область $G = \{(x, y) : 0 \leq y \leq g(x)\} \supset F_0$.

2. Если $(x'_1, h'_1), (x'_2, h'_2), \dots, (x'_N, h'_N) \in \mathbf{K}$ – независимые случайные векторы, равномерно распределенные в G , то случайный вектор (x, h) :

$$x = x'_k, h = h'_k, \text{ где } k = \min \{N : (x'_N, h'_N) \in F_0\}, \quad (3.3.3)$$

распределен равномерно в F_0 .

Векторы $(x'_1, h'_1), \dots, (x'_{k-1}, h'_{k-1})$, не попавшие в F_0 , называются исключенными, а процедура нахождения (x'_k, h'_k) – исключением. Отсюда и название метода.

3. Пусть случайная величина x' имеет плотность $g(x)/\text{mes}(G)$, а случайная величина h' при условии $x' = x$ имеет плотность распределения $p_{h|x'}(y|x) = I_{[0, g(x)]}(y)/g(x)$. Тогда случайный вектор (x', h') распределен равномерно в G .

Моделирующий алгоритм заключается в последовательности шагов.

1. Подбирается мажорирующая функция $g(x)$ (3.3.2).
2. При помощи п.3 каким-либо методом моделируется случайный вектор $(x', h') \in G$; реализация (x', h') обозначается (x, y) .
3. Если $y > f_0(x)$, то (x, y) исключается и вновь повторяется шаг 2; если же $y \leq f_0(x)$, то значение x принимается в качестве реализации ξ .

Повторяя алгоритм n -кратно, можно получить n реализаций ξ , моделирующих результаты наблюдений над ξ в n экспериментах.

Методу исключения свойственен характерный недостаток. Моделирующий алгоритм описывается формулой $x = y(a_1, a_2, \mathbf{K})$, где a_1, a_2, \dots - независимые БСВ; $y(\cdot)$ - функция счетного множества аргументов. Последний факт предъявляет жесткие требования к псевдослучайным числам.

Если $f_0(x)$ задана на бесконечном интервале или не ограничена, принципиально возможно построить мажорирующую функцию непосредственно. Однако более удобно подобрать преобразование $h = f_1(x)$ так, чтобы случайная величина η имела ограниченную плотность на конечном интервале; η моделируют методом исключения, тогда $x = f_1^{-1}(h)$.

3.4. Моделирование непрерывной случайной величины методом суперпозиции

Метод суперпозиции моделирования непрерывной случайной величины ξ с фиксированной плотностью распределения $f_0(x)$ основан на формуле полной вероятности. Пусть x и n – случайные величины, заданные на одном и том же вероятностном пространстве; $F_n(z)$ - функция распределения n ; $p_{x|n}(x|z)$ - условная плотность распределения x при условии $n = z$. Тогда безусловная плотность распределения x равна

$$f_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x|n}(x|z) dF_n(z). \quad (3.4.1)$$

В частности, если n – дискретная случайная величина со множеством значений $\{c_1, c_2, \mathbf{K}, c_N\}$ и вероятностями

$$\{P\{n = c_i\} = p_i : i = \overline{1, N}, N \leq \infty\} \quad p_{x|n}(x|c_i) = f_i(x),$$

то (3.4.1) принимает вид

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^N p_i f_i(x). \quad (3.4.2)$$

Моделирующий алгоритм заключается в следующем:

1. Определяется вспомогательная случайная n величина так, чтобы имело место (3.4.1) или (3.4.2).
2. Моделируется n ; пусть z – реализация n .
3. Моделируется x при условии $n = z$; получаем x – реализацию случайной величины x .

Для уменьшения среднего времени t , затрачиваемого на получение одной реализации x , случайную величину n надлежит определять так, чтобы n и x при фиксированном n достаточно быстро моделировались. Наибольший практический эффект дает непрерывно-дискретный вариант (3.4.2). Графически (3.4.2) означает, что фигура единичной площади $\{(x, y): 0 \leq y \leq f_0(x), b \leq x < c\}$ разбивается на N непересекающихся частей с площадями p_i . Основной прин-

цип разбиения (3.4.2) заключается в том, что части g_i , имеющие наибольшую площадь (наибольшую вероятность p_i), должны соответствовать наиболее просто и быстро имитируемым плотностям $f_i(x)$. Остаточную плотность

$$f_0(x) = \left(f_0(x) - \sum_{i=1}^5 p_i f_i(x) \right) / p_6, \quad p_6 = 1 - \sum_{i=1}^5 p_i$$

можно имитировать методом исключения.

3.5. Моделирование гауссовской случайной величины методами обратной функции и суммирования

Рассмотрим моделирование методами обратной функции и суммирования гауссовской случайной величины x с плотностью распределения:

$$f_0(x) = n_1(x|m, D) = \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2D}\right) / \sqrt{2pD}, \quad x \in R^1; \quad (3.5.1)$$

где параметры распределения: $m \in R^1$ - математическое ожидание, D - дисперсия.

Введем в рассмотрение стандартную гауссовскую случайную величину x_* , с плотностью $n_1(x|0,1)$. Легко убедиться, что

$$x = m + \sqrt{D} x_* \quad (3.5.2)$$

имеет распределение (3.5.1). Используя соотношение (3.5.2) для моделирования x , обратимся к задаче моделирования x_* . Исследуем три метода моделирования x_* .

Первый метод есть частный случай метода обратной функции:

$$x_* = \begin{cases} \Phi^{-1}(a), & 0,5 < a < 1, \\ -\Phi^{-1}(1-a), & 0 \leq a \leq 0,5, \end{cases} \quad (3.5.3)$$

где

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z n_1(x|0,1) dx$$

есть функция распределения стандартного нормального закона, а $\Phi^{-1}(\cdot)$ – обратная ей функция. В (3.5.3) учтено известное свойство $\Phi(\cdot)$: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Выражение $\Phi^{-1}(z)$ через элементарные функции отсутствует, поэтому используется аппроксимация

$$\Phi^{-1}(z) \approx \Psi_1(z) = \frac{2,30753 + 0,27061q}{1 + 0,99229q + 0,04810q^2} - q \quad (3.5.4)$$

с ошибкой $|\Phi^{-1}(z) - \Psi_1(z)| < 3 \cdot 10^{-3}$ при $z < 0,9$ или

$$\Phi^{-1}(z) \approx \Psi_2(z) = -q + \frac{2,515517 + 0,802853q + 0,01328q^2}{1 + 1,432788q + 0,189269q^2 + 0,001308q^3} \quad (3.5.5)$$

с ошибкой $|\Phi^{-1}(z) - \Psi_1(z)| < 4,5 \cdot 10^{-4}$ при $z < 0,9$.

В соотношениях (3.5.4), (3.5.5) $q = \sqrt{-2 \ln z}$, $0,5 < z < 1$.

Второй метод (метод суммирования) основан на центральной предельной теореме. Если a_1, a_2, \mathbf{K} – независимые БСВ, то при $N \rightarrow \infty$ случайная величина

$$\mathbf{x}_* = \sqrt{\frac{12}{N}} \left(\sum_{i=1}^N a_i - \frac{N}{2} \right) \quad (3.5.6)$$

распределена асимптотически нормально, так что функция распределения $F_{\mathbf{x}_*} \rightarrow F(z)$, $z \in R^1$.

Формула (3.5.6) при некотором конечном N и определяет моделирующий алгоритм. Случайная величина \mathbf{x}_* , определяемая (3.5.6), аппроксимирует стандартную гауссовскую случайную величину. Ошибка аппроксимации $\Delta_N = \max_z |F_{\mathbf{x}_*}(z) - \Phi(z)|$ тем меньше, чем больше N .

Третий метод является модификацией второго. Очевидно, что при помощи специального функционального преобразования из произвольной случайной величины, в частности \mathbf{x}_* , можно получить гауссовскую. Однако это преобразование через элементарные функции не выражается. Тем не менее среди элементарных функциональных преобразований найдены такие, которые существенно уменьшают Δ_N . В [3] рекомендовано функциональное преобразование

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_* - \frac{41}{13440N^2} (\mathbf{x}_*^5 - 10\mathbf{x}_*^3 + 15\mathbf{x}_*).$$

3.6. Моделирование гауссовской случайной величины методами функционального преобразования, исключения и суперпозиции

Рассмотрим моделирование гауссовской случайной величины \mathbf{x} с плотностью распределения (3.5.1) с помощью методов функционального преобразования, исключения и суперпозиции.

Учитывая (3.5.2), решим задачу моделирования стандартной гауссовской величины x_* . Исследуем два метода моделирования x_* .

Первый метод – метод функционального преобразования - основан на следующем утверждении.

Если a_1, a_2 – независимые БСВ, то случайные величины

$$\begin{aligned} x_{*1} &= \sqrt{-2 \ln a_1} \cos(2pa_2) \\ x_{*2} &= \sqrt{-2 \ln a_1} \sin(2pa_2) \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

являются независимыми стандартными гауссовскими. Моделирующий алгоритм определяется формулой (3.6.1).

Второй метод использует комбинацию метода суперпозиции с методом исключения.

Представим x_* в виде

$$x_* = nh, \quad (3.6.2)$$

где n, h – независимые случайные величины; n - бернуллиева случайная величина, $P\{n = -1\} = P\{n = 1\} = 0,5$; h - непрерывная случайная величина с плотностью

$$p_h = \sqrt{\frac{2}{p}} e^{-y^2/2}, \quad y \geq 0. \quad (3.6.3)$$

Для моделирования h применим метод суперпозиции:

$$p_h(y) = p_1 f_1(y) + p_2 f_2(y), \quad (3.6.4)$$

где

$$p_2 = 1 - p_1, \quad p_1 = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^1 e^{-y^2/2} dy \approx 0,6827 \quad (3.6.5)$$

$$f_1(y) = \frac{1}{p_1} \sqrt{\frac{2}{p}} e^{-y^2/2} I_{[0,1]}(y) \quad (3.6.6)$$

$$f_2(y) = \frac{1}{p_2} \sqrt{\frac{2}{p}} e^{-y^2/2} I_{[1,\infty]}(y)$$

Середина распределения ($f_1(y)$) моделируется методом исключения с прямоугольной мажорирующей функцией

$$g_1(y) = \frac{1}{p_1} \sqrt{\frac{2}{p}} I_{[0,1]}(y). \quad (3.6.7)$$

«Хвост» распределения $(f_2(y))$ тоже моделируется методом исключения, причем предварительно используется вспомогательное преобразование $y = \exp((1-h^2)/2)$. Плотность распределения для y :

$$p_y(z) = \frac{1}{p_2} \sqrt{\frac{2}{p}} e^{-1/2} (1 - 2 \ln z)^{-1/2}, 0 < z \leq 1. \quad (3.6.8)$$

При моделировании y используем метод исключения с прямоугольной мажорирующей функцией

$$g_2(z) = \frac{1}{p_2} \sqrt{\frac{2}{p}} e^{-1/2} I_{[0,1]}(z). \quad (3.6.9)$$

Случайная величина h получается обратным преобразованием:

$$h = \sqrt{1 - 2 \ln y}. \quad (3.6.10)$$

Формулы (3.6.2) – (3.6.10) определяют следующий моделирующий алгоритм.

1. С помощью датчика БСВ формируется псевдослучайное число a_1 . Если $a_1 < 0,5$, то реализация s случайной величины n равна $s = -1$, иначе $s = 1$.

2. Формируется число a_2 . Если $a_2 < p_1$, то вычисляется $a' = a_2/p_1$ и осуществляется переход к шагу 3 (имитация $f_1(y)$), в противном случае – к шагу 4 (имитация $f_2(y)$).

3. Формируется число a_3 . Если $a_3 < \exp(-(a')^2/2)$, то реализация y случайной величины h равна: $y = a'$. В противном случае получаем a_4 и проверка неравенства повторяется, полагая $a' := a_4$ и т.д., пока при некоем a_k не выполнится неравенство. Переход к шагу 6.

4. Вычисляется $a'' = (a_2 - p_1)/(1 - p_1)$.

5. Формируется число a_{k+1} . Если $a_{k+1} < (1 - 2 \ln a'')^{-1/2}$, то реализация y случайной величины h равна: $y = \sqrt{1 - 2 \ln a''}$. В противном случае получаем a_{k+2} и проверку неравенства повторяем при $a'' := a_{k+2}$ и т.д., пока неравенство не выполнится.

6. Вычисляется реализация x случайной величины x_* : $x = sy$.

Следует отметить, что величины a', a'' позволяют использовать одно и то же псевдослучайное число на различных шагах алгоритма и, следовательно, уменьшают время моделирования.

3.7. Моделирование случайной величины с экспоненциальным распределением

Рассмотрим применение методов обратной функции, функционального преобразования и суперпозиции для моделирования случайной величины x с экспоненциальным распределением

$$f_0(x) = I e^{-Ix}, x \geq 0, \quad (3.7.1)$$

где $I > 0$ – параметр распределения.

Введем в рассмотрение стандартную экспоненциальную случайную величину x_* , с плотностью

$$f_{x_*}(x) = e^{-x}, x \geq 0, \quad (3.7.2)$$

получающейся из (3.7.1) при $I = 1$.

Легко проверить, что случайная величина

$$x = x_*/I \quad (3.7.3)$$

имеет распределение (3.7.1).

Используя (3.7.3) при моделировании x , обратимся к задаче моделирования x_* . Исследуем три метода моделирования x_* .

Первый метод есть частный случай метода обратной функции

$$x_* = -\ln a. \quad (3.7.4)$$

Второй метод (метод функционального преобразования) основан на следующем утверждении.

Пусть $a_1, a_2, \mathbf{K}, a_N, a_{N+1}, \mathbf{K}, a_{2N-1}$ – независимые БСВ, $N > 1$; $a'_1, \mathbf{K}, a'_{N-1}$ – величины $a_{N+1}, \mathbf{K}, a_{2N-1}$, расставленные в порядке возрастания; $a'_0 = 0, a'_N = 1$. Тогда случайные величины

$$x_{*k} = (a'_{k-1} - a'_k) \ln(a_1 \mathbf{K} a_N), k = \overline{1, N} \quad (3.7.5)$$

независимы и распределены по закону (3.7.2).

Третий метод является частным случаем метода суперпозиции и основан на следующем утверждении.

Если a_1, a_2, \mathbf{K} – независимые БСВ, n и q – не зависящие от a_1, a_2, \mathbf{K} целочисленные положительные случайные величины с распределениями

$$P\{n = i\} = (e - 1)e^{-i}, P\{q = j\} = ((e - 1)j!)^{-1}, i, j = 1, 2, \mathbf{K}, \quad (3.7.6)$$

то случайная величина

$$x_* = n - \max\{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_q\} \quad (3.7.7)$$

имеет плотность (3.7.2). Формула (3.7.7) определяет моделирующий алгоритм.

3.8. Моделирование случайной величины с гамма-распределением

Для моделирования случайной величины x , имеющей гамма-распределение с плотностью

$$f_0(x;n) = \frac{x^{n-1} e^{-x}}{\Gamma(n)}, \quad x \geq 0, \quad (3.8.1)$$

где $n > 0$ – параметр распределения, могут быть использованы три основных метода моделирования x .

Первый метод «работает» при целом $n \geq 1$ и использует свойство безграничной делимости закона (3.8.1). Действительно, характеристическая функция

$$j_x(t;n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x) e^{itx} dx = (1-it)^{-n} \quad (3.8.2)$$

обладает свойством, определяющим безграничную делимость :

$$\sqrt[m]{j_x(t;n)} = (1-it)^{-n/m} = j_x(t;n/m), \quad m = 2, 3, \mathbf{K}.$$

Можно показать, что если $h_1, h_2, \mathbf{K}, h_n$ – независимые стандартные экспоненциально распределенные случайные величины, то

$$x = \sum_{j=1}^n h_j \quad (3.8.3)$$

имеет плотность (3.8.1).

Моделирование h_1, \mathbf{K}, h_n легко осуществляется рассмотренными ранее методами. В частности, согласно (3.7.4)

$$h_j = -\ln a_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.9.5)$$

где a_1, \mathbf{K}, a_n – независимые БСВ.

Объединяя (3.8.3) и (3.8.4), получаем формулу

$$x = -\ln \left(\prod_{j=1}^n a_j \right),$$

определяющую моделирующий алгоритм.

Второй метод применим, когда $n = N + 0,5$; $N = 0, 1, \mathbf{K}$. Учитывая (3.8.2), (3.8.4), представим характеристическую функцию случайной величины x в виде

$$j_x(t; N + 0,5) = (j_x(t; 1))^N (1-it)^{-1/2} = \left(\prod_{j=1}^N j_{h_j}(t) \right) j_{h_0}(t), \quad (3.8.6)$$

где h_0 – случайная величина с плотностью

$$p_{h_0}(z) = e^{-z} / (\sqrt{z} \Gamma(0,5)), \quad z \geq 0.$$

Её легко получить функциональным преобразованием стандартной гауссовской величины x_* , не зависящей от h_1, \mathbf{K}, h_N :

$$h_0 = x_*^2 / 2. \quad (3.8.7)$$

Из (3.8.5), (3.8.6) и (3.8.7) получаем формулу

$$x = -\ln \left(\prod_{j=1}^N a_j \right) + x_*^2 / 2, \quad (3.8.8)$$

определяющую моделирующий алгоритм. Моделирование x_* осуществляется ранее рассмотренными методами.

Например, согласно (3.6.1)

$$x_*^2 / 2 = -(\ln a_{N+1}) \cos^2(2pa_{N+2}).$$

Третий метод есть частный случай метода исключения и применим для любого ν . Обозначим $n_* = n - [n]$, $0 \leq n_* < 1$ и воспользуемся представлением, аналогичным (3.8.6), (3.8.8):

$$x = -\ln \left(\prod_{j=1}^{[n]} a_j \right) + x_*,$$

причем p_{x_*} совпадает с (3.8.1), если параметр принимает значение n_* . Для моделирования x_* , применим метод исключения с мажорирующей функцией $g(x)$:

$$p_{x_*}(x) \leq g(x) = \begin{cases} x^{n_*-1}, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ e^{-x}, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

Отметим: 1) величину x'_* , с плотностью $g(x)/mesG$ удобно моделировать методом обратной функции:

$$x'_* = \begin{cases} (1 + n_* a_{[n]+1} / e)^{1/n_*}, & \text{если } 0 \leq a_{[n]+1} < 1 / (1 + n_* / e), \\ -\ln \left((1 - a_{[n]+1}) (n_*^{-1} + e^{-1}) \right), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

2) величина h'_* при условии $x'_* = x$ моделируется так: $h'_* = g(x) a_{[n]+2}$.

3.9. Моделирование случайных величин с распределениями χ^2 , Стьюдента, Фишера

Рассмотрим моделирование случайной величины x_m с χ^2 -распределением с m степенями свободы:

$$f_1(x; m) = \frac{x^{m/2-1} e^{-x/2}}{2^{m/2} \Gamma(m/2)}, \quad x \geq 0, \quad (3.9.1)$$

случайной величины h_m с t -распределением Стьюдента с m степенями свободы:

$$f_2(y; m) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m\pi} \Gamma(m/2) \left(1 + y^2/m\right)^{(m+1)/2}}; \quad (3.9.2)$$

и случайной величины V_{lm} с распределением Фишера (l, m - числа степеней свободы):

$$f_3(z; l, m) = \frac{\Gamma\left(\frac{l+m}{2}\right) z^{\frac{l}{2}-1} (l/m)^{l/2}}{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \left(1 + \frac{l}{m} z\right)^{(l+m)/2}}, \quad z \geq 0, \quad (3.9.3)$$

где l, m – натуральные числа – параметры распределений.

Можно доказать, что, если g_1, g_2, \dots, g_m – независимые стандартные гауссовские случайные величины, то случайная величина

$$x_m = \sum_{j=1}^m g_j^2 \quad (3.9.4)$$

имеет плотность (3.9.1).

Формула (3.9.4) и определяет моделирующий алгоритм для случайной величины x_m с χ^2 -распределением с m степенями свободы.

Алгоритм для моделирования случайной величины h_m с t -распределением Стьюдента с m степенями свободы, имеющей плотность (3.9.2), основывается на следующем соотношении

$$h_m = \gamma / \sqrt{x_m/m}, \quad (3.9.5)$$

где γ – стандартная гауссовская случайная величина, а x_m – не зависящая от γ случайная величина с распределением (3.9.1).

Для моделирования случайной величины V_{lm} с распределением Фишера (l, m - числа степеней свободы) с плотностью (3.9.3) может быть использовано соотношение

$$z_{lm} = (x_l/l) / (x_m/m), \quad (3.9.6)$$

где x_l, x_m – независимые случайные величины с χ^2 -распределениями (3.9.1).

Задание на выполнение лабораторных работ по компьютерному моделированию случайных величин

Используя среду автоматизации вычислений MATHCAD, сформировать выборки значений случайных величин со следующими законами распределения.

Для дискретных случайных величин:

1. Геометрический закон распределения.
2. Биноминальный закон распределения.
3. Закон распределения Пуассона.

Для непрерывных случайных величин:

1. Закон равномерной плотности на отрезке $[a, b]$ (используя метод обратной функции).
2. Экспоненциальное распределение (используя метод обратной функции);
3. Нормальное (гауссовское) распределение, используя
 - а) метод обратной функции,
 - б) метод суммирования,
 - в) метод функционального преобразования,
 - г) метод исключения и суперпозиции.
4. Гамма – распределение.
5. Распределение Стьюдента.
6. Распределение χ^2 .
7. Распределение Фишера.

Для каждого закона распределения с заданными параметрами распределения должны быть выполнены следующие задания:

1. Построение при различных значениях параметров графиков теоретической плотности распределения (для непрерывных случайных величин) или вероятности (для дискретных случайных величин) и теоретической функции распределения.

2. Формирование случайной выборки заданного объема.

3. Построение графика выборки (зависимость выборочного значения от его номера).

4. Определение основных числовых характеристик выборки: выборочного среднего, выборочной дисперсии, выборочного среднеквадратического отклонения, максимального и минимального выборочных значений.

5. Построение гистограммы и ее сравнение с графиком теоретической плотности распределения (для непрерывных случайных величин) или вероятности (для дискретных случайных величин).

6. Построение эмпирической функции распределения и ее сравнение с теоретической функцией распределения.

7. Исследование зависимости вида гистограммы от объема выборки (при фиксированном числе интервалов разбиения) и от числа интервалов разбиения (при фиксированном объеме выборки).

Задания должны быть выполнены для различных значений параметров распределений.

Пример

Моделирование случайной выборки, распределенной по экспоненциальному закону

Плотность распределения вероятностей $f(x)$ и функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону, определяются как

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

где $\lambda > 0$ - параметр распределения.

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$, построенные при различных значениях параметра λ , приведены на рис.1 и рис.2 соответственно.

$$f_1(z) := \text{if}(z \geq 0, \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot z}, 0) \quad f_2(z) := \text{if}(z \geq 0, \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot z}, 0) \quad f_3(z) := \text{if}(z \geq 0, \lambda_3 \cdot e^{-\lambda_3 \cdot z}, 0)$$

$$F_1(z) := \text{if}(z \geq 0, 1 - e^{-\lambda_1 \cdot z}, 0) \quad F_2(z) := \text{if}(z \geq 0, 1 - e^{-\lambda_2 \cdot z}, 0) \quad F_3(z) := \text{if}(z \geq 0, 1 - e^{-\lambda_3 \cdot z}, 0)$$

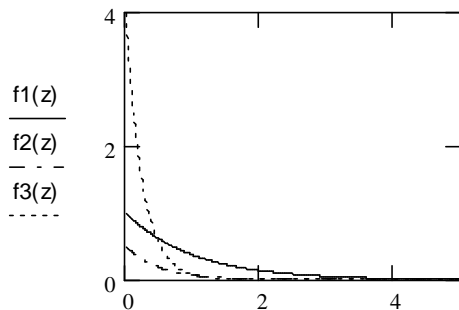


Рис.1

Экспоненциальная плотность вероятности

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0.5 \quad \lambda_3 = 4$$

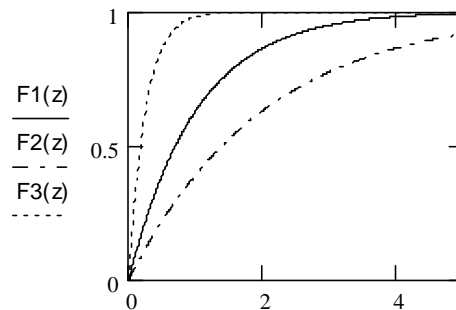


Рис.2

Экспоненциальная функция распределения

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0.5 \quad \lambda_3 = 4$$

Если x - случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$, то случайную величину y , имеющую экспоненциальное распределение с параметром λ , можно моделировать, используя метод обратных функций, следующим образом.

Задается объем выборки, $N=100$ и задается значение параметра распределения, например, $\lambda=1$

Из соотношения для функции распределения

$$y = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

находим y :

$$i := 0..N - 1 \quad x_i := \text{rnd}(1) \quad y_i := \frac{-\ln(x_i)}{\lambda}$$

Значения сформированной случайной выборки располагаем в таблице:

$$k := 0..9 \quad j := 0..9 \quad A_{k,j} := y_{k \cdot 10 + j}$$

A =

	0	1	2	3	4	5	6
0	1.269·10 ⁻³	0.215	0.879	0.431	1.731	0.191	1.24
1	4.466	0.127	8.963·10 ⁻³	0.759	0.921	0.182	0.599
2	2.087	3.121	0.775	0.62	1.982	1.513	5.743
3	0.471	1.131	8.856·10 ⁻³	0.323	0.887	1.818	0.663
4	0.914	1.328	0.85	0.164	0.554	0.728	1.392
5	0.16	0.153	1.181	0.556	3.399	0.166	1.724
6	1.317	0.328	1.146	1.28	0.131	1.8	0.728
7	0.638	1.877	0.609	4.072	1.344	0.218	1.829
8	0.758	1.852	1.072	1.846	0.116	0.377	0.337
9	0.291	1.621·10 ⁻³	1.641	0.236	0.806	0.121	1.395

Графическое изображение значений построенной случайной выборки приведено на рис. 3.

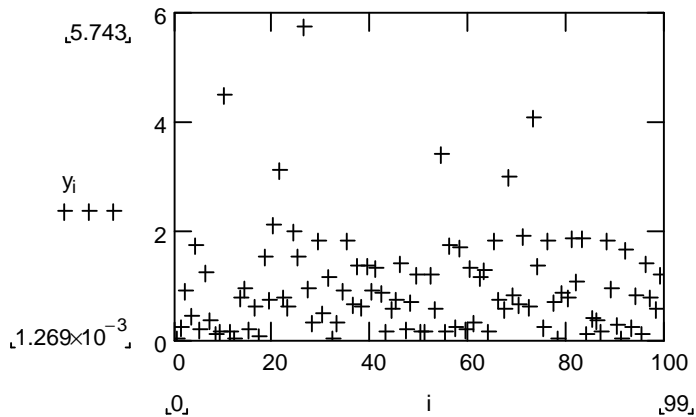


Рис. 3. Графическое изображение значений смоделированной выборки.

Основные числовые характеристики выборки

$\max(y)=5.743$	максимальное значение;
$\min(y)=1.269 \times 10^{-3}$	минимальное значение;
$\text{mean}(y)=0.992$	выборочное среднее;
$\text{var}(y)=0.947$	выборочная дисперсия;
$\text{stdev}(y)=0.973$	выборочное среднеквадратическое отклонение.

Значения выборки можно расположить в порядке возрастания, используя функцию $\text{sort}(y)$ пакета Mathcad.

Построение гистограммы, полигона частот, теоретической плотности распределения

Задается число интервалов разбиения для построения гистограммы, например, $r:=10$ и определяется длина интервала:

$$h := \frac{(\max(y) - \min(y))}{r}$$

Осуществляется разбиение на интервалы:

$$q := 0..r - 1 \quad v_0 := \min(y) \quad v_{q+1} := v_q + h$$

С использованием стандартной функции пакета Mathcad определяется число выборочных значений, попавших в каждый из интервалов v :

$$H := \text{hist}(v, y).$$

Гистограмма относительных частот находится как

$$\text{Hist} := \frac{H}{N \cdot h}.$$

Значения Hist используются и для построения полигона частот $\text{Pol} := \text{Hist}$

График теоретической плотности распределения случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону с параметром λ , может быть построен так, как это показано выше, с использованием формулы $f(z) := \text{if}(z \geq 0, \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot z}, 0)$

Графическое изображение гистограммы Hist , полигона частот Pol и кривой распределения $f(z)$ приведено на рис. 4.

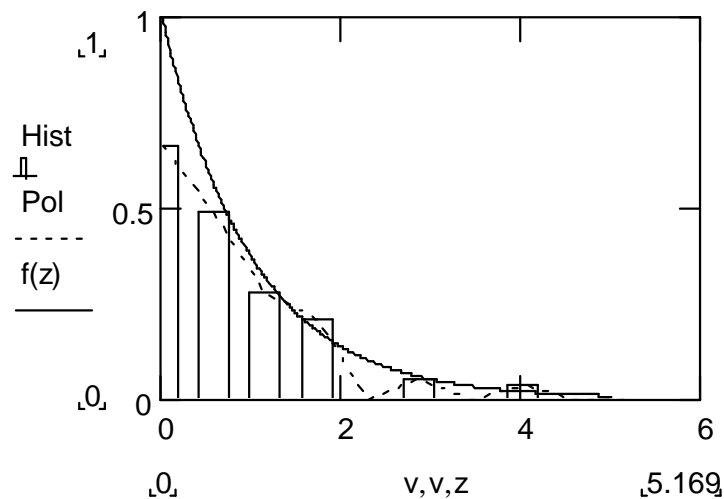


Рис. 4. Гистограмма Hist , полигон частот Pol и кривая распределения $f(z)$.

Построение эмпирической и теоретической функций распределения

Для построения графика эмпирической функций распределения задается шаг $h:=0.01$ и пределы изменения переменной: $z := \min(y) - h, \min(y) .. \max(y) + h$.

Теоретическая функция распределения случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону с параметром λ , может быть построена так, как это показано выше, с использованием формулы $FT(t) := \text{if}(t > 0, 1 - e^{-\lambda \cdot t}, 0)$

Эмпирическая функция распределения случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону с параметром λ , может быть построена следующим образом:

Задается число интервалов разбиения $r:=10$ и определяется длина интервала:

$$h := \frac{(\max(y) - \min(y))}{r}$$

Осуществляется разбиение на интервалы:

$$q := 0..r - 1 \qquad v_0 := \min(y) \qquad v_{q+1} := v_q + h.$$

С использованием стандартной функции пакета Mathcad определяется число выборочных значений, попавших в каждый из интервалов v :

$$N := \text{hist}(v, y).$$

$$N_1 := \frac{N}{N}, \qquad F_0 := 0, \qquad k := 1..last(N_1) + 1, \qquad ,$$

$$F_k := F_{k-1} + N_{k-1} \quad - \text{ эмпирическая функция распределения.}$$

Графики теоретической FT и эмпирической F функций распределения приведены на рис. 5.

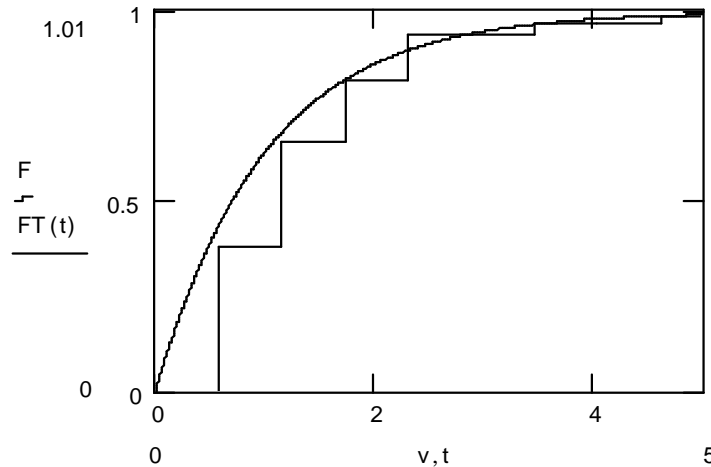


Рис. 5. Графики теоретической F и эмпирической FT функций распределения.

Исследование зависимости вида гистограммы от объема выборки при фиксированном числе интервалов разбиения

Исследуем зависимость вида гистограммы от объема выборки при фиксированном числе интервалов разбиения. Для этого сформируем три выборки разного объема, зафиксировав число интервалов разбиения, и построим для каждой из выборок гистограмму так, как это описано выше. Полученные гистограммы изображены на рис. 6.1 – рис.6.3.

$$\lambda := 1$$

Построение гистограмм для различных объемов выборки при фиксированном числе интервалов разбиения

Числа интервалов разбиения		
$k_1 := 25$	$k_2 := 25$	$k_3 := 25$
Объемы выборок		
$n_1 := 20$	$n_2 := 200$	$n_3 := 2000$
$i1 := 0 .. n_1 - 1$	$i2 := 0 .. n_2 - 1$	$i3 := 0 .. n_3 - 1$
$y_{i1} := \text{rnd}(1)$	$y_{i2} := \text{rnd}(1)$	$y_{i3} := \text{rnd}(1)$
$x1_{i1} := \frac{-\ln(1 - y_{i1})}{\lambda}$	$x2_{i2} := \frac{-\ln(1 - y_{i2})}{\lambda}$	$x3_{i3} := \frac{-\ln(1 - y_{i3})}{\lambda}$
$h1 := \frac{\max(x1) - \min(x1)}{k_1}$	$h2 := \frac{\max(x2) - \min(x2)}{k_2}$	$h3 := \frac{\max(x3) - \min(x3)}{k_3}$
$j1 := 0 .. k_1 - 1$	$j2 := 0 .. k_2 - 1$	$j3 := 0 .. k_3 - 1$
$v1_0 := \min(x1)$	$v2_0 := \min(x2)$	$v3_0 := \min(x3)$
$v1_{j1+1} := v1_{j1} + h1$	$v2_{j2+1} := v2_{j2} + h2$	$v3_{j3+1} := v3_{j3} + h3$
$H1 := \text{hist}(v1, x1)$	$H2 := \text{hist}(v2, x2)$	$H3 := \text{hist}(v3, x3)$
$\text{Hist1} := \frac{H1}{n_1 \cdot h1}$	$\text{Hist2} := \frac{H2}{n_2 \cdot h2}$	$\text{Hist3} := \frac{H3}{n_3 \cdot h3}$

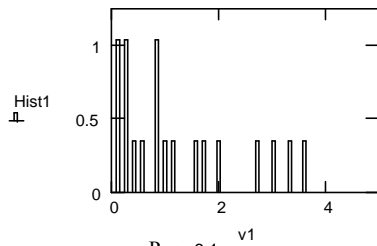


Рис .6.1
Объем выборки 20,
число интервалов 25.

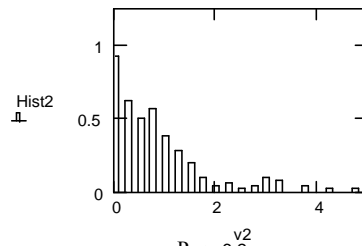


Рис .6.2
Объем выборки 200,
число интервалов 25.

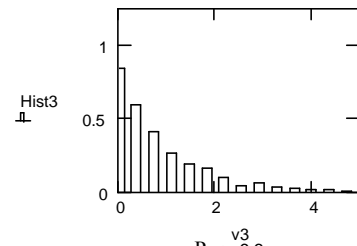


Рис .6.3
Объем выборки 2000,
число интервалов 25.

Исследование зависимости вида гистограммы от числа интервалов разбиения при фиксированном объеме выборки

Исследуем зависимость вида гистограммы от числа интервалов разбиения при фиксированном объеме выборки. Для этого построим гистограммы с различным числом интервалов разбиения, предварительно зафиксировав объем выборки, и построим для каждой из выборок гистограмму так, как это описано выше. Полученные гистограммы изображены на рис. 7.1 – рис.7.3.

$$\lambda := 1$$

**Построение гистограмм для различного
разбиения при фиксированном** **числа интервалов
объеме выборки**

Числа интервалов разбиения

$$k_1 := 5$$

$$k_2 := 25$$

$$k_3 := 125$$

Объемы выборок

$$n_1 := 200$$

$$n_2 := 200$$

$$n_3 := 200$$

$$i1 := 0..n_1 - 1$$

$$i2 := 0..n_2 - 1$$

$$i3 := 0..n_3 - 1$$

$$y_{i1} := \text{rnd}(1)$$

$$y_{i2} := \text{rnd}(1)$$

$$y_{i3} := \text{rnd}(1)$$

$$x1_{i1} := \frac{-\ln(1 - y_{i1})}{\lambda}$$

$$x2_{i2} := \frac{-\ln(1 - y_{i2})}{\lambda}$$

$$x3_{i3} := \frac{-\ln(1 - y_{i3})}{\lambda}$$

$$h1 := \frac{\max(x1) - \min(x1)}{k_1}$$

$$h2 := \frac{\max(x2) - \min(x2)}{k_2}$$

$$h3 := \frac{\max(x3) - \min(x3)}{k_3}$$

$$j1 := 0..k_1 - 1$$

$$j2 := 0..k_2 - 1$$

$$j3 := 0..k_3 - 1$$

$$v1_0 := \min(x1)$$

$$v2_0 := \min(x2)$$

$$v3_0 := \min(x3)$$

$$v1_{j1+1} := v1_{j1} + h1$$

$$v2_{j2+1} := v2_{j2} + h2$$

$$v3_{j3+1} := v3_{j3} + h3$$

$$H1 := \text{hist}(v1, x1)$$

$$H2 := \text{hist}(v2, x2)$$

$$H3 := \text{hist}(v3, x3)$$

$$\text{Hist1} := \frac{H1}{n_1 \cdot h1}$$

$$\text{Hist2} := \frac{H2}{n_2 \cdot h2}$$

$$\text{Hist3} := \frac{H3}{n_3 \cdot h3}$$

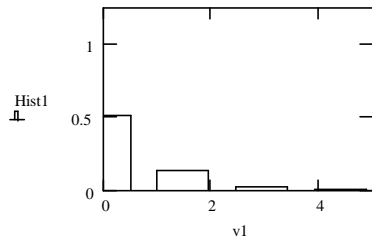


Рис .7.1

Объем выборки 200,
число интервалов 5.

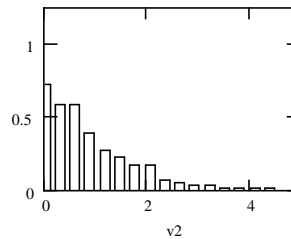


Рис .7.2

Объем выборки 200,
число интервалов 25.

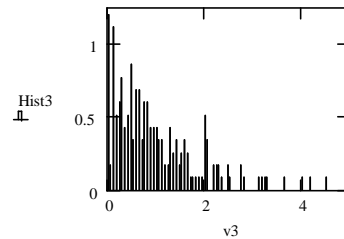


Рис .7.3

Объем выборки 200,
число интервалов 125.

Литература

1. Калинина В.Н Математическая статистика / В.Н Калинина, В.Ф. Панин. – М.: Высш. шк., 1998. – 336 с.
2. Харин Ю.С. Практикум на ЭВМ по математической статистике (для математических специальностей университетов) / Ю.С. Харин, М.Д. Степанова – Минск: Университетское изд., 1987. – 304с.
3. Дьяконов Г.В. Mathcad 8/2000 (специальный справочник) / Г.В. Дьяконов - СПб.: Питер, 2000. – 590с.

Составители:

Владимир Александрович Голуб
Тамара Михайловна Жукова
Маргарита Андреевна Соколова

Редактор О.А. Тихомирова